ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ ANALYTIQUE DE L'APPLICATION DE SYMÉTRIE CR FORMELLE

Joël Merker

§1. Introduction

La recherche de formes normales (*cf.* travaux de Chern-Moser [7], Moser-Webster [17], Webster [20], Huang-Krantz [13], Gong [12] et Ebenfelt [11]) pour les sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$ soulève la question de la convergence des normalisations formelles. Moser et Webster ont donné des exemples de surfaces $\mathcal{C}^\omega$ dans $\mathbb{C}^2$ à *tangente complexe isolée* et *hyperboliques* au sens de Bishop, formellement mais non holomorphiquement normalisables (à cause d'un phénomène de petits diviseurs, *voir* [17]), même lorsque la forme normale est elle-même analytique ou algébrique. En revanche, il apparaît qu'un tel phénomène ne se produit pas pour les objets CR, d'après les résultats récents de Baouendi-Rothschild obtenus en collaboration avec Ebenfelt ou avec Zaitsev, et énoncés avec des hypothèses génériques de non-dégénérescence (*voir* [2,3,4,6]). Ces auteurs établissent notamment qu'une application formelle inversible entre deux sous-variétés CR-génériques $\mathcal{C}^\omega$ finiment non-dégénérées (ou essentiellement finies) et *minimales* de $\mathbb{C}^n$ est convergente. On démontre ici un théorème de convergence plus général, valable sans hypothèse de non-dégénérescence, et qui confirme la rigidité du cas CR. Ce résultat s'interprète alors comme un principe de symétrie de Schwarz formel pour les applications CR et il borne aussi le degré de transcendance de l'application formelle par rapport au corps des fractions rationnelles (*cf.* Coupet-Pinchuk-Sukhov [8,9]).

§2. Application de symétrie et équivalences formelles de variétés CR

2.1. Application de symétrie. Soit $h : (M,p) \to_{\mathcal{F}} (M',p')$ une équivalence formelle entre deux sous-variétés analytiques réelles ($\mathcal{C}^\omega$) CR-génériques de $\mathbb{C}^n$. On suppose $p = p' = 0$ dans des coordonnées centrées $t \in \mathbb{C}^n$, $t' \in \mathbb{C}^n$ et on note $m := \dim_{CR} M = m'$, $d := \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} M = d'$, $m + d = n$. Dans un travail antérieur, l'auteur a remarqué l'existence d'un invariant plus général que h, qu'il convient d'appeler *application de symétrie* et suggéré l'intérêt d'établir sa régularité, lorsque (M',p') est holomorphiquement dégénérée. Cette application *synthétise en une seule série formelle le "jet d'ordre infini en $\bar{\nu}'$ de la variété de Segre complexifiée*

1991 *Mathematics Subject Classification.* (revised 2000). 32H02, 32C16, 32V40, 32V35,.

Key words and phrases. Équivalences formelles de sous-variétés analytiques réelles génériques, Minimalité au sens de Tumanov, Application de symétrie, Non-dégénérescence holomorphe, Chaînes de Segre, Théorème d'approximation d'Artin.

conjuguée (*voir* [13]) $\underline{\mathcal{S}}'_{h(t)}$": $(\bar{\nu}', t) \mapsto j^\infty_{\bar{\nu}'} \underline{\mathcal{S}}'_{h(t)}$, $\bar{\nu}' \in \mathbb{C}^n$, $\bar{\nu}' \in \underline{\mathcal{S}}'_{h(t)}$, de la manière suivante. En coordonnées locales $t' = (w', z') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, $\tau' = (\zeta', \xi')$, telles que les d équations de la complexifiée extrinsèque $(\mathcal{M}', 0) := ((M')^c, 0^c)$ s'écrivent $\xi' = \Theta'(\zeta', t') = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \zeta'^\gamma \, \Theta'_\gamma(t')$, on a $\underline{\mathcal{S}}'_{h(t)} = \{(\bar{\lambda}', \bar{\mu}') \colon \bar{\mu}' = \Theta'(\bar{\lambda}', h(t))\}$, où $\bar{\nu}' = (\bar{\lambda}', \bar{\mu}')$, et l'application de symétrie sera par définition la série formelle d-vectorielle $\mathcal{R}'_h(\bar{\nu}', t) := \bar{\mu}' - \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \bar{\lambda}'^\gamma \Theta'_\gamma(h(t)) \in \mathbb{C}\{\bar{\nu}'\}[\![t]\!]^d$. Dans ces conditions, le lien de $\mathcal{R}'_h(\bar{\nu}', t)$ avec $j^\infty_{\bar{\nu}'} \underline{\mathcal{S}}'_{h(t)}$ s'exprime par une collection infinie de séries :

$$j^\infty_{\bar{\nu}'} S'_{h(t)} = (\bar{\nu}', \{\partial^\beta_{\bar{\lambda}'} [\mathcal{R}'_h(\bar{\nu}', t)]\}_{\beta \in \mathbb{N}^m}) = (\bar{\nu}', \{\partial^\beta_{\bar{\lambda}'} \left[\bar{\mu}' - \Theta'(\bar{\lambda}', h(t))\right]\}_{\beta \in \mathbb{N}^m}), \tag{2.2}$$

en prenant les jets *avec dépendance du point base, e.g.* $j^k_t \Psi(t) := (t, \{\partial^\alpha_t \Psi(t)\}_{|\alpha| \leq k})$. Par définition, cette application formelle $\mathcal{R}'_h$ dépend du système de coordonnées t', mais sa convergence en est indépendante (fait qui découle de l'invariance biholomorphe des variétés de Segre). Voici notre résultat principal :

Théorème 2.3. *Si (M, p) est minimale, alors l'application de symétrie $\mathcal{R}'_h$ est convergente, i.e. $\mathcal{R}'_h(\bar{\nu}', t) \in \mathbb{C}\{\bar{\nu}', t\}^d$.*

Remarques. **(a)** De manière équivalente : *toutes les applications* $\Theta'_\gamma(h(t)) =: \varphi'_\gamma(t)$ (une infinité) *appartiennent à* $\mathbb{C}\{t\}^d$, *et* $\exists \, \varepsilon, C > 0$, $||t|| \leq \varepsilon \Rightarrow ||\varphi'_\gamma(t)|| \leq C^{|\gamma|+1}$.

(b) L'étude de la régularité de $\mathcal{R}'_h$ *généralise adéquatement le principe de symétrie de Schwarz en plusieurs variables*. En effet, aucune condition de non-dégénérescence n'est supposée sur la variété image (M', p'), comme dans le cas $n = 1$.

(c) On supposera dans la suite (M, p) minimale au sens de Tumanov (*voir* [3]).

Applications. Voici maintenant deux applications importantes de ce théorème.

• Premièrement, rappelons que (M', p') est holomorphiquement non-dégénérée si et seulement si le rang générique de l'application $t' \mapsto (\Theta'_\gamma(t'))_{\beta \in \mathbb{N}^m}$ est égal à n (critère de Stanton [19]). Dans ce cas, les hypothèses du lemme suivant (qui découle directement de [1]) seront satisfaites :

Lemme 2.4. *Soient $R(t, t') \in \mathbb{C}\{t, t'\}^n$, $t, t' \in \mathbb{C}^n$, et $h(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^n$, $h(0) = 0$, vérifiant : $R(t, h(t)) \equiv 0$ et* dét $\left(\frac{\partial R_k}{\partial y_l}(t, h(t))\right)_{1 \leq k, l \leq n} \not\equiv 0$. *Alors $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^n$.*

En effet, d'après [3,19], il existe $\gamma^1, \ldots, \gamma^n \in \mathbb{N}^m$ tels que dét$\left(\frac{\partial \Theta'_{\gamma^k}}{\partial t'_l}(t')\right)_{1 \leq k, l \leq n} \not\equiv 0$, et comme dét$\left(\frac{\partial h_k(t)}{\partial t_l}\right)_{1 \leq k, l \leq n}(0) \neq 0$, l'hypothèse est satisfaite avec $R_k(t, t') := \Theta'_{\gamma^k}(t') - \varphi'_{\gamma^k}(t)$, $1 \leq k \leq n$, où $\Theta'_\gamma(h(t)) =: \varphi'_\gamma(t) \in \mathbb{C}\{t\}^d$ d'après le Théorème 2.3.

Par conséquent, d'après le critère de Stanton et le Lemme 2.4 :

Corollaire 2.5. *Si (M', p') est holomorphiquement non-dégénérée, $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^n$.*

Réciproquement, il est connu que si (M', p') est holomorphiquement dégénérée, il existe $h^\sharp \; : (M', p') \to_{\mathcal{F}} (M', p')$ inversible et non convergente (*cf.* [5] et §9 ci-dessous). Le Corollaire 2.5 donne ainsi une *condition nécessaire et suffisante* pour la convergence de l'application formelle $h(t)$.

Plus généralement, notre résultat peut aussi s'interpréter comme un résultat d'analyticité partielle de h, dans l'esprit de Coupet-Pinchuk-Sukhov (*voir* [8,9]) :

Corollaire 2.6. *Le degré de transcendance de l'extension de corps Frac*$(\mathbb{C}\{t\}) \to$ *Frac*$(\mathbb{C}(\{t\}))(h_1(t), \ldots, h_n(t))) \subset$ *Frac*$(\mathbb{C}[\![t]\!])$ *est inférieur ou égal au rang générique* e' *de l'application holomorphe* $t' \mapsto (\Theta'_\gamma(t'))_{\gamma \in \mathbb{N}^m}$.

En effet, le graphe formel de h est alors contenu dans une composante irréductible de dimension $n + e'$ de l'ensemble *analytique complexe* $\{(t, t') \colon \Theta'_\gamma(t') = \varphi'_\gamma(t), \forall \gamma\}$ et le Corollaire 2.6 découle donc de la caractérisation du degré de transcendance par la dimension minimale d'un ensemble analytique contenant ce graphe (*voir* [9]).

• Deuxièmement, d'après le théorème d'approximation d'Artin [1] appliqué aux équations analytiques $\Theta'_\gamma(h(t)) = \varphi'_\gamma(t) \in \mathbb{C}\{t\}^d$ $(\gamma \in \mathbb{N}^m)$, il existe $H(t) \in \mathbb{C}\{t\}^n$ vérifiant $\Theta'_\gamma(H(t)) = \varphi'_\gamma(t) \in \mathbb{C}\{t\}^d$, $\forall\ \gamma$. L'application $t \mapsto H(t)$ établissant alors une équivalence convergente (*voir* §8), on en déduit :

Corollaire 2.7. *Les variétés CR-génériques* $\mathcal{C}^\omega$ *minimales* (M, p) *et* (M', p') *sont biholomorphes si et seulement si elles sont formellement équivalentes.*

Remarque. Ce résultat a été obtenu récemment par Baouendi, Rothschild et Zaitsev dans [6] en supposant l'application $t' \mapsto (\Theta'_\gamma(t'))_{\gamma \in \mathbb{N}^m}$ de rang constant au voisinage de p', et en travaillant avec un raffinement du théorème d'Artin dû à Wavrick.

2.8. Conditions de non-dégénérescence. Ainsi, tout repose sur le Théorème 2.3, mais habituellement, les théorèmes de régularité d'applications CR sont établis avec des conditions supplémentaires de non-dégénérescence. Toutes ces conditions de non-dégénérescence peuvent s'exprimer à travers le *morphisme des k-jets de variétés de Segre*, introduit par Diederich et Webster ([10]), et qui a servi à définir l'application de symétrie ci-dessus. Soit $j^k_{t'} \mathcal{S}'_{\tau'}$ le k-jet au point t' de la variété de Segre complexifiée $\mathcal{S}'_{\tau'} = \{(w', z') \colon z' = \bar{\Theta}'(w', \tau')\}$, qui définit une application holomorphe $\varphi'_k : \mathcal{M}' \ni (t', \tau') \mapsto j^k_{t'} \mathcal{S}'_{\tau'} = (t', \{\partial^\beta_{w'}[z' - \bar{\Theta}'(w', \tau')]\}_{|\beta| \leq k}) \in \mathbb{C}^{n + d\frac{(m+k)!}{m!\ k!}}$. Soit $p'^c := (p', \bar{p}') \in \mathcal{M}'$. Classons toutes ces conditions par ordre croissant de généralité (pour l'implication **nd4** $\Rightarrow$ **nd5**, *voir* [15]). On dit que (M', p') est :

- **nd1.** *Levi-non-dégenerée* en p' si φ'_1 est une immersion en p'^c.
- **nd2.** *Finiment non-dégénérée* en p' si φ'_k est immersive en p'^c, $\forall\ k \geq k_0$.
- **nd3.** *Essentiellement finie* en p' si φ'_k est finie en p'^c, $\forall\ k \geq k_0$.
- **nd4.** *Segre-non-dégénérée* en p' si rg-gén$(\varphi'_k|_{\underline{\mathcal{S}'_{p'}}}) = m'$, $\forall k \geq k_0$.
- **nd5.** *Holomorphiquement non-dégénérée* si rg-gén$(\varphi'_k) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}'$, $\forall\ k \geq k_0$.

En particulier, l'équivalence formelle h converge sous chacune des conditions **nd1** à **nd5** ci-dessus, d'après le Corollaire 2.6, qui généralise des résultats déjà connus.

Comparaison avec les résultats précédents. La démonstration du cas **nd1** suit implicitement des formes normales de Chern-Moser [7] ; le cas **nd2** est traité dans [2] ; le cas **nd3** dans [4] ; le cas **nd4** par l'auteur dans [15] ; et enfin, le cas **nd5** par l'auteur, dans [15], en codimension un (cas hypersurface). Ensuite Mir a traité le Théorème 2.3 en codimension un (*voir* [16]). Mir avait écrit auparavant un preprint traitant le Théorème 2.3 lorsque (M', p') est algébrique (*cf.* aussi [9]), cas très spécial, puisque toutes les séries $\{\Theta'_\gamma(t')\}_{\gamma \in \mathbb{N}^m}$ sont *algébriquement dépendantes* sur un nombre *fini* d'entre elles. Cependant, mentionnons que l'utilisation d'*identités de réflexion conjuguées*, qui constitue l'idée principale dans la démonstration du présent article (*voir* §5 ci-dessous) et qui permet de traiter la codimension quelconque sans hypothèse d'algébricité, est une idée qui apparaît déjà clairement dans [15] sans y avoir été toutefois exploitée de manière appropriée.

Remarque sur les conditions de non-dégénérescence. À chaque étape de la démonstration par récurrence du Corollaire 2.6, chacune des conditions **nd1**, **nd2**, **nd3** et **nd4** permet de substituer à la considération de l'*infinité* de séries formelles $\{\Theta'_\gamma(h(t))\}_{\gamma\in\mathbb{N}^m}$ celle des n composantes de h. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de travailler avec les identités de réflexion conjuguées (*voir* [2,3,4,5,6,16]). Mais ici, dans le cas général, on travaillera avec cette collection infinie $\{\Theta'_\gamma(h(t))\}_{\gamma\in\mathbb{N}^m}$ en utilisant de manière cruciale la symétrie du problème par conjugaison complexe.

Remerciements. L'auteur tient à reconnaître ici sa dette envers les travaux de Baouendi-Rothschild et co-auteurs dont il s'est inspiré.

§3 Notations et préliminaires

3.1. Équations définissantes. Dans des coordonnées $t=(w,z)\in\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^d$ et $t'=(w',z')\in\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^d$ s'annulant en p et en p' et telles que $T_0^cM\cap\mathbb{C}^d_z=\{0\}$ et $T_0^cM'\cap\mathbb{C}^d_{z'}=\{0\}$, les variétés $(M,0)\subset(\mathbb{C}^n_t,0)$ et $(M',0)\subset(\mathbb{C}^n_{t'},0)$ sont données par deux systèmes de d équations scalaires analytiques $z_j=\bar\Theta_j(w,\bar t)$ et $z'_j=\bar\Theta'_j(w',\bar t')$, $1\le j\le d$. Soient $\tau:=(\zeta,\xi):=(\bar t)^c$ et $\tau':=(\zeta',\xi'):=(\bar t')^c$ les variables complexifiées formelles auxquelles correspondent les complexifications extrinsèques $(\mathcal{M},0)\subset\mathbb{C}^n_t\times\mathbb{C}^n_\tau$ de $(M,0)$ et $(\mathcal{M}',0)\subset\mathbb{C}^n_{t'}\times\mathbb{C}^n_{\tau'}$ de $(M',0)$, dont voici les équations données sous les formes conjuguées *équivalentes* :

$$(3.2)\qquad \Updownarrow\begin{cases} z=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} w^\gamma\,\bar\Theta_\gamma(\tau) \quad \text{et} \quad z'=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} {w'}^\gamma\,\bar\Theta'_\gamma(\tau'),\\ \xi=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m}\zeta^\gamma\,\Theta_\gamma(t)\quad \text{et}\quad \xi'=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m}{\zeta'}^\gamma\,\Theta'_\gamma(t').\end{cases}$$

Quitte à choisir des coordonnées *normales*, on supposera $\Theta_\gamma(0)=0$ et $\Theta'_\gamma(0)=0$, $\forall\ \gamma$. Ici, les fonctions analytiques d-vectorielles $\Theta_\gamma(t):=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\theta_{\gamma,\alpha}t^\alpha\in\mathbb{C}\{t\}^d$, satisfont une inégalité de Cauchy : $||\Theta_\gamma(t)||\le C^{|\gamma|+1}$ pour $||t||\le\varepsilon$, où $\varepsilon, C>0$, et de même pour Θ'_γ. On pose $r(t,\tau):=z-\bar\Theta(w,\tau)$ et $r'(t',\tau'):=z'-\bar\Theta'(w',\tau')$. Ainsi, $\bar r(\tau,t)=\xi-\Theta(\zeta,t)$ et $\bar r'(\tau',t')=\xi'-\Theta'(\zeta',t')$. Par hypothèse, il existe deux matrices inversibles $a(t,\tau)\in\mathbb{C}\{t,\tau\}^{d\times d}$ et $a'(t',\tau')\in\mathbb{C}\{t',\tau'\}^{d\times d}$ telles que $r(t,\tau)\equiv a(t,\tau)\,\bar r(\tau,t)$ et $r'(t',\tau')\equiv a'(t',\tau')\,\bar r'(\tau',t')$, avec $a(0)=-I_{d\times d}=a'(0)$.

3.3. Application formelle. L'application formelle donnée $h(t)$ est par définition une série formelle vectorielle $h(t)=(h_1(t),\dots,h_n(t))\in\mathbb{C}[\![t]\!]^n$, $h(0)=0$ vérifiant dét $(\frac{\partial h_k}{\partial t_l})_{1\le k,l\le n}(0)\neq 0$ et (après complexification) $r'(h(t),\bar h(\tau))\equiv c(t,\tau)\,r(t,\tau)$, pour une matrice (nécessairement inversible) $c(t,\tau)\in\mathbb{C}[\![t,\tau]\!]^{d\times d}$. Afin de la distinguer d'une véritable application ensembliste, on écrira $h^c=(h,\bar h)\colon(\mathcal{M},0)\to_{\mathcal{F}}(\mathcal{M}',0)$ avec l'indice $\mathcal{F}$ pour "formel" ou bien on écrira "$r'(h(t),\bar h(\tau))=0$ lorsque $r(t,\tau)=0$". Une telle expression a un sens, puisque sur la variété complexe $(2m+d)$-dimensionnelle $(\mathcal{M},0)=\{(t,\tau)\colon r(t,\tau)=0\}$, on peut choisir (indifféremment) les coordonnées (w,τ) ou (ζ,t) et alors on entendra l'identité $r'(h(t),\bar h(\zeta,\Theta(\zeta,t)))\equiv 0$ dans $\mathbb{C}[\![\zeta,t]\!]^d$. Bien entendu, on pourrait utiliser le langage adéquat de la théorie des morphismes d'algèbres locales, mais les calculs présentant déjà une certaine complexité, nous préférerons les exposer sous une forme directe. Ainsi, l'hypothèse $h(\mathcal{M},0) \subset_{\mathcal{F}} (\mathcal{M}',0)$ sera exprimée par les *deux équations équivalentes* :

$$f(t) = \bar{\Theta}'(g(t), \bar{h}(\tau)) \quad (\Longleftrightarrow) \quad \bar{f}(\tau) = \Theta'(\bar{g}(\tau), h(t)), \qquad \text{“lorsque } r(t,\tau)=0\text{”}. \tag{3.4}$$

Enfin, nous aurons besoin d'une *propriété de symétrie par conjugaison complexe* des objets et des séries formelles. Soit $h^c = (h, \bar{h})\colon (\mathcal{M},0) \to_{\mathcal{F}} (\mathcal{M}',0)$ comme ci-dessus, $h^c(t,\tau) = (h(t), \bar{h}(\tau))$ et posons $\sigma(t,\tau) := (\bar{\tau}, \bar{t})$, $\sigma'(t',\tau') := (\bar{\tau}', \bar{t}')$. Alors :

$$\sigma'(h^c(t,\tau)) = \sigma'(h(t), \bar{h}(\tau)) = (h(\bar{\tau}), \bar{h}(\bar{t})) = h^c(\bar{\tau}, \bar{t}) = h^c(\sigma(t,\tau)). \tag{3.5}$$

3.6. Application de symétrie. L'*application de symétrie* $\mathcal{R}_h'(\bar{\nu}', t)$, $t \in \mathbb{C}^n$, $\bar{\nu}' = (\bar{\lambda}', \bar{\mu}') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ sera par définition la série formelle d-vectorielle :

$$\mathcal{R}_h'(\bar{\nu}', t) = \bar{\mu}' - \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \bar{\lambda}'^{\gamma}\ \Theta_\gamma'(h(t)) \in \mathbb{C}\{\bar{\nu}'\}[\![t]\!]^d \tag{3.7}$$

Remarque. Soient des variables $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. L'anneau $\mathbb{C}[\![x_1]\!]\{x_2\}$ n'a pas de sens.

Lemme 3.8. *La propriété $\mathcal{R}_h'(\bar{\nu}', t) \in \mathbb{C}\{\bar{\nu}', t\}^d$ est indépendante du choix des coordonnées (w', z') telles que $T_0^c M' \cap \mathbb{C}^d_{z'} = \{0\}$.*

Preuve. Conséquence aisée de l'invariance biholomorphe des variétés de Segre. □

§4. Convergence de $\mathcal{R}_h'$ et de ses jets sur les chaînes de Segre

On note $\mathcal{L} := (\mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^m)$ et $\underline{\mathcal{L}} := (\underline{\mathcal{L}}^1, \dots, \underline{\mathcal{L}}^m)$ des bases de $T^{1,0}\mathcal{M}$ et $T^{0,1}\mathcal{M}$ à coefficients holomorphes qui commutent, données par $\mathcal{L}^j := \frac{\partial}{\partial w_j} + \frac{\partial \bar{\Theta}(w,\tau)}{\partial w_j} \frac{\partial}{\partial z}$ et $\underline{\mathcal{L}}^j := \frac{\partial}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial \Theta(\zeta,t)}{\partial \zeta_j} \frac{\partial}{\partial \xi}$, et $\mathcal{L}_w(0) = \mathcal{L}^1_{w^1}(\dots \mathcal{L}^m_{w^m}(0))$ le m-flot de $\mathcal{L}$, $w \in \mathbb{C}^m$ (de même pour $\underline{\mathcal{L}}_\zeta(0)$, $\zeta \in \mathbb{C}^m$). Clairement, $\mathcal{L}_w(0) = (w, \bar{\Theta}(w,0), 0, 0) \in \mathbb{C}^{2n}$ et $\underline{\mathcal{L}}_\zeta(0) = (0, 0, \zeta, \Theta(\zeta, 0)) \in \mathbb{C}^{2n}$. Les concaténations alternées de tels flots sont appelées *k-chaînes de Segre*, par exemple, pour $k = 2j$, $(w_1, \dots, w_{2j}) \mapsto \underline{\mathcal{L}}_{w_{2j}}(\mathcal{L}_{w_{2j-1}}(\dots \underline{\mathcal{L}}_{w_2}(\mathcal{L}_{w_1}(0)))) \in \mathcal{M}$, *i.e.* $\underline{\mathcal{L}}_{w_2}(\mathcal{L}_{w_1}(0)) = (w_1, \bar{\Theta}(w_1, 0), w_2, \Theta(w_2, w_1, \bar{\Theta}(w_1, 0)))$, *etc.* (*voir* [14]). On a aussi $\sigma(\mathcal{L}_w(0)) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}}(0)$, *etc.*. Si on convient de noter $w_{(k)} := (w_1, \dots, w_k)$, où $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{C}^m$ sont proches de 0, ces k-chaînes seront abrégées dans la suite par $\Gamma_k(w_{(k)})$.

Remarque. Un point de vue ensembliste équivalent sur les chaînes de Segre a été développé par Baouendi, Ebenfelt et Rothschild (*voir* [3]). Dans [14], l'auteur a ensuite géométrisé ce point de vue en introduisant les flots de champs de vecteurs.

On note $\nabla_t^\kappa \chi(t) := (\partial_t^\beta \chi(t))_{|\beta| \leq \kappa} \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{K \frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$ le κ-jet d'une série formelle vectorielle $\chi(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^K$, où $K \in \mathbb{N}_*$, $\kappa \in \mathbb{N}$. Par exemple, $\nabla_t^\kappa \mathcal{R}_h'(\bar{\nu}', t) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \bar{\lambda}'^{\gamma}\ \nabla_t^\kappa[\Theta_\gamma'(h(t))]$.

Lemme 4.1. *Soit $q(x) \in \mathbb{C}[\![x]\!]^{2n}$, avec $q(0) = 0$. On a $\nabla_t^\kappa h(\underline{\mathcal{L}}_\zeta(q(x))) \equiv \nabla_t^\kappa h(q(x))$ dans $\mathbb{C}[\![x, \zeta]\!]^{n \frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$ et $\nabla_\tau^\kappa \bar{h}(\mathcal{L}_w(q(x))) \equiv \nabla_\tau^\kappa \bar{h}(q(x))$ dans $\mathbb{C}[\![x, w]\!]^{n \frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$.*

Preuve. On note $q(x) = (q_1(x), q_2(x)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et $q_2(x) := (q_2^1(x), q_2^2(x)) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Il est facile de voir que $\underline{\mathcal{L}}_\zeta(q(x)) = (q_1(x), \zeta + q_2^1(x), \Theta(\zeta + q_2^1(x), q_1(x)))$, et comme $\nabla_t^\kappa h(t,\tau) = \nabla_t^\kappa h(t)$, on a bien $\nabla_t^\kappa h(\underline{\mathcal{L}}_\zeta(q(x))) \equiv \nabla_t^\kappa h(q_1(x)) \equiv \nabla_t^\kappa h(q(x))$. La deuxième propriété découle de la première grâce à la symétrie par conjugaison complexe (3.5) et grâce à la relation $\sigma(\mathcal{L}_w(q(x))) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}}(\sigma(q(x)))$. □

D'après le critère de minimalité de [3] reformulé dans [14] :

Lemme 4.2. *La variété CR-générique $\mathcal{C}^\omega$ (M,p) est minimale si et seulement si $\Gamma_k\colon \mathbb{C}^{mk}\to(\mathcal{M},0)$ induit une submersion en 0 pour $k\geq 2d+1$.*

Ainsi, il nous suffira de démontrer que $\mathcal{R}'_h(\bar\nu',\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathbb{C}\{\bar\nu',w_{(k)}\}^d$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$ pour en déduire que $\mathcal{R}'_h(\bar\nu',t)\in\mathbb{C}\{\bar\nu',t\}^d$, comme souhaité (*cf.* [2,3,4,6,15,16]).

4.3. Estimées de Cauchy. Dans cet objectif, il est nécessaire d'estimer la croissance des normes $||\Theta'_\gamma(h(t))||$ quand $|\gamma|\to\infty$. Commençons par une formule standard et universelle de dérivation composée.

Lemme 4.4. *Soit $\beta\in\mathbb{N}^m$. Il existe un polynôme universel d-vectoriel Q_β tel que*

$$\text{(4.5)}\qquad \begin{cases}\partial_t^\beta[\Theta'_\gamma(h(t))]=Q_\beta(\{\partial_t^\delta h(t)\}_{\delta\leq\beta},\{[\partial_{t'}^\delta\Theta'_\gamma](h(t))\}_{\delta\leq\beta})\\ Q_\beta(\{\partial_t^\delta h(t)\}_{\delta\leq\beta},0)\equiv 0.\end{cases}$$

Preuve. On note $Q_\beta(\{h_j^\delta\}_{\delta\leq\beta}^{1\leq j\leq n},\{{\theta'_k}^\delta\}_{\delta\leq\beta}^{1\leq k\leq d})$ ce polynôme. Il vérifiera (4.5) si et seulement si $Q_0={\theta'}^0$ et, par récurrence,

$$\text{(4.6)}\qquad Q_{\beta+\beta^1}:=\sum_{\delta\leq\beta}\sum_{j=1}^n\frac{\partial Q_\beta}{\partial h_j^\delta}\,h_j^{\delta+\beta^1}+\sum_{\delta\leq\beta}\sum_{k=1}^d\sum_{j=1}^n\frac{\partial Q_\beta}{\partial {\theta'_k}^\delta}\,{\theta'_k}^{\delta+\mathbf{1}_j}\,h_j^{\beta^1}$$

où $\beta^1\in\mathbb{N}^m$ avec $|\beta^1|=1$ et où $\mathbf{1}_j=(0,\dots,1,\dots,0)$ avec 1 à la j-ième place. $\square$

Si $\Psi(t')\in\mathbb{C}[\![t']\!]^n$, on note $[\nabla_t^\kappa\Psi(h)](\Gamma_k(w_{(k)})):=\{[\partial_t^\beta\Psi(h(t))]|_{t:=\Gamma_k(w_{(k)})}\}_{|\beta|\leq\kappa}$. Maintenant, en utilisant les polynômes Q_β, l'estimée de Cauchy $||\nabla_{t'}^\kappa\Theta'_\gamma(t')||\leq {C'}^{|\gamma|+1}$ et le théorème d'Artin ([1]), on peut estimer $||\Theta'_\gamma(h(t))||$ quand $|\gamma|\to\infty$:

Lemme 4.7. *Soient $k\in\mathbb{N}$ et $\kappa\in\mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- **(1)** $[\nabla_t^\kappa\mathcal{R}'_h](\bar\nu',\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathbb{C}\{\bar\nu',w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$.
- **(2)** $[\nabla_t^\kappa\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$, $\forall\,\gamma\in\mathbb{N}^m$ *et* $\exists\, C>0$, $\exists\,\varepsilon>0$ *tq* : $||w_{(k)}||\leq\varepsilon\ \Rightarrow\ ||\,[\nabla_t^\kappa\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)}))\,||\leq C^{|\gamma|+1}$ (*estimée de Cauchy*).
- **(3)** $[\nabla_t^\kappa\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$, $\forall\,\gamma\in\mathbb{N}^m$.

Preuve. On a **(1)** $\Longleftrightarrow$ **(2)** et **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**. Établissons l'implication **(3)** $\Rightarrow$ **(2)**. Soit $\beta\in\mathbb{N}^m$, $|\beta|\leq\kappa$. Soient $C>0$ et $\varepsilon>0$ deux constantes positives dont la valeur pourra varier suivant le contexte. Par hypothèse, $[\partial_t^\beta\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)}))=:\varphi_\gamma^\beta(w_{(k)})\in\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^d$, $\forall\,\gamma\in\mathbb{N}^m$. D'après le Lemme 4.4, cette relation peut s'écrire :

$$\text{(4.8)}\qquad Q_\beta(\{\partial_t^\delta h(\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\delta\leq\beta},\{[\partial_{t'}^\delta\Theta'_\gamma](h(\Gamma_k(w_{(k)})))\}_{\delta\leq\beta})=\varphi_\gamma^\beta(w_{(k)}).$$

On l'interprète comme une relation analytique satisfaite par les séries formelles $\{\partial_t^\delta h(\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\delta\leq\beta}$. D'après le théorème d'Artin, il existe une solution convergente de l'éq. (4.8), soit $\{H^\delta(w_{(k)})\}_{\delta\leq\beta}$, où $H^\delta(w_{(k)})\in\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^n$. Or, grâce à la relation $Q_\beta(\{\partial_t^\delta h(t)\}_{\delta\leq\beta},0)\equiv 0$ et aux estimées de Cauchy satisfaites par les différentielles $\partial_{t'}^\delta\Theta'_\gamma(t')$, $\delta\leq\beta$, on en déduit aisément une estimée de Cauchy $||Q_\beta(\{h_j^\delta\}_{\delta\leq\beta}^{1\leq j\leq n},\{{\theta'_k}^\delta\}_{\delta\leq\beta}^{1\leq k\leq d})||\leq C^{|\gamma|+1}$ pour $||(\{h_j^\delta\}_{\delta\leq\beta}^{1\leq j\leq n},\{{\theta'_k}^\delta\}_{\delta\leq\beta}^{1\leq k\leq d})||\leq\varepsilon$. Par composition avec la solution convergente $\{H^\delta(w_{(k)})\}_{\delta\leq\beta}$, $H^\delta(0)=0$, on en déduit l'estimée de Cauchy souhaitée pour $||w_{(k)}||\leq\varepsilon$:

$$||Q_\beta(\{H^\delta(w_{(k)})\}_{\delta\leq\beta},[\partial_{t'}^\delta\Theta'_\gamma](H^0(w_{(k)}))\}_{\delta\leq\beta})||=||\varphi_\gamma^\beta(w_{(k)})||\leq C^{|\gamma|+1}. \qquad \square \tag{4.9}$$

Ainsi, il suffit d'établir **(3)** par récurrence sur k en admettant à chaque étape l'équivalence avec **(2)**. Cette récurrence procèdera en deux moments (§6 et §7) :

Étape 1. *Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{cases} \left\langle [\nabla_t^\kappa\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \text{ et } [\nabla_\tau^\kappa\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}},\forall\ \kappa,\gamma\right\rangle \implies \\ \left\langle [\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)})) \text{ et } [\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)}))\in\mathbb{C}\{w_{(k+1)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}},\forall\ \gamma\right\rangle. \end{cases}$$

Étape 2. *En supposant l'Étape 1 vraie pour $k-1$, pour tout $\kappa\in\mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{cases} \left\langle [\nabla_t^\kappa\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \text{ et } [\nabla_\tau^\kappa\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}},\forall\ \gamma\right\rangle \implies \\ \left\langle [\nabla_t^{\kappa+1}\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \text{ et } [\nabla_\tau^{\kappa+1}\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa+1)!}{n!\,(\kappa+1)!}},\forall\ \gamma\right\rangle. \end{cases}$$

Remarque. Il est clair que pour $k=0$, les hypothèses de l'Étape 1 et celles de l'Étape 2 sont satisfaites.

§5. Symétrie par conjugaison complexe et dérivations CR

Mais tout d'abord, si $\beta\in\mathbb{N}^m$, on note $|\beta|:=|\beta_1|+\cdots+|\beta_m|$ *et* $\underline{\mathcal{L}}^\beta:=\underline{\mathcal{L}}^{1\,\beta_1}\cdots\underline{\mathcal{L}}^{m\,\beta_m}$. Appliquant ces dérivations *aux deux identités* $r'(h(t),\bar{h}(\tau))=0$ *et* $\bar{r}'(\bar{h}(\tau),h(t))=0$, $t\in\mathbb{C}^n$, $\tau\in\mathbb{C}^n$, $r(t,\tau)=0$, on obtient *deux familles infinies d'équations*, deux **identités de réflexion conjuguées**, qui sont satisfaites sur $\mathcal{M}$:

$$\begin{cases} (*): \quad f\equiv\bar{\Theta}'(g,\bar{h}), \qquad 0\ \equiv\displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} g^\gamma\ \underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})), \qquad \forall\ \beta\in\mathbb{N}_*^m. \\ (\bar{*}): \quad \bar{f}=\Theta'(\bar{g},h), \quad \underline{\mathcal{L}}^\beta\bar{f}\ \equiv\displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m}\underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{g}^\gamma)\ \Theta'_\gamma(h), \qquad \forall\ \beta\in\mathbb{N}_*^m. \end{cases} \tag{5.1}$$

Or, il existe une matrice $a'(t',\tau')\in\mathbb{C}\{t',\tau'\}^{d\times d}$, telle que $a'(0,0)=-I_{d\times d}$ et $r'(t',\tau')\equiv a'(t',\tau')\,\bar{r}'(\tau',t')$. On en déduit dans $\mathbb{C}\{t'\}[\![\tau]\!]^d$:

$$\left\langle\underline{\mathcal{L}}^\beta[r'(t',\bar{h}(\tau))]=0,\forall\ \beta\in\mathbb{N}^m\right\rangle \iff \left\langle\underline{\mathcal{L}}^\beta[\bar{r}'(\bar{h}(\tau),t')]=0,\forall\ \beta\in\mathbb{N}^m\right\rangle, \tag{5.2}$$

et en particulier, l'équivalence des systèmes $(*)$ et $(\bar{*})$, que l'on va exploiter. Mais habituellement, *seul le système* $(\bar{*})$ *est considéré* (*cf.* [2,3,4,5,6,8,9,10,16,18,19]).

Enfin, on utilisera plusieurs fois deux propriétés formelles qui découlent de transformations linéaires élémentaires sur des systèmes trigonaux infinis.

• Premièrement, d'après un calcul qui utilise l'hypothèse dét $(\frac{\partial h_k}{\partial t_l})_{1\leq k,l\leq n}(0)\neq 0$ et qui est classique dans les travaux de Baouendi-Rothschild (*cf.* [3]), on a :

(5.3)
$$\begin{cases} \left\langle [\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar f](t,\tau) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} [\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar g^\gamma](t,\tau)\ \Theta'_\gamma(t'), \qquad \forall\ \beta\in\mathbb{N}^m \right\rangle \Longleftrightarrow \\ \left\langle \underline{\Omega}_\beta(t,\tau,\nabla^{|\beta|}\bar h(\tau)) = \Theta'_\beta(t') + \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m_*} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\ \bar g(\tau)^\gamma\ \Theta'_{\beta+\gamma}(t'), \qquad \forall\ \beta\in\mathbb{N}^m, \right\rangle \end{cases}$$

où les termes $\underline{\Omega}_\beta$ sont analytiques près de $0\times 0\times \nabla^{|\beta|}\bar h(0)$ et $r(t,\tau)=0$.

• Deuxièmement, on a la résolution formelle directe du système trigonal infini :

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \left\langle \psi_\beta + \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m_*} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\ \bar g^\gamma\ \psi_{\beta+\gamma} = \underline{\omega}_\beta, \ \ \forall\ \beta\in\mathbb{N}^m \right\rangle \\ \Longleftrightarrow \left\langle \psi_\beta = \underline{\omega}_\beta + \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m_*} (-1)^\gamma \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\ \bar g^\gamma\ \underline{\omega}_{\beta+\gamma}, \ \ \forall\ \beta\in\mathbb{N}^m \right\rangle. \end{cases}$$

Posons $\underline{\Gamma}_k(w_{(k)}) := \sigma(\Gamma_k(\bar w_{(k)}))$, *i.e.* $\underline{\Gamma}_1(w_1) = \underline{\mathcal{L}}_{w_1}(0)$, $\underline{\Gamma}_2(w_{(2)}) = \mathcal{L}_{w_2}(\underline{\mathcal{L}}_{w_1}(0))$, *etc.* Alors on a dans $\mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\ \kappa!}}$:

$$(5.5)\qquad \overline{[\nabla^\kappa_t \Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)}))} = \begin{cases} [\nabla^\kappa_\tau \bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\underline{\Gamma}_k(\overline{w_{(k)}})), & \text{si } k \text{ est impair}, \\ [\nabla^\kappa_\tau \bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\underline{\Gamma}_{k-1}(\overline{w_{(k-1)}})), & \text{si } k \text{ est pair}. \end{cases}$$

§6. Saut à la chaîne de Segre supérieure

Preuve de l'Étape 1. On traite seulement le cas k pair (le cas k impair est similaire et s'y ramène formellement grâce à la symétrie par conjugaison complexe (3-5.5)). Tout d'abord, comme k est pair, on a déjà : $[\bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)})) = [\bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_k(w_{(k)}))] \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\ \kappa!}}$, $\forall\ \gamma$, c'est-à-dire la deuxième moitié de la conclusion de l'Étape 1. Plus généralement, en appliquant encore le Lemme 4.1, on a : $[\nabla^\kappa_\tau \bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)})) = [\nabla^\kappa_\tau \bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_k(w_{(k)}))] \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\ \kappa!}}$, convergent par hypothèse. Ensuite, les coefficients de $\underline{\mathcal{L}}$ étant analytiques, on a facilement :

Lemme 6.1. *Il existe P_β analytique tq.* $\underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar\Theta'_\gamma(\bar h(\tau))) = P_\beta(t,\tau,[\nabla^{|\beta|}_\tau \bar\Theta'_\gamma(\bar h)])(\tau)$.

Par conséquent, tous les termes suivants sont convergents ($\forall\ \gamma\in\mathbb{N}^m$) :

(6.2)
$$[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)})) = P_\beta(\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)}),[\nabla^{|\beta|}_\tau \bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_k(w_{(k)}))) \in \mathbb{C}\{w_{(k+1)}\}^d.$$

Le théorème d'Artin s'applique donc aux équations $(*)$ écrites au point $(t,\tau) := \Gamma_{k+1}(w_{(k+1)})$, dont les coefficients sont analytiques grâce à (6.2), équations qui sont satisfaites par la série formelle $h(\Gamma_{(k+1)}(w_{(k+1)}))$. Ainsi, il existe une solution *convergente* de ces éqs. $(*)$ que l'on note $H(w_{(k+1)})\in\mathbb{C}\{w_{(k+1)}\}^n$. D'après l'équivalence (5.2) des systèmes $(*)$ et $(\bar *)$, cette solution satisfait aussi le système :

(6.3)
$$\begin{cases} \bar f(\Gamma_k(w_{(k)})) \equiv \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \bar g^\gamma(\Gamma_k(w_{(k)}))\ \Theta'_\gamma(H(w_{(k+1)})), \\ [\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar f](\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)})) \equiv \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} [\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar g^\gamma](\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)}))\ \Theta'_\gamma(H(w_{(k+1)})), \ \ \forall\ \beta\in\mathbb{N}^m_*. \end{cases}$$

Après la transformation linéaire (5.3) sur ce sytème et sur ($\bar{*}$), on a
(6.4)

$$\begin{cases} \Theta'_\beta(H(w_{(k+1)})) + \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m_*} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\ \bar{g}^\gamma(\bar{\Gamma}_k(w_{(k)}))\ \Theta'_{\beta+\gamma}(H(w_{(k+1)})) = \\ = \underline{\Omega}_\beta(\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)}), \nabla_\tau^{|\beta|}\bar{h}(\bar{\Gamma}_k(w_{(k)}))) = \qquad (\forall\ \beta\in\mathbb{N}^m) \\ = \Theta'_\beta(h(\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)}))) + \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m_*} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\ \bar{g}^\gamma(\bar{\Gamma}_k(w_{(k)}))\ \Theta'_{\beta+\gamma}(h(\Gamma_{k+1}(w_{(k+1)}))). \end{cases}$$

Pour terminer, on applique aux éqs. (6.4) la résolution (5.4). On en déduit que $\Theta'_\beta(h(\Gamma_{(k+1)}(w_{(k+1)}))) \equiv \Theta'_\beta(H(w_{(k+1)})) \in \mathbb{C}\{w_{(k+1)}\}^d$ converge, $\forall\ \beta\in\mathbb{N}^m$. C'est la première moitié de la conclusion de l'Étape 1. $\square$

§7. Récurrence des jets sur une chaîne de Segre

Preuve de l'Étape 2. On traite seulement le cas k impair (le cas k pair est similaire et s'y ramène par symétrie en utilisant (3-5.5)). Tout d'abord, comme k est impair, on a déjà $[\nabla_\tau^{\kappa+1}\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\Gamma_k(w_{(k)})) = [\nabla_\tau^{\kappa+1}\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\Gamma_{k-1}(w_{(k-1)}))] \in \mathbb{C}\{w_{(k-1)}\}^{d\frac{(n+\kappa+1)!}{n!\,(\kappa+1)!}}$ convergent $\forall\ \gamma$, puisque l'on suppose vraie l'Étape 1 pour $k-1$. C'est la deuxième moitié de la conclusion de l'Étape 2. En vérité, on va effectuer un calcul direct qui généralise l'Étape 1 du §6 pour montrer $[\nabla_t^\kappa\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$, $\forall\ \kappa$, en faisant au passage une récurrence sur les jets (*i.e.* sur κ) du type de l'Étape 2 (*voir* la preuve du Lemme 7.20).

Soient donc $\xi\in\mathbb{C}^d$ et $w_{(k)}\in\mathbb{C}^{mk}$. Soit Υ le d-champ de vecteurs tangent à $\mathcal{M}$ défini par $\Upsilon := \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial\Theta(\zeta,t)}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\xi}$ et soit $\underline{\Upsilon} := \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar{\Theta}(w,\tau)}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial z}$. On a $[\mathcal{L},\underline{\Upsilon}]=0$.

Lemme 7.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) $[\nabla_t^\kappa\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$, $\forall\ \kappa\in\mathbb{N}$.
(b) $[\mathcal{L}^\delta\underline{\Upsilon}^\alpha\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^d$, $\forall\ \delta\in\mathbb{N}^m$, $\forall\ \alpha\in\mathbb{N}^d$.
(c) $[\underline{\Upsilon}^\alpha\Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^d$, $\forall\ \alpha\in\mathbb{N}^d$.

Preuve. Comme $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial\bar{\Theta}(w,\tau)}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$, $\underline{\Upsilon} = \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar{\Theta}(w,\tau)}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_t = (\partial_w,\partial_z)$ et $\frac{\partial\bar{\Theta}(0,0)}{\partial\xi} = I_{d\times d}$, on a **(a)** $\Longleftrightarrow$ **(b)** par transformations linéaires. De plus, on a **(c)** $\Rightarrow$ **(b)**, car $\partial_{w_k}^\delta[\Psi(\Gamma_k(w_{(k)}))] = \partial_{w_k}^\delta[\Psi(\mathcal{L}_{w_k}(\Gamma_{k-1}(w_{(k-1)})))] = [\mathcal{L}^\delta\Psi](\Gamma_k(w_{(k)}))$. $\square$

Il suffit donc de prouver **(c)**. Soit $(\xi,p)\mapsto\underline{\Upsilon}_\xi(p)$ le d-flot de $\underline{\Upsilon}$. Bien sûr, on a $\partial_\xi^\alpha[\Psi(\underline{\Upsilon}_\xi(q(x)))] = [\underline{\Upsilon}^\alpha\Psi](\underline{\Upsilon}_\xi(q(x)))$. Considérons $\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))\in\mathcal{M}$. On pose :
(7.2)

$$\begin{cases} E_\beta(w_{(k)},\xi,t') := \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} w'^\gamma\ [\underline{\mathcal{L}}^\beta\bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))), \\ F_\beta(w_{(k)},\xi,t') := [\underline{\mathcal{L}}^\beta\bar{f}](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))) - \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m}[\underline{\mathcal{L}}^\beta\bar{g}^\gamma](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))\ \Theta'_\gamma(t'), \end{cases}$$

pour tout $\beta\in\mathbb{N}^m$ (*cf.* ($*$)-($\bar{*}$)). D'après la définition de $a'(t',\tau')$ (*voir* §3.1), on a :

$$\begin{cases} E_0(w_{(k)},\xi,t') = a'(t',\bar{h}(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))))\ F_0(w_{(k)},\xi,t'), \\ F_0(w_{(k)},\xi,t') = \bar{a}'(\bar{h}(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))),t')\ E_0(w_{(k)},\xi,t'). \end{cases} \tag{7.3}$$

Appliquant toutes les dérivations $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ aux éqs. (7.3) :
(7.4)
$$\begin{cases} E_\beta(w_{(k)},\xi,t') \equiv a'(t',w_{(k)},\xi)\ F_\beta(w_{(k)},\xi,t') + \sum_{\delta<\beta} {a'}_\delta^\beta(t',w_{(k)},\xi)\ F_\delta(w_{(k)},\xi,t'), \\ F_\beta(w_{(k)},\xi,t') \equiv b'(t',w_{(k)},\xi)\ E_\beta(w_{(k)},\xi,t') + \sum_{\delta<\beta} {b'}_\delta^\beta(t',w_{(k)},\xi)\ E_\delta(w_{(k)},\xi,t'). \end{cases}$$

Ici, ${a'}_\delta^\beta(t',w_{(k)},\xi), {b'}_\delta^\beta(t',w_{(k)},\xi) \in \mathbb{C}\{t'\}[\![w_{(k)},\xi]\!]^{d\times d}$. D'après (7.4), on a (*cf.* (5.2)) Idéal $\langle\{E_\beta(w_{(k)},\xi,t')\}_{\beta\in\mathbb{N}^m}\rangle$ = Idéal $\langle\{F_\beta(w_{(k)},\xi,t')\}_{\beta\in\mathbb{N}^m}\rangle$. Plus généralement, par récurrence sur $\alpha\in\mathbb{N}^d$, on définit une collection $\{E_\beta^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\beta\in\mathbb{N}^m}$ de fonctions d-vectorielles comme suit. Soit $\alpha^1\in\mathbb{N}^d$ avec $|\alpha^1|=1$. On pose $T_0'=t'$ et :

$$(7.5)\quad \begin{cases} E_\beta^{(0)}(w_{(k)},\xi,t') := E_\beta(w_{(k)},\xi,t'); \quad \text{et : } E_\beta^{(\alpha+\alpha^1)}(w_{(k)},\xi,\{T'_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha+\alpha^1}) := \\ := \dfrac{\partial E_\beta^{(\alpha)}}{\partial \xi^{\alpha^1}}(w_{(k)},\xi,\{T'_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha}) + \sum_{\alpha'\leq\alpha} \dfrac{\partial E_\beta^{(\alpha)}}{\partial T'_{\alpha'}}(w_{(k)},\xi,\{T'_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha})\ T'_{\alpha'+\alpha^1}. \end{cases}$$

On définit aussi la collection similaire $\{F_\beta^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\beta\in\mathbb{N}^m}$. Par construction :

$$(7.6)\qquad \begin{cases} \left[E_\beta^{(\alpha)}(w_{(k)},\xi,\{T'_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha})\right]\Big|_{T'_{\alpha'}:=[\underline{\Upsilon}_\xi^{\alpha'}h](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))),\ \forall\ \alpha'\leq\alpha} = \\ = \partial_\xi^\alpha[E_\beta(w_{(k)},\xi,h(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))))]. \end{cases}$$

Voici maintenant une propriété généralisant (7.4) qui se vérifie par un calcul formel direct en utilisant les relations (7.3) et les définitions (7.5) de $E_\beta^{(\alpha)}$ et de $F_\beta^{(\alpha)}$: □

Lemme 7.7. *Dans l'anneau* $\mathbb{C}\{\{T'_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha}\}[\![w_{(k)},\xi]\!]^d$, *on a pour tout* $\alpha\in\mathbb{N}^d$ *:*
(7.8)
$$\text{Idéal}\left\langle\{E_\beta^{(\alpha)}(w_{(k)},\xi,\{T'_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha})\}_{\beta\in\mathbb{N}^m}\right\rangle = \text{Idéal}\left\langle\{F_\beta^{(\alpha)}(w_{(k)},\xi,\{T'_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha})\}_{\beta\in\mathbb{N}^m}\right\rangle.$$

Suite de la démonstration. D'après $(*)$, la série formelle $h(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))$ est une solution des équations $E_\beta(w_{(k)},\xi,\,h(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))))\equiv 0$, $\forall\ \beta\in\mathbb{N}^m$. Par conséquent :

$$(7.9)\qquad \begin{cases} 0 \equiv \partial_\xi^\alpha|_{\xi=0}[E_\beta(w_{(k)},\xi,h(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))))] = \\ = E_\beta^{(\alpha)}(w_{(k)},0,\{[\underline{\Upsilon}^{\alpha'}h](\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\alpha'\leq\alpha}), \qquad \forall\ \alpha\in\mathbb{N}^d,\ \forall\ \beta\in\mathbb{N}^m. \end{cases}$$

Maintenant, on fixe $\alpha\in\mathbb{N}^d$ et on considère le sous-système fini :

$$(7.10)\qquad E_\beta^{(\alpha')}(w_{(k)},0,\{[\underline{\Upsilon}^{\alpha''}h](\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\alpha''\leq\alpha'}) = 0, \qquad \forall\ \alpha'\leq\alpha.$$

Lemme 7.11. *Les équations* (7.10) *sont analytiques, i.e. :*

$$(7.12)\qquad E_\beta^{(\alpha')}(w_{(k)},0,\{T_{\alpha''}\}_{\alpha''\leq\alpha'}) \in \mathbb{C}\{w_{(k)},\{T_{\alpha''}\}_{\alpha''\leq\alpha'}\}^d, \qquad \forall\ \alpha'\leq\alpha,$$

Preuve. En effet, comme k est impair, on a $\Gamma_k(w_{(k)}) = \mathcal{L}_{w_k}(\Gamma_{k-1}(w_{(k-1)}))$, d'où $[\nabla_\tau^\kappa\bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \equiv [\nabla_\tau^\kappa\bar\Theta'_\gamma(\bar h)](\Gamma_{k-1}(w_{(k-1)})) \in \mathbb{C}\{w_{(k-1)}\}^{d\frac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}}$, puisqu'on suppose vraie l'Étape 1 pour $k-1$. Par conséquent, en appliquant le Lemme 6.1, on voit que les dérivées $\partial_\xi^{\alpha''}|_{\xi=0}[[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h})](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))] \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^d$ des coefficients de $E_\beta^{(\alpha')}$ (*cf.* éq. $(7.2)^{1^{i\grave{e}re}}$) par rapport à $\{T_{\alpha''}\}_{\alpha''\leq\alpha}$ convergent toutes. $\square$

Ainsi, il existe des solutions $H_{\alpha'}(w_{(k)}) \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^n$, $\alpha' \leq \alpha$, satisfaisant :

$$E_\beta^{(\alpha')}(w_{(k)}, 0, \{H_{\alpha''}(w_{(k)})\}_{\alpha''\leq\alpha'}) \equiv 0, \qquad \forall\ \alpha' \leq \alpha. \tag{7.13}$$

Grâce à la propriété (7.8), on déduit de (7.13) :

$$F_\beta^{(\alpha')}(w_{(k)}, 0, \{H_{\alpha''}(w_{(k)})\}_{\alpha''\leq\alpha'}) \equiv 0, \qquad \forall\ \alpha' \leq \alpha. \tag{7.14}$$

Mais on a aussi d'un autre côté en dérivant $(7.2)^{2^{i\grave{e}me}}$ par rapport à ξ :

$$F_\beta^{(\alpha')}(w_{(k)}, 0, \{[\underline{\Upsilon}^{\alpha''} h](\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\alpha''\leq\alpha'}) \equiv 0, \qquad \forall\ \alpha' \leq \alpha, \tag{7.15}$$

une identité que l'on peut réécrire plus explicitement comme suit :

$$\begin{cases} \partial_\xi^{\alpha'}|_{\xi=0}[[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{f}](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))] \equiv \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \sum_{\alpha''\leq\alpha'} \dfrac{\alpha'!}{\alpha''!\ (\alpha'-\alpha'')!} \\ \quad \partial_\xi^{\alpha'-\alpha''}[[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}^\gamma](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))]\ \partial_\xi^{\alpha''}[\Theta'_\gamma(h(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))))]\Big|_{\xi=0}, \quad \forall\ \alpha' \leq \alpha. \end{cases} \tag{7.16}$$

Or, il existe clairement des fonctions ${\Theta'_\gamma}^{\alpha''}$ analytiques telles que :

$${\Theta'_\gamma}^{\alpha''}(\{[\underline{\Upsilon}^{\alpha'''} h](\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\alpha'''\leq\alpha''}) := \partial_\xi^{\alpha''}|_{\xi=0}[\Theta'_\gamma(h(\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)}))))]. \tag{7.17}$$

Par conséquent, on peut réécrire les équations (7.14) et (7.16) comme suit :

$$\begin{cases} \partial_\xi^{\alpha'}|_{\xi=0}[[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{f}](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))] \equiv \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \sum_{\alpha''\leq\alpha'} \dfrac{\alpha'!}{\alpha''!\ (\alpha'-\alpha'')!} \\ \partial_\xi^{\alpha'-\alpha''}|_{\xi=0}[[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}^\gamma](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))]\ {\Theta'_\gamma}^{\alpha''}(\{H_{\alpha'''}(w_{(k)})\}_{\alpha'''\leq\alpha''}), \quad \forall\ \alpha' \leq \alpha. \end{cases} \tag{7.18}$$

$$\begin{cases} \partial_\xi^{\alpha'}|_{\xi=0}[[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{f}](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))] \equiv \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \sum_{\alpha''\leq\alpha'} \dfrac{\alpha'!}{\alpha''!\ (\alpha'-\alpha'')!} \\ \partial_\xi^{\alpha'-\alpha''}|_{\xi=0}[[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}^\gamma](\underline{\Upsilon}_\xi(\Gamma_k(w_{(k)})))]\ {\Theta'_\gamma}^{\alpha''}(\{[\underline{\Upsilon}^{\alpha'''} h](\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\alpha'''\leq\alpha''}) \equiv 0. \end{cases} \tag{7.19}$$

On va maintenant utiliser (5.3-4) afin de déduire des équations (7.18-19) :

Lemme 7.20. *Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^m$ et tout $\alpha' \leq \alpha$, on a :*

$${\Theta'_\gamma}^{\alpha'}(\{[\underline{\Upsilon}^{\alpha''} h](\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\alpha''\leq\alpha'}) \equiv {\Theta'_\gamma}^{\alpha'}(\{H_{\alpha''}(w_{(k)})\}_{\alpha''\leq\alpha'}) \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^d. \tag{7.21}$$

Preuve. En appliquant directement (5.3-4), ceci est vrai pour $|\alpha'| = 0$ en considérant les éqs. (7.18-19) seulement au rang $\alpha' = 0$, comme à la fin du §6. Supposons par récurrence que (7.21) est vrai pour $\alpha' < \alpha$, $|\alpha'| = \kappa \in \mathbb{N}_*$. Soit $\alpha'_0 \leq \alpha$,

$|\alpha_0'| = \kappa + 1$. On écrit les éqs. (7.18-19) au rang $\alpha' := \alpha_0'$ et on les soustrait deux à deux. Grâce à cette hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} [\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}^\gamma](\Gamma_{(k)}(w_{(k)})) \ \Big[{\Theta'_\gamma}^{\alpha_0'}(\{H_{\alpha''}(w_{(k)})\}_{\alpha'' \leq \alpha_0'}) - \\ &-{\Theta'_\gamma}^{\alpha_0'}(\{[\underline{\Upsilon}^{\alpha''} h](\Gamma_k(w_{(k)}))\}_{\alpha'' \leq \alpha_0'}) \Big] \equiv 0, \end{aligned} \right. \tag{7.22}$$

pour tout $\beta \in \mathbb{N}^m$. D'après (5.3-4), on a alors (7.21) pour $\alpha' = \alpha_0'$. Ainsi, l'éq. (7.21) conclut que $[\underline{\Upsilon}^\alpha \Theta'_\gamma(h)](\Gamma_k(w_{(k)})) \in \mathbb{C}\{w_{(k)}\}^d$, $\forall \ \alpha \in \mathbb{N}^d$. $\square$

Conclusion 7.23. *Grâce au Lemme 7.1, on a ainsi achevé d'établir la première (et la seconde) moitié de l'Étape 2 (cas k impair). En appliquant le Lemme 4.7 pas à pas dans le procédé de récurrence en deux moments défini par l'Étape 1 et par l'Étape 2, on en conclut que* $\mathcal{R}'_h(\bar{\nu}', \Gamma_k(w_{(k)})) \in \mathbb{C}\{\bar{\nu}', w_{(k)}\}^d$, $\forall \ k \in \mathbb{N}$, *et donc* $\mathcal{R}'_h(\bar{\nu}', t) \in \mathbb{C}\{\bar{\nu}', t\}^d$ *par minimalité de* $(\mathcal{M}, 0)$.

La démonstration du Théorème 2.3 est terminée. $\square$

§8. Équivalences formelles et équivalences holomorphes

L'énoncé suivant précise le contenu du Corollaire 2.7 :

Théorème 8.1. *Soit* $h\colon (M, 0) \to_{\mathcal{F}} (M', 0)$ *une équivalence formelle entre sous-variétés CR-génériques minimales* $\mathcal{C}^\omega$ *de* $\mathbb{C}^n$. *Pour tout* $N \in \mathbb{N}_*$, *il existe une équivalence holomorphe* $H_N\colon (M, 0) \to_{\mathcal{F}} (M', 0)$ *avec* $H_N(t) \equiv h(t)$ (*mod* $||t||^N$).

Preuve. D'après le Théorème 2.3, il existe $\varphi'_\gamma(t) \in \mathbb{C}\{t\}^d$ tel que $\Theta'_\gamma(h(t)) \equiv \varphi'_\gamma(t)$, $\forall \ \gamma \in \mathbb{N}^m$. Soit $N \in \mathbb{N}_*$. Appliquant le théorème d'Artin, on obtient une application holomorphe H_N satisfaisant $\Theta'_\gamma(H_N(t)) \equiv \varphi'_\gamma(t)$, $\forall \ \gamma \in \mathbb{N}_m$ et $H_N(t) \equiv h(t)$ (mod $||t||^N$). Bien sûr, on a l'estimée de Cauchy $||\Theta'_\gamma(H_N(t))|| \leq C^{|\gamma|+1}$ et $\bar{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \bar{g}^\gamma(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \ \Theta'_\gamma(H_N(t))$. Rappelons $-r'(H_N(t), \bar{h}(\tau)) \equiv a'(H_N(t), \bar{h}(\tau)) \ \bar{r}'(\bar{h}(\tau), H_N(t))$, d'où $F_N(t) \equiv \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} G_N^\gamma(t) \ \bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h}(\zeta, \Theta(\zeta, t)))$, qui équivaut encore à $F_N(w, \bar{\Theta}(w, \tau))) \equiv \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} G_N^\gamma(w, \bar{\Theta}(w, \tau)) \ \bar{\Theta}'_\gamma(\bar{h}(\tau))$, et finalement $F_N(w, \bar{\Theta}(w, \tau)) \equiv \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} G_N^\gamma(w, \bar{\Theta}(w, \tau)) \ \bar{\Theta}'_\gamma(\bar{H}_N(\tau))$. En conclusion, l'application $(H_N, \bar{H}_N)\colon (\mathcal{M}, 0) \to (\mathcal{M}', 0)$ établit une équivalence convergente. $\square$

§9 Nécessité de la non-dégénérescence holomorphe

On rappelle qu'une hypersurface $\mathcal{C}^\omega$ (M', p') est *holomorphiquement dégénérée* p' si et seulement si il existe un germe de champ de vecteurs $L' = \sum_{j=1}^n a'_j(t') \frac{\partial}{\partial t'_j}$ à coefficients holomorphes non tous nuls, *tangent à* (M', p') (*voir* [3,19]). La nécessité de la non-dégénérescence holomorphe pour la régularité de h a été établie dans [4] pour les difféomorphismes CR $\mathcal{C}^\infty$, mais l'auteur ne connaît pas de référence publiée pour la nécessité dans le cas formel. En voici une démonstration brève utilisant [1].

Proposition 9.1. *Il existe* $\varpi'(t') \in \mathbb{C}[\![t']\!] \backslash \mathbb{C}\{t'\}$, $\varpi'(0) = 0$, *tel que le flot* $\mathbb{C}^n \ni t' \mapsto \exp(\varpi'(t') L')(t') \in \mathbb{C}^n$ *induit une auto-application formelle inversible non-convergente* $h^\sharp\colon (M', 0) \to_{\mathcal{F}} (M', 0)$.

Preuve. Soit $\varphi'\colon (t', u') \mapsto \exp(u' L')(t') = \varphi'(t', u')$, le flot local de L', qui est holomorphe en $t' \in \mathbb{C}^n$ et $u' \in \mathbb{C}$, pour $||t'||$, $|u'| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Ce flot satisfait

$\varphi'(t',0) \equiv t'$ et $\partial_{u'}\varphi_k'(t',u') \equiv a_k'(\varphi'(t',u'))$. Comme $L' \neq 0$, on a $\partial_{u'}\varphi'(t',u') \not\equiv 0$. On peut supposer $\partial_{u'}\varphi_1'(t',u') \not\equiv 0$. Soit $\varpi'(t') \in \mathbb{C}[\![t']\!]\backslash\mathbb{C}\{t'\}$, $\varpi'(0)=0$, une série formelle *non convergente*, satisfaisant de plus $\partial_{u'}\varphi_1'(t',\varpi'(t')) \not\equiv 0$ dans $\mathbb{C}[\![t']\!]$ (il en existe beaucoup). Si la série formelle $h^\sharp \colon t' \mapsto_{\mathcal{F}} \varphi'(t',\varpi'(t'))$ était convergente, alors $t' \mapsto_{\mathcal{F}} \varpi'(t')$ le serait aussi (par le Lemme 2.4), contrairement au choix de ϖ'. Enfin, L' étant tangent à $(M',0)$, il est clair que $h^\sharp(M',0) \subset_{\mathcal{F}} (M',0)$. $\square$

References

[1] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math. **5** (1968), 277–291.

[2] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt and L.P. Rothschild, *Parametrization of local biholomorphisms of real analytic hypersurfaces*, Asian J. Math. **1** (1997), 1–16.

[3] ———, *Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings*, Princeton Math. Ser. 47, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.

[4] ———, *Convergence and finite determinacy of formal CR mappings*, Preprint 1999..

[5] M.S. Baouendi, X. Huang and L.P. Rothschild, *Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces*, Invent. Math (1) **125** (1996), 13–36.

[6] M.S. Baouendi, L.P. Rothschild and D. Zaitsev, *Equivalences of real submanifolds in complex space*, Preprint 2000.

[7] S.S. Chern and J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.

[8] B. Coupet, S. Pinchuk and A. Sukhov, *Sur le principe de réflexion*, C. R. Acad. Sci. Paris **329** (1999), 489–494.

[9] ———, *On the partial analyticity of CR mappings*, Math. Z. (to appear).

[10] K. Diederich and S.M. Webster, *A reflection principle for degenerate hypersurfaces*, Duke Math. J. **47** (1980), 835–843.

[11] P. Ebenfelt, *New invariant tensors in CR structures and a normal form for real hypersurfaces at a generic Levi degeneracy*, J. Differential Geom. **50**, 207–247.

[12] X. Gong, *Divergence of the normalization for real Lagrangian surfaces near complex tangents*, Pacific J. Math. **176** (1996), 311–324.

[13] X. Huang and S.G. Krantz, *On a problem of Moser*, Duke Math. J. **78** (1995), 213–228.

[14] J. Merker, *Vector field construction of Segre sets*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[15] ———, *On the convergence of formal CR maps*[1], Preprint, Univ. Provence **4** (2000), 1–68.

[16] N. Mir, *On the convergence of formal mappings of hypersurfaces*, Math. Res. Letters (to appear).

[17] J. K. Moser and S. M. Webster, *Normal forms for real surfaces in $\mathbb{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations*, Acta Math. **150** (1983), 255–296.

[18] S. Pinchuk, *On the analytic continuation of holomorphic mappings*, Math. of the USSR Sbornik **27** (1975), 375–392.

[19] N. Stanton, *Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces*, Amer. J. Math. **118** (1996), 209–233.

[20] S.M. Webster, *Holomorphic symplectic normalization of a real function*, Ann. Scuola Norm. Pisa **19** (1992), 69–86.

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, Centre de Mathématiques et d'Informatique, UMR 6632, 39 rue Joliot Curie, F-13453 Marseille Cedex 13, France
Tel: 00 33 (0)4 91 11 35 50 Fax: 00 33 (0)4 91 11 35 52

E-mail address: `merker@cmi.univ-mrs.fr 00 33 / (0)4 91 11 36 72 / (0)4 91 53 99 05`

[1]pdf file : cmi.univ-mrs.fr/∼merker/index.html.