

Joël M E R K E R  
École Normale Supérieure  
Département de Mathématiques et Applications  
45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05  
[www.dma.ens.fr/~merker/index.html](http://www.dma.ens.fr/~merker/index.html)  
merker@dma.ens.fr

**Sophus Lie, Friedrich Engel  
et le problème  
de Riemann-Helmholtz**

Monographie  
(ANR Physique et Géométrie  
à la charnière 19<sup>ème</sup>/20<sup>ème</sup>)  
parue aux Éditions Hermann  
Paris, rue de la Sorbonne

**7 juin 2010**  
**xxiii+325 pages**



## Préface

par Jean-Jacques Szczeciniarz<sup>1</sup>

S'il arrivait même en dormant . . . qu'un géomètre inventât quelque nouvelle démonstration, son sommeil ne l'empêcherait pas d'être vraie. DESCARTES, Discours de la méthode IV<sup>ème</sup> partie A. T. VI 39 (citation tirée de [26] que je dédie à la mémoire de Laurent Schwarz).

Le travail qui vous est livré est le résultat d'une réflexion qui s'effectue sur trois registres, philosophique, mathématique et historique. Par ces trois voies, il doit permettre au lecteur d'entrer dans l'œuvre profonde et difficile du mathématicien Sophus Lie. Si Lie est connu pour ses travaux et ses résultats, lot commun de, domaines importants des mathématiques (théorie des groupes et algèbres de Lie), on connaît peu son œuvre gigantesque dans son ensemble, ses lignes directrices et ses objectifs, et surtout son unité. C'est à ces travaux trop vastes pour être maîtrisés, écrits en norvégien et en allemand, que la présentation de Joël Merker nous introduit d'abord. Mais le lecteur qui le suivra dépassera le stade déjà remarquable d'une introduction : il comprendra à quelle stratégie d'ensemble obéit ce singulier mathématicien qui, dans son genre, domine la fin du 19<sup>ème</sup> siècle ; le lecteur saisira aussi quelle singulière obstination et quelle forme de puissance productrice — celle d'un mathématicien — a présidé au travail de Lie.

Nous voudrions présenter quelques réflexions que suggère le genre de travail auquel nous avons affaire. Les trois catégories de personnages théoriques qui occupent l'espace des recherches qui sont présentées ici travaillent et doivent travailler nécessairement dans la plus étroite collaboration, et pourtant, le statut de leurs productions les rend absolument autonomes. Le texte philosophique possède ses énoncés et sa cohérence propre, comme le travail mathématique qui est exposé et prolongé, de la même façon que les questions d'histoire et d'historiographie qui sont

---

<sup>1</sup> Professeur à l'Université Paris Diderot.

déployées devant nous. Nous nous adresserons successivement à ces trois personnages.

**Aux philosophes.** Il est impossible de nier le lien qui existe entre philosophie et mathématiques, lien d'une nature extrêmement complexe. Ce que ne fait pas la philosophie — au stade de son histoire — et ce qui n'est pas en son pouvoir ni de son ressort : elle ne résout pas de questions mathématiques. Elle ne peut que décrire et amplifier les modes d'ouverture théorique à cette singulière et pourtant universelle forme de pensée que sont les mathématiques. Elle ne peut que reproduire sur son propre terrain de déploiement la réflexivité qui caractérise le travail mathématique en profondeur. Elle produit donc un autre type de réflexion et de réflexivité. En aucun cas comme philosophie elle ne peut recourir aux arguments d'autorité des résultats produits par les mathématiques. En revanche, le type de réflexion et de réflexivité que les mathématiques produisent est en mesure de permettre, et par ressemblance et par différence, la problématisation philosophique. La divergence se manifeste là où la réflexivité philosophique se replie sur elle-même et sur son questionnement, en interrogeant par exemple, la nature des types d'êtres qu'elle se voit constituer, pour rejoindre de façon particulière le corpus philosophique de questionnements classiques qu'elle renouvelle.

De ce point de vue, Riemann (et c'est aussi le cas de Lie), se situe bien en deçà, et au-delà en même temps, des philosophies mathématiques qui se sont développées et opposées au début du 20<sup>ème</sup> siècle : le logicisme, l'intuitionnisme et le formalisme. Par delà les fossilisations aseptisantes auxquelles elles ont donné lieu, elles présentaient elles aussi dans la virtualité de leurs déploiements et dans les développements de leurs premiers tenants un authentique questionnement philosophique. Entendons-nous bien : une théorie des modèles ou même une forme de logique peut avec intérêt pour le mathématicien et pour le philosophe reproduire des résultats mathématiques sur les groupes de transformations en ouvrant des développements dans le cadre de la théorie des langages formels par exemple, cela ne ferait qu'un élément de plus à prendre en compte pour le philosophe dans sa réflexion.

Il est impossible de nier également le sentiment de malaise dans lequel la philosophie dite des mathématiques met le mathématicien. Dans la majorité des cas, il ne reconnaît rien, ni de sa pratique ni de sa théorie : les philosophes parlent de loin, dans le *suave mari magno* d'une extériorité rassurante, de mathématiques qui ne sont que rarement difficiles, et même quand c'est le cas, le problème de déployer l'ouverture qui fait la profondeur de la difficulté n'est pas même abordé. Or la

question de la difficulté, dans la mesure où, le plus souvent, les nodalités névralgiques des stratégies qui mettent en jeu des pans entiers du corpus mathématiques s'y affrontent, est précisément le lieu d'excellence où la philosophie affleure dans la mathématisation qui s'élabore. Le mathématicien ne comprend pas, comme mathématicien, que l'on puisse parler d'une mathématique achevée. Il faut, si on veut l'interpeller en philosophe, marcher en sa compagnie sur les cimes escarpées de sommets qui surplombent les abîmes.

C'est là sans doute la difficulté que peut tenter d'affronter le philosophe qui cesserait d'arriver en retard, à la tombée de la nuit. Ce n'est pas la difficulté qui fait nécessairement valeur, quoi qu'en ait dit, en un autre sens, Platon (tout ce qui est difficile est beau), mais elle restaure une vérité des mathématiques *se faisant*. Pour des raisons simples qui tiennent à la nature de la réelle progression de la science qui est *massivement synthétique*.

À l'autre bout du spectre de cette description, le mathématicien ne reconnaît pas non plus ses mathématiques quand il constate le recours, dans une terminologie métaphysique, à une élaboration catégorielle qu'il perçoit comme abstraite. Il y voit, dans le meilleur des cas, un descriptif théorique divergent qui s'oppose à la nécessité qu'il éprouve cruellement d'avancer dans l'immensité dynamique de son appréhension. En même temps, je voudrais attirer l'attention sur le très grand nombre de textes métaphysiques dont sont remplis les travaux mathématiques, comme si la créativité ne pouvait s'exercer sur ce territoire sans s'installer métaphysiquement. Peut-être est-ce particulièrement frappant dans les termes de la métaphysique allemande au cours du 19<sup>ème</sup> siècle.

Les deux modes de discursivité sont distincts, l'essentiel de la discursivité mathématique se réalisant dans une argumentation démonstrative qui est symboliquement ou formellement transcriptible. Mais la pensée va presque toujours au-delà du démonstratif et du démontré. Même en mathématiques, le problème insiste ou subsiste au-delà de sa solution.

Une partie de l'introduction de ce livre est consacrée à l'installation riemannienne. L'auteur y reprend de manière synthétique et conceptuelle le travail de Riemann dont il montre à quel point il est explicitement et philosophique et mathématique. Il le caractérise d'une manière qui ne peut qu'entraîner l'adhésion des lecteurs mathématiciens ou philosophes : l'ouverture réflexive. Et l'ensemble de l'introduction à Lie développe le même genre thématique.

Je reprends deux exemples. D'abord celui des groupes de transformations dans leur appréhension infinitésimale. Il s'agit du théorème fondamental qui dit de manière surprenante que l'intégration d'un flot local, dans le cas analytique, revient à la sommation d'un nombre infini de termes différenciés (p. 110).

Les termes qui en font la description permettent de prendre pied sur le terrain philosophique de ce que l'auteur appelle une « *équivalence ontologique fondamentale* » entre groupe local à un paramètre et transformation infinitésimale. Il ajoute que cette équivalence « *s'insère plus généralement dans l'équivalence fonctionnelle entre le différentiel infinitésimal et le local fini, tout en développant les premiers éléments d'une théorie géométrique du mouvement* ».

Mais cette équivalence n'est pas un principe d'égalité absolue entre deux êtres initialement distincts, et c'est sans doute là que gît le point-clé de cette philosophie des mathématiques en constitution : « *l'ontologie est interrogation en devenir sur la structure et sur la constitution d'un être mathématique problématique* » De ce point de vue, le lecteur voit se déployer une ontologie opératoire, comme sera celle à venir de la théorie des catégories qui a construit avec la théorie des foncteurs, ce que l'auteur désigne ici. Mais il s'y ajoute aussi l'énoncé de modes d'être que le commentateur mathématicien fait apparaître au philosophe. La formule employée par l'auteur, formule qui se rapporte au type d'équivalence posée par des théorèmes comme celui-ci, est la suivante : « *l'équivalence, en mathématiques, transcende tout concept logique ou méta-mathématique de termes formels syntaxiquement substituables* ». Une équivalence de ce genre est posée par exemple par la transformée de Fourier quand elle passe du différentiel au polynomial, ou par le mouvement de transfert de problèmes qui est réalisé par les transformations intégrales, lesquelles permettent de reconstituer les problèmes en en fournissant des équivalents dans l'un des autres secteurs des mathématiques.

La logique, syntaxiquement entendue, fait perdre la normativité intrinsèque de la théorie se construisant. Mais il faut ajouter que son objectif n'est pas initialement de capter cette normativité ; plus précisément, elle établit une autre forme de prescription, surtout si elle se constitue de l'extérieur. Dans ses développements plus récents, elle s'est pourtant dirigée vers une nouvelle intégration de la dynamique du travail mathématique comme le fait *e.g.* la *logique linéaire* développée par J.-Y. Girard. La terminologie conceptuelle qui analyse la mathématique en train de se faire se doit alors de faire surgir, depuis l'apparence

métaphorique qu'elle revêt, la force d'entraînement réflexif par laquelle elle établit la nouvelle synthèse. Comme le dit l'auteur : « *dans l'équivalence, il doit se manifester un différentiel-synthétique du potentiel interrogatif, comme par l'effet d'une révélation progressive qui autoriserait à oublier presque définitivement le membre initial de l'équivalence pour ne retenir que le membre final* [ces opérations sont thématiques en théorie des catégories par le foncteur d'oubli par exemple] *plus rapproché, bien que peut-être encore fort éloigné, de l'essence de la chose à comprendre* ».

Un autre concept que l'auteur utilise, et que nous commençons à mettre au centre de mécanismes de compréhension physico-mathématique, est celui de *brisure de symétrie*. Il est lui aussi l'effet d'une absorption par le langage conceptuel mathématique de phénomènes de la physique théorique que nous pouvons de la sorte mettre au poste d'observateur-clé du déploiement mathématique, par exemple de la théorie essentielle de Galois. Galois, en concentrant notre attention sur la symétrie des racines d'un polynôme qu'il met sous observation, met en place une procédure de brisure de leur symétrie.

Dans l'équivalence dont l'auteur nous propose le concept, nous effectuons également une *brisure de symétrie* : le concept de transformation infinitésimale « *élimine* » en quelque sorte le concept de groupe local à un paramètre, pour s'y substituer comme objet d'étude principal. De cette façon, nous concevons la stratégie de Lie : mettre entre parenthèses l'intervention de l'analyse comme procédé d'intégration pour se concentrer seulement sur la classification des transformations infinitésimales. On peut alors saisir ce qui de l'infinitésimal permet de comprendre qu'il devienne le concept moteur : il est linéaire. Il serait alors possible de comprendre la manière dont ce thème et ce système de compréhension qu'est le linéaire jouent un rôle central. Et de comprendre aussi que le différentiel installe le linéaire, et de suivre une réflexion sur le linéaire dans le déploiement mathématique. C'est bien la manière dont il nous faut comprendre la notion même de développement en série.

En nous plaçant explicitement sur le terrain de l'immanence philosophique, nous parvenons à établir des liens conceptuels avec le spéculatif mathématique que construisent Lie et Engel.

L'auteur remarque (p. 117) que toute question spéculative qui apparaît « naturellement » est traitée par Engel et Lie au moment approprié, dans le continu du déploiement de la théorie. J'en tire qu'il existe

un moment nécessaire, dans cette production mathématique, où une réflexion spéculative surgit. S'agit-il d'un excès nécessaire, d'une couche de pensée qui dépasse l'enchaînement des théorèmes ? Et l'auteur d'en conclure : « *s'il existe une systématique du questionnement, c'est dans les mathématiques d'inspiration riemannienne qui se sont développées pendant la deuxième moitié du 19<sup>ème</sup> siècle qu'il faut en trouver les racines, bien avant que l'axiomatique formelle du 20<sup>ème</sup> siècle ne l'enfouisse sous des strates de reconstitution a posteriori et non ouvertement problématisante* ». C'est pourquoi il nous faut comprendre sous un autre jour la nature de la théorie hilbertienne qui vient en un sens mettre un terme à ce style de mathématiques.

**Aux mathématiciens.** Un des principes mathématiques testé ici est celui de l'introduction de la géométrie dans l'infinitésimal (il s'agit d'un mouvement historique datant du 18<sup>ème</sup> siècle mais qui s'est érigé en principe). Joël Merker analyse en détail les mathématiques impliquées par ce principe, et de ce fait, en quoi a consisté l'erreur de Helmholtz. Cette remarquable erreur apparaît clairement présentée par l'auteur et nous plonge au cœur de la théorie : « *Engel et Lie montrent combien il est périlleux d'extrapoler les axiomes supposés valides dans des régions locales d'extension finie au sujet du comportement de points qui sont infiniment proches les uns des autres* » (p. 66). Cette réflexion sera approfondie dans une théorie puissante des faisceaux qui reprend cette question à travers le concept de cohérence.

Une deuxième idée dont Lie reste métaphysiquement persuadé et dont les philosophes ne peuvent rendre compte : l'analogie de sa théorie des groupes continus finis de transformations avec la théorie des groupes finis de substitutions. C'est une croyance rationnelle qui peut être appelée métaphysique, car elle construit une double polarité entre une exigence à développer de façon très précise, et elle se trouve de plus enracinée dans le socle des actions de groupe.

L'intérêt de l'étude d'un texte historique qui a pris place dans l'histoire est également purement mathématique. Prenons le cas des virtualités. Un des objectifs de l'étude d'un texte mathématique qui a produit ses effets dans l'histoire réelle du développement des mathématiques est d'en reconstruire les modes d'effectuation et de compréhension. Mais il suppose toujours que ces textes (leur contenu d'information, comme le dit Alain Connes) ne sont jamais épuisés. L'histoire réelle a fait des choix transformant une contingence donnée en nécessité *a posteriori*, de l'après coup. Mais si cet irréversible est scellé, rien n'indique qu'il soit unique. Et comme le montre l'auteur, il est possible et sans doute



nécessaire de développer d'autres mathématiques à côté de celles qui l'ont été. Dans nombre d'endroits de son analyse, l'auteur entrant dans la pensée de Lie en fournit précisément d'autres prolongements, qui effectuent des trajectoires nouvelles, laissant voir ce que cette création nouvelle appelle.

Il n'y a donc pas, redisons-le, de théorie morte, parce qu'il n'y a pas au cours de l'histoire de théorie qui s'isolerait de l'ensemble des théories mathématiques. D'où ces retours maintes fois notés dans la pratique mathématique de méthodes réactualisées. Un résultat sédimenté est repris dans l'horizon du système ouvert de médiations possibles dans lequel est offerte toute idéalité ([26], p. 112).

De plus, un travail comme celui-ci met en évidence deux caractéristiques conceptuelles essentielles du corpus mathématique : sa puissance *architectonique*. C'est sans doute un des faits saillants de l'histoire des mathématiques du 20<sup>ème</sup> siècle d'avoir traité cette architectonique comme telle (Grothendieck, H. Cartan, Serre par exemple), ce qui se vérifie dans les nouvelles structures, les chemins transversaux, les trajectoires inter-disciplinaires, les nouvelles unités disciplinaires que les œuvres ont fait apparaître, et en même temps son aspect *labyrinthique*, c'est-à-dire le fait que des résultats un temps silencieux puissent resurgir par des voies imprévues, des théorèmes se trouver redémontrés dans un autre cadre et acquérir de nouvelles significations. De nouvelles contemporanéités sont mises en place.

Le plus souvent, la philosophie des mathématiques officielle laisse malheureusement échapper ces faits qui sont de ceux qui parlent le plus aux mathématiciens. Je choisis par exemple la manière dont Grothendieck, reprenant l'analogie constatée entre la théorie de Galois algébrique et la topologie algébrique de Poincaré (théorie des revêtements et groupe de Poincaré), construit le concept de cette analogie à travers la théorie des catégories et invente la théorie du foncteur fibre.

**Aux historiens des mathématiques.** Il est d'une évidence cruelle que toute élaboration philosophique ou mathématique portant sur un texte historiquement daté doit se soumettre au critère de son historicité, si un tel critère existe ; s'il n'existe pas, il faut le faire surgir. L'histoire suppose de ce point de vue que l'on puisse produire une mise à distance suffisante du texte à l'étude, pour en discerner la spécificité. Le dépaysement construit de la sorte se propose toujours comme objectif de ressaisir les formes mathématiques qui ont donné sens au résultat dont on construit l'histoire.

Mais c'est de la spécificité de cette mathématique qu'il s'agit. Et il n'est pas d'histoire des mathématiques sans hypothèses philosophiques explicites, ou implicites, sans choix d'interprétation, sans valorisation épistémologique. De ce point de vue, de telles hypothèses doivent pouvoir passer par le crible de l'argumentation philosophique. Mais il est d'une nécessité absolue que l'historien comprenne et conçoive les mathématiques qu'il situe dans une histoire. Et c'est du cœur des mathématiques que cette compréhension doit surgir. Et il est à la limite possible qu'une explication historique ou revendiquée comme telle induise une compréhension mathématique précisément parce qu'elle se sera insérée dans une nouvelle trajectoire interne aux mathématiques. Comment l'historien sait-il qu'il comprend ? Comme tout mathématicien qui sait qu'il comprend, pas seulement par l'expérience du vrai, mais parce que ce savoir est à des niveaux différents savoir de lui-même : *verum index sui*. C'est ensuite que les modalités du vrai et de l'accès au vrai peuvent être extrêmement différentes.

Il est nombre de travaux mathématiques historiques qui butent sur les questions classiques et aporétiques des bons choix de récurrence. Les réponses ne peuvent se chercher et se trouver que dans la compréhension mathématique explicite de leur objet d'étude. Mais ce point mérite lui aussi quelques précisions.

Le devenir mathématique apparaît d'abord comme autonome et endogène. Cette caractérisation *implique*, comme je l'ai dit ci-dessus, tous les travaux historiques qui semblent aller dans le sens des déterminations extérieures. Elle ne s'y oppose nullement, mais un objet, un théorème, une théorie ne sont tels que dès lors qu'ils ont été installés dans le devenir immanent des mathématiques. Du ressort d'une causalité occasionnelle indispensable, les demandes extérieures, les formes institutionnelles nécessaires et contingentes, les exigences de la vie courante ne peuvent expliquer un devenir mathématique que si elles ont été reprises et installées dans le corpus pour ne plus se voir et se comprendre que comme déduites de, ou construites à partir de ce dernier. Et de ce fait, ces déterminations sont complètement transformées. Au cours de ce développement, les mathématiques, les méthodes acquièrent puissance à l'égard de leurs objets. Elles reprennent leurs acquis. Le devenir déploie une circularité de renvois des objets aux actes et des actes aux objets.

Ni découverte, ni invention. Ni succession d'inventions ni succession de découvertes. Une innovation introduit un nouveau système de

relations, certaines entre des domaines qui ne paraissaient pas interconnectés, le champ thématique peut s'en trouver structurellement modifié. Une synthèse nouvelle apparaît qui réveille des relations anciennes entre des potentiels d'idéalités ; alors cette exploration que la situation induit peut faire penser l'historien qui se met au travail à la constatation qu'il a affaire à une découverte. Mais elle n'est là que parce que le mathématicien a inventé cette insertion inattendue devenue alors nécessaire. Riemann, Lebesgue et Archimède sont soudain devenus voisins, tout comme Gromov et Eudoxe.

**Aux philosophes, encore.** Riemann pratique la philosophie : Joël Merker reprend minutieusement l'analyse riemannienne de Herbart, et la stratégie philosophique que Riemann en tire, stratégie et pour la philosophie et pour les mathématiques. Le lecteur découvrira ici la construction conceptuelle de Riemann qui se déploie comme un écho anticipateur de ses mathématiques. La réflexion philosophique est chez Riemann autonome, elle se produit pour elle-même, mais c'est alors qu'elle parle aux mathématiques et parle des mathématiques. Il faut que nos philosophes cessent d'avoir peur des métaphores contrôlées. Ce sont elles qui font avancer la philosophie entièrement imprégnée de mathématiques. Le fait qu'il en soit ainsi doit faire comprendre et au philosophe et au mathématicien la situation topologique des deux disciplines. Dussé-je me répéter, c'est cette situation qui permet précisément à la création mathématique de se développer de manière autonome, et d'autre part, à la méditation philosophique de se retrouver pour progresser.

Quand Herbart souligne le besoin professionnel éprouvé par le mathématicien de dévoiler l'esprit de ses formules, il veut indiquer le caractère essentiellement réflexif de ses formules et de sa pratique mathématique. La philosophie absorbe le mouvement de la mathématique et ses sinuosités, c'est par exemple le cas pour le différentiel.

Joël Merker insiste beaucoup sur ce qu'il appelle la stratégie de l'ouverture riemannienne. C'est dans cette position-là que l'on doit comprendre les mathématiques du 19<sup>ème</sup> siècle et leur identification partielle avec la philosophie.

L'ouverture constante de l'irréversible synthétique : j'insiste sur cette expression d'abord du synthétique, c'est-à-dire une concentration unifiée de propriétés mathématiques, par opposition à l'analytique ; la philosophie des mathématiques se déploie dans les domaines que les constructions mathématiques réalisent pour les réexprimer, les prolonger, reproduire un système de bifurcations. Cette terminologie si proche

de la pratique mathématique elle-même en est absolument distincte et je dirai que c'est sa proximité qui mesure sa distinction.

**Aux mathématiciens, aux historiens des mathématiques et aux philosophes.** Notre auteur met en évidence de façon particulièrement aiguë, le fait que des principes gouvernent la pensée de Lie. Le lecteur qui le suivra verra combien Lie et Engel pensent de manière à éviter les formes parasites d'un formalisme et comment cette stratégie conditionne à bien des égards leur possibilité productrice. Je voudrais reprendre en n'extrayant que quelques aspects de la riche analyse proposée.

Joël Merker reconstruit un trajet fondamental de la démonstration de Lie d'un théorème difficile. Ce trajet se clôt à la fin du Chapitre 9 du Volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen* par le Théorème 26 (p. 153) dont la démonstration longue et difficile est exposée et clarifiée par l'auteur. Grâce à ce théorème, Lie et Engel sont en mesure d'identifier systématiquement tout groupe continu de transformations :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

à une collection de transformations infinitésimales linéairement indépendantes :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r)$$

dont les coefficients sont analytiques (réels ou complexes) et qui est linéairement fermée par crochets :

$$[X_j, X_k] = \sum_{s=1}^r c_{j,k}^s X_s \quad (j, k=1 \dots r),$$

les  $c_{j,k}^s$  étant des constantes. Je caractériserai le bilan de trois points de vue.

*Mathématiquement*, le résultat consiste à montrer comment caractériser un groupe local par linéarisation de ses caractéristiques, du fait que le groupe est identifié à ses générateurs infinitésimaux.

*Philosophiquement*, on comprend que le travail du mathématicien a consisté à métamorphoser l'être mathématiques initial. « *La connaissance mathématique initialement indécise et problématique peut à présent se décider à réenvisager l'objet « groupe continu » — maintenant moins opaque — sous un angle absolument neuf : celui des transformations infinitésimales, plus riches de virtualités et de manipulations possibles* ». La production mathématique procède par construction de

synthèses qui ouvrent davantage. On peut aller plus loin dans l'analyse et se demander alors ce que comporte le concept de groupe continu, autrement dit de quel type de synthèse de connaissances il procède. Si, dans la production, les points de départ s'effacent, transposés et transformés qu'ils sont, ils ne cessent en réalité jamais d'agir, au point qu'il est parfois possible de les voir ressurgir. A cette occasion, se reposent les questions des relations entre l'algèbre et la géométrie et de la nature de l'algèbre linéaire.

*Historiquement*, de nombreuses questions s'ouvrent qui sont liées aux rapports entre les chemins conceptuels déterminés par les mathématiciens sous la forme des synthèses mathématiques inscrites dans le corpus qui les sanctionnent, et les parcours réels qui les ont précédés ou même déterminés.

Une des questions posée sur les trois modes est celle de la nature de la pratique de classification induite par le travail de Lie ; l'auteur nous fournit de nombreux éléments de réponse.

**La question de la genèse.** L'une de ses modalités est l'analyse dont on dispose de ce qu'on pourrait appeler la théorisation. On doit la voir dans la terminologie utilisée comme l'induction, après une fermeture, d'une exigence d'ouverture vers les possibilités enfouies dans des horizons théoriques qui sont posés ensemble, capables de susciter un nouveau déploiement du chantier immanent de construction.

Joël Merker use comme tout philosophe, comme tout philosophe des mathématiques et comme la plupart des mathématiciens qu'il analyse, de métaphores spatiales. Sans vouloir épuiser l'analyse du problème posé par cet usage, je proposerai les remarques suivantes. Je peux noter des expressions comme « *strates* », « *couches* », « *ouverture* », « *irréversible* », « *intérieur/extérieur* ». Il est vrai qu'elles relèvent souvent du registre de la géométrie et de la topologie.

Mais ces métaphores sont portées par la mise en forme d'analyses philosophiques fondées de l'organisation théorique. Si on met l'accent sur l'exigence de successivité, on peut y voir des analyses inspirées par, et remises en forme par la phénoménologie. Ainsi peut-on pour débiter ces analyses reprendre des expressions conceptuelles de J.-T. Desanti ([36]) comme celles de « *pôle d'idéalité* », le concept de pôle renvoyant à une direction vers un domaine dans lequel un concept prend sens. Ce domaine peut apparaître plus naturel, comme lieu de synthèses inachevées. Mais à côté du niveau de naturalité qui est en général le premier niveau d'une théorie apparemment plus simple ou plus géométrique, à côté de ce niveau, il existe un niveau idéal grâce auquel se manifestent

les exigences démonstratives, et les autres formes théoriques, ou même de disciplines du corpus, qui sont invoquées. Le champ réflexif, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de réflexion que nous devons mobiliser, est muni d'une direction où chaque point est l'unité d'un pôle d'actualités et de ses potentialités duales. Ainsi en est-il également du concept d'horizon, comme position d'un environnement implicite au bord de toute théorie ou de tout objet mathématique explicitement posés reflétant la part d'implicite qui accompagne tout geste mathématique. Dans toutes ces considérations, il s'agit d'aborder la question si complexe des stratifications de couches théoriques qui constituent le corpus mathématique. Il faut encore tenir compte du fait que la réflexion s'exerce dans l'unité d'une norme et d'un inachèvement, comme le disait le même auteur.

Et surtout, dans ces analyses, il s'agit de ne pas dresser de barrière entre théories en voie de constitution et théories considérées comme constituées. Elles ne se comportent pas différemment, même si la métaphore facile du « *chantier de théorisation* » peut venir sous la plume ([26], p. 87).

Une théorie enveloppe toujours un système de formations idéales (règles opératoires, prescriptions logiques) capables d'assurer les positions d'objets idéaux et d'orienter vers des enchaînements explicites, et en même temps un système d'exigences qui renvoient à des possibilités de nouer des relations dont la thématization alimentera la théorie d'un objet mis en question.

Une théorie comme système ouvert d'énoncés ne peut être saisie comme une totalité achevée, son unité est thématique ; elle ne saurait non plus être saisie de l'extérieur, en vertu de l'ordre inhérent à la suite théorématique elle-même. Mais cette intériorité n'est pas non plus assurée en vertu des possibilités toujours ouvertes de l'interconnexion entre les théories mathématiques elles-mêmes. Ce qui ne veut point dire qu'elle ne comporte pas ce que j'appellerai des couches ou des strates d'achèvement. Une classification peut être achevée, comme un résultat. Tel est le cas des classifications des groupes, tel est le cas des travaux admirables de Lie. Les théories ne peuvent être saisies que comme unité vivante de toutes les synthèses qu'elles ont produites. Mais les formes de propagation de ces résultats repotentialise l'intention initiale parfois, la démultiplie selon de subtiles modalités, d'autres fois. La théorie des groupes et des algèbres de Lie s'est ainsi reconstruite à travers les théories cohomologiques et de nouvelles questions ont ouvert des espaces

de connexion avec d'innombrables potentialités. On a considéré des situations où un groupe agit sur un espace topologique et on essaie de mesurer les possibilités de cette action en cherchant à obtenir des classes de cohomologie modulo cette action ou des classes qui contiennent des informations sur cette action. On sait que par une sorte de réenveloppement, il s'est d'abord agi de voir les opérations de groupe à travers des structures de différentiabilité qui en font des variétés. Puis on s'est intéressé aux opérations d'algèbre de Lie sur une algèbre différentielle (graduée commutative). Lie avait ouvert la voie d'exploration des opérations de la pensée qui plongent dans l'algébrisation du différentiel et du continu. C'est cette thématique qui ne cesse d'être réactualisée à travers des couches complexes de structures réflexives qui les hiérarchisent parfois ou les diffractent selon des organisations en cascade qui ne demandent qu'à faire le matériau pour de nouvelles virtualités philosophiques et de nouveaux philosophes.

Si j'ai insisté sur ce qui me semble nécessaire pour qu'une philosophie des mathématiques se redéploie plus proche des mathématiques réelles, il n'en reste pas moins que des questions comme celle de l'objectivité, de la vérité, continuent de faire le fond de la réflexion philosophique. Alain Connes a proposé trois critères d'objectivité des mathématiques (*cf.* [26], pp. 134–135).

- La possibilité de classer exhaustivement les objets définis par une axiomatique qui témoignerait de l'existence de contraintes objectives par lesquelles les univers des possibles seraient nécessités. C'est cette possibilité que déploient Lie et Engel et que Joël Merker prolonge après l'avoir admirablement problématisée. La question dominante pour Lie dans la théorie qu'il a érigée était de classer à équivalence près tous les groupes de transformation possibles.

- La cohérence et l'harmonie inter-théoriques globales des théories mathématiques attestées par les faits d'intertraductibilité, ce qui témoigne pour l'unité des mathématiques, laquelle d'ailleurs ne saurait être conçue comme une possibilité de les réduire à un calcul unique. C'est ce caractère architectonique en soi de l'ensemble du corpus mathématique que développent la théorie des catégories et l'œuvre de Grothendieck. C'est aussi cet aspect qui commence avec les mathématiques du 19<sup>ème</sup> siècle et que Lie réassume.

- Le fait que les théories mathématiques intéressantes ont un contenu informationnel infini. De ce point de vue, aucun objet mathématique ne restera en repos. La reprise caractérise la progression et

son caractère labyrinthique et imprévisible. Aucun autre système symbolique ne satisfait ces critères.

Au lecteur de refaire cette expérience unique, en entrant dans cette œuvre unique !



## Avant-propos

La troisième et dernière partie de cet ouvrage propose une traduction française annotée de la solution mathématique complète qu'ont donnée Friedrich Engel et Sophus Lie dans le troisième volume de la monumentale *Theorie der Transformationsgruppen* ([42], pp. 393–523) au problème dit « de Riemann-Helmholtz » :

*Par quels axiomes spatiaux peut-on caractériser les trois géométries à courbure constante, euclidienne, lobatchevskienne ou riemannienne, à l'exclusion de toute autre géométrie ?*

Notre premier objectif est de faire revivre, au sein de la philosophie contemporaine de la géométrie, l'incroyable puissance de pensée et de conception de Lie qui parvint, entre 1873 et 1893, à ériger sur des milliers de pages une théorie réalisant pleinement le fameux *Programme d'Erlangen* de Klein (1872, [86]). Lie partait de l'idée seule qu'il devait exister, dans le domaine des transformations continues entre équations différentielles, un analogue métaphysiquement complet à la théorie des groupes de substitutions des racines d'une équation algébrique que Serret et Jordan venaient de développer, quelques décennies après la parution posthume du mémoire génial [55] d'Évariste Galois.

Mais surtout, notre objectif principal est de montrer, en termes de *semilles* au sens de Grothendieck et dans la lignée de quelques écoles mathématiques contemporaines qui se sont développées aux États-Unis avec notamment Olver [124, 125], Gardner [56] et Bryant [21] — cf. aussi le beau livre du suédois Stormark [157] —, que notre époque peut maintenant accueillir une sorte de résurrection des mathématiques qui se sont développées à la charnière du 19<sup>ème</sup> et du 20<sup>ème</sup> siècle, notamment dans ses techniques, dans ses manières de penser, et dans ses problématiques mêmes, toujours riches, ouvertes et inépuisables. À vrai dire, bien que le présent ouvrage ne constitue en rien un travail d'histoire des mathématiques, c'est la lecture des travaux d'Hawkins [68, 69] qui nous a fait prendre conscience, *philosophiquement*, de l'importance,

pour l'architecture des mathématiques, de classier *a priori* et abstraitement les groupes de transformations, qu'ils soient discrets (Jordan) ou continus (Lie).

En effet, comme Lie lui-même l'a vite compris en profondeur dès l'hiver 1873–74, la classification abstraite et *a priori* des groupes possède une importance capitale dans l'édifice mathématique, en tant que tronc commun de la connaissance à partir duquel pourront être directement irrigués puis résolus tous les problèmes spécialisés qui impliquent une structure de groupe sous-jacente : transformations de contact, prolongements aux espaces de jets, invariants différentiels, symétries des équations aux dérivées partielles, transformations projectives, transformations conformes, structures symplectiques, théorie des invariants algébriques, *etc.* Toutefois, dans la littérature mathématiques actuelle, on ne trouve aucun article, aucun livre, aucune source qui restitue la théorie originale de Lie dans sa systématité intrinsèque, et donc pour prendre connaissance des démonstrations détaillées des théorèmes de classification, il faut se reporter aux œuvres originales. Par ailleurs, le tournant de globalisation et d'algébrisation de la théorie des groupes initié par Hermann Weyl et Élie Cartan dans les années 1930 et continué par Chevalley, Chern et Ehresmann dans les années 1950 a fait progressivement porter l'accent sur les théorèmes de classification des algèbres de Lie semi-simples complexes (Killing) et réelles (Élie Cartan), avec la combinatoire afférente des systèmes de racines (Weyl) et des diagrammes (Dynkin) qui est aujourd'hui centrale dans la théorie des représentations.

Mais puisque la théorie initiale de Lie se ramifiait surtout en direction des équations aux dérivées partielles et s'architecturait afin que s'y inscrivent toutes les structures de groupes continus possibles, ce premier ouvrage de traduction commentée sera suivi dans un avenir proche par d'autres travaux proprement mathématiques (*cf.* le texte en préparation [110]) qui transcriront dans un langage mathématique moderne d'autres résultats de Lie, tout particulièrement ceux qui sont consacrés, dans le Tome III de la *Theorie der Transformationsgruppen*, à la classification complète des actions analytiques locales sur un espace à trois dimensions ; celle-ci ne fut en fait complétée qu'en 1902 par Amaldi ([2, 3]) pour les actions doublement imprimitives qui stabilisent à la fois un feuilletage local par des surfaces et un feuilletage subordonné par des courbes.

Voici pour terminer une brève description du contenu de ce livre. Deux chapitres constituent l'*Introduction philosophique générale* (Partie I) qui est suivie d'une *Introduction mathématique à la théorie de Lie* (Partie II), utile pour aborder notre traduction de la Division V du Tome III de la *Theorie der Transformationsgruppen* (Partie III).

Dans le premier chapitre que nous consacrons à un commentaire détaillé et ciblé de la célèbre leçon orale d'habilitation [*Probevorlesung*] de Riemann (1854, [132], non publiée de son vivant), nous insistons, en nous servant notamment des études de Erhard Scholz [140, 142], sur la capacité si particulière que Riemann avait d'*ouvrir sans les fermer* les questions de conceptualisation mathématique. À la fin de l'année 1868, Helmholtz obtint une copie des notes manuscrites que Schering avait prises pendant la soutenance de Riemann, et il publie rapidement une étude ([73]), maintenant centrale pour l'histoire des fondements de la géométrie, dans laquelle il prétend pouvoir démontrer rigoureusement que la postulation — physiquement évidente sinon métaphysiquement nécessaire — de corps rigides et néanmoins maximale-ment mobiles dans un espace abstrait quelconque implique l'existence d'une métrique riemannienne à courbure constante : inversion, donc, des points de vue de Riemann, Christoffel et Lipschitz pour qui les métriques quadratiques possibles sont innombrables, puisqu'elles dépendent du comportement des invariants différentiels dérivés de la courbure. Toutefois, les arguments embryonnaires, riches d'idées nouvelles, de Helmholtz, sont en grande partie erronés ou incomplets, et il fallut attendre les travaux de Lie [99, 100, 101, 102, 103] pour qu'ils puissent être inscrits dans une vaste théorie. La traduction que nous proposons ici aura le mérite, nous l'espérons, de porter au moins à la connaissance des commentateurs francophones de Helmholtz la discussion critique par Lie de la pertinence des axiomes helmholtziens, voir notamment l'introduction à la Division 5 au début de la Partie III, p. 159, et aussi le Chapitre 21 p. 220. Enfin, notre Partie II est consacrée à une présentation des théorèmes fondamentaux de la théorie de Lie qui se base exclusivement sur le très systématique Volume I [40] de la *Theorie der Transformationsgruppen*, sans faire appel aux manuels modernes.

Non germaniste, l'auteur a bénéficié d'aides ponctuelles et utiles concernant quelques difficultés de traduction, notamment de la part de Maud Moreillon (Besançon), d'Egmont Porten (Berlin) et de Jean Ruppenthal (Wuppertal). Françoise Panigeon a régulièrement contrôlé la correction lexicale et grammaticale du texte dans son ensemble, qui lui doit donc beaucoup. Toute notre reconnaissance s'adresse aussi à

Erhard Scholz, qui a accepté d'examiner l'ouvrage et dont les travaux de stature internationale nous ont été d'une grande utilité. Le projet initial a été fécondé grâce à certaines séances du « *Séminaire Riemann* », organisé en collaboration avec Jean-Jacques Szczeciniarz et Ivahn Smadja à l'*École Normale Supérieure*. Enfin, Jean-Jacques Szczeciniarz, toujours disponible et ouvert, a constamment soutenu la réalisation de ce projet au cours d'échanges philosophiques profonds et précieux.

## Table des matières

<b>Partie I</b>	<b><i>Introduction philosophique générale</i></b>	
<b>Chap. 1. L'ouverture riemannienne</b>		1
1.1. Circonstances historiques		1
1.2. Appréciations d'universalité		4
1.3. Assembler l'inachevé		5
1.4. Le mystère des notions primitives de la géométrie		6
1.5. Fondements de la géométrie		7
1.6. Le renversement riemannien		9
1.7. Décider l'ouverture problématique du conceptuel		13
1.8. Nécessité, suffisance, bifurcation		13
1.9. L'influence épistémologique de Herbart sur Riemann		15
1.10. Le réalisme dialectique modéré de Herbart		17
1.11. La méthode des relations		19
1.12. La méthode de la spéculation et les graphes de concepts		20
1.13. La méthode des plus petits changements conceptuels		25
1.14. Modes amétriques de détermination		27
1.15. Genèse du multidimensionnel		31
1.16. Conditions pour la détermination des rapports métriques		34
1.17. Genèse des métriques riemanniennes		37
1.18. Surfaces de courbure constante		42
1.19. Courbure sectionnelle de Riemann-Christoffel-Lipschitz		44
1.20. Caractérisation de l'euclidéanité par annulation de la courbure		49
<b>Chap. 2. La mobilité helmholtzienne de la rigidité</b>		51
2.1. Le problème de Riemann-Helmholtz		51
2.2. Incomplétudes riemanniennes		52
2.3. Rendre objectives les propositions de la géométrie		55
2.4. Les quatre axiomes de Helmholtz		58
2.5. Linéarisation de l'isotropie		62
2.6. Critique par Lie de l'erreur principale de Helmholtz		64
2.7. Calculs helmholtziens		67
2.8. Insuffisances et reprises		72
2.9. L'approche infinitésimale systématique de Engel et de Lie		73

---

## Partie II *Introduction mathématique à la théorie de Lie*

<b>Prologue. Trois principes de pensée qui gouvernent la théorie de Lie . . . . .</b>	79
<b>Chap. 3. Théorèmes fondamentaux sur les groupes de transformations . . . . .</b>	83
3.1. Paramètres essentiels . . . . .	83
3.2. Concept de groupe de Lie local . . . . .	87
3.3. Principe de raison suffisante et axiome d'inverse . . . . .	91
3.4. Introduction des transformations infinitésimales . . . . .	98
3.5. Équations différentielles fondamentales . . . . .	100
3.6. Champs de vecteurs et groupes à un paramètre . . . . .	106
3.7. Le théorème de Clebsch–Lie–Frobenius . . . . .	124
3.8. Constantes de structure et correspondance fondamentale . . . . .	131
3.9. Le problème de la classification des groupes de transformations . . . . .	155

---

## Partie III *Traduction française commentée et annotée*

Sophus LIE, unter Mitwirkung von Friedrich ENGEL

*Theorie der Transformationsgruppen, Dritter und letzter Abschnitt, Abtheilung V<sup>1</sup>*

<b>Divis. V. Recherches sur les fondements de la Géométrie . . . . .</b>	159
<b>Chap. 20. Détermination des groupes de <math>R_3</math> relativement auxquels les paires de points possèdent un, et un seul invariant, tandis que <math>s &gt; 2</math> points n'ont pas d'invariant essentiel . . . . .</b>	166
§ 85. Propriétés caractéristiques des groupes recherchés . . . . .	167
§ 86. Groupes primitifs parmi les groupes recherchés . . . . .	183
§ 87. Groupes imprimitifs parmi les groupes recherchés . . . . .	184
§ 88 . . . . .	204
§ 89. Résolution du problème pour les groupes réels . . . . .	206
§ 90 . . . . .	216
<b>Chap. 21. Critique des recherches helmholtziennes . . . . .</b>	220
§ 91. Les axiomes helmholtziens . . . . .	221
§ 92. Conséquences des axiomes helmholtziens . . . . .	223
§ 93. Formulation des axiomes helmholtziens en termes de théorie des groupes . . . . .	235
§ 94. Critique des conclusions que Monsieur de Helmholtz tire de ses axiomes . . . . .	237
§ 95. Considérations se rattachant aux calculs helmholtziens . . . . .	248

§ 96. Quelles conclusions peut-on tirer des axiomes helmholtziens ? ...	253
<b>Chap. 22. Première solution du problème de Riemann-Helmholtz .....</b>	<b>260</b>
§ 97 .....	261
§ 98 .....	266
§ 99 .....	270
§ 100. Sur le discours d'habilitation de Riemann .....	275
<b>Chap. 23. Deuxième solution du problème de Riemann-Helmholtz .....</b>	<b>289</b>
§ 101 .....	291
§ 102 .....	298
§ 103 .....	307

---

## Bibliographie

<b>Bibliographie .....</b>	<b>317</b>
----------------------------	------------

---

<sup>1</sup>LIE, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Dritter und Letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie*, B.G. Teubner, Leipzig, 1893. Reprinted by Chelsea Publishing Co. (New York, N.Y., 1970).





# Partie I :

## Introduction philosophique générale

### Chapitre 1 :

#### L'ouverture riemannienne

*La mathématique est la seule bonne métaphysique.*  
Lord KELVIN

**1.1. Circonstances historiques.** Le 10 juin 1854, à l'occasion de ses épreuves d'admission à la célèbre *Université Georges Auguste* de Göttingen, Bernhard Riemann (1826–1866), alors âgé de vingt-huit ans, défend oralement son *Habilitationsvortrag*, qu'il a intitulée :

*Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*<sup>1</sup>.

En Allemagne au dix-neuvième siècle, le diplôme d'habilitation est formellement requis pour être en mesure d'obtenir le statut de *Privatdozent*, c'est-à-dire de chargé de cours. Non rétribuées par l'université, ces positions sont néanmoins prisées ; le salaire afférent y dépend de la libéralité des étudiants qui assistent régulièrement aux leçons.

Au début des années 1850, on compte à Göttingen une dizaine de professeurs permanents disposant d'une chaire. Le 16 décembre 1851, Riemann avait soutenu en latin sa thèse de doctorat [*Inauguraldissertation*] consacrée aux fonctions d'une variable complexe<sup>2</sup>, et le jury d'experts qui avait été consulté pour autoriser la soutenance était composé de sept « grands » professeurs : Gauss en mathématiques, Mitscherlich en rhétorique, Haussmann en minéralogie, Ritter en philosophie, Hoeck et Hermann en philologie classique,

---

<sup>1</sup> [*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*] Paru en 1867 à titre posthume dans le tome XIII des *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Göttingen*, ce texte a immédiatement inspiré de nombreux travaux mathématiques, notamment chez Dedekind, Gehring, Clifford, Helmholtz, Christoffel, Lipschitz, Beltrami, et d'autres. En 1898, il a été traduit en français par J. HOÜEL, voir [133], pp. 280–299.

<sup>2</sup> *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größen*, Théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe, voir [8, 93, 131] pour ce chapitre qui ne sera pas abordé dans cet ouvrage.

Waitz en histoire et Weber en physique ([131]). Aussi n'est-il pas étonnant que, dans un tel contexte d'universalité des compétences et de proximité des savoirs, Riemann ait dû prononcer, deux ans et demi plus tard pour l'habilitation, sa fameuse conférence d'épreuve [*Probevorlesung*] devant un auditoire majoritairement composé de non-mathématiciens, dans le cadre de ce qu'on appelle aujourd'hui un *Colloquium* s'adressant en principe à tous les protagonistes de l'université.

Frustration d'historien des mathématiques : les archives de la Faculté philosophique de Göttingen n'ont conservé aucune trace ([131]) concernant les rapports, les membres du jury, les discussions, les questions, ni pour la thèse, ni pour l'habilitation de Riemann. D'après Dedekind ([35], pp. 547–548), les seuls éléments incontestables concernant les circonstances de l'habilitation qui ne relèvent pas du mythe post-mortem sont deux lettres de Riemann, la première écrite le 28 décembre 1853 à son frère Wilhelm au moment de fixer tout ce qui est inhérent à la soutenance<sup>3</sup>, et la seconde à ce même frère, le 26 juin 1854, deux semaines après la soutenance<sup>4</sup>. Maigre documentation, quand on pense à toutes les spéculations qui ont été suscitées dans l'imagination des géomètres depuis plus d'un siècle et demi.

Comme les règles universitaires l'exigent encore aujourd'hui en Allemagne, le candidat à l'habilitation se doit de proposer trois sujets distincts, afin de montrer au mieux l'extension thématique de ses travaux de recherche. Ainsi Riemann propose-t-il à la fin de l'année 1853 un sujet en Analyse, un sujet en Algèbre et un sujet en Géométrie, à savoir :

**1) un mémoire abouti sur les séries trigonométriques qu'il avait déjà achevé pendant l'automne<sup>5</sup> ;**

---

<sup>3</sup> « Mon travail progresse raisonnablement : au début du mois de décembre, j'ai remis mon mémoire d'habilitation et je devais proposer à ce moment-là trois sujets pour l'épreuve orale, parmi lesquels la faculté devait en choisir un. J'avais préparé les deux premiers et j'espérais que l'un d'entre eux serait sélectionné : malheureusement, Gauss opta pour le troisième, et je suis à présent un peu pressé par le temps, car je dois encore le préparer. »

<sup>4</sup> « J'ai loué pour l'été une maison avec un jardin et, grâce à cela, ma santé ne m'a plus tourmenté. Ayant terminé, deux semaines après Pâques, une étude dont je ne pouvais pas venir à bout, je me suis enfin mis à ma conférence d'épreuve et je l'ai terminée vers Pentecôte. »

<sup>5</sup> Ce mémoire ne fut publié à titre posthume qu'en 1868, par les soins de Dedekind.

2) un travail sur les intersections entre deux courbes planes du second degré<sup>6</sup> ;

3) une réflexion générale sur les fondements de la géométrie.

Dans sa courte biographie [35], Dedekind a écrit que Gauss aurait sélectionné le troisième sujet en dérogeant à la convention académique habituelle de choisir le premier, parce qu'il était curieux de voir comment un si jeune mathématicien pourrait traiter une question qui demande tant de maturité scientifique<sup>7</sup>. Mais d'après Laugwitz [93], le premier sujet proposé était thématiquement trop proche de la thèse de Riemann ; le contenu du second est probablement apparu assez évident à Gauss ; de telle sorte que les professeurs concernés, se fiant à l'expertise de Gauss, ne pouvaient qu'être conduits à sélectionner le troisième sujet sur la géométrie.

Il y a des raisons de penser que Riemann, en prenant le risque de proposer un travail qui n'était que potentiellement en gestation, avait l'intention de s'exposer à la contrainte, dans un cadre institutionnel, de rédiger ses idées nouvelles qu'il jugeait fondamentales, bien qu'inachevées. En vérité, sur le moment, Riemann ne semble pas avoir été tellement préoccupé par cette tâche supplémentaire, étant donné qu'après avoir programmé une soutenance vers la fin de l'été<sup>8</sup>, il ne s'y est consacré à plein temps qu'après Pâques 1854. En fait, durant l'hiver 1854, il reprend ses recherches sur les relations entre l'électricité, le magnétisme, la lumière et la gravitation<sup>9</sup>, tout en travaillant comme assistant de Weber à l'institut de physique mathématique. Malheureusement, le mauvais temps hivernal et une crise de surmenage le conduisent à la

<sup>6</sup> [Über die Auflösung zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei unbekanntem Grössen], texte absent des *Gesammelte Werke*.

<sup>7</sup> Remmert [131] a reproduit le rapport de Gauss, écrit en calligraphie pré-sütterline, sur la dissertation inaugurale de Riemann de 1851 ; Gauss y appréciait déjà l'« indépendance productive et louable » [*rümliche productive Selbstthätigkeit*] de Riemann.

<sup>8</sup> Au printemps 1853, Gauss se plaignait dans une lettre à Alexander von Humboldt de douleurs à la poitrine et au gosier, d'essoufflements, de palpitations et d'insomnie. Un an plus tard, son état s'était aggravé. Le vendredi 9 juin 1854, il apprend que Riemann a officiellement déposé son texte, et il fixe la conférence au lendemain ([10], pp. 201–202).

<sup>9</sup> Dans sa lettre du 5 février 1854 à son frère Wilhelm (n° 65, [117] p. 109), Riemann exprime clairement quelle est sa direction de recherche principale à cette époque-là : « *Ich hatte gleich nach Ablieferung meiner Habilitationsschrift wieder meine Untersuchungen über den Zusammenhang der Naturgesetze fortgesetzt, und mich so darin vertieft, daß ich nicht davon loskommen konnte.* »

maladie — il était hypocondriaque et il souffrait régulièrement de la fragilité de ses poumons —, ce qui le contraignait à interrompre ses travaux pour se reposer à la campagne. Ayant recouvré la santé, il rédigea donc sa conférence d'épreuve du lundi de Pâque au lundi de Pentecôte, en sept semaines environ<sup>10</sup>.

**1.2. Appréciations d'universalité.** Newman ([122]) qualifie d'« impérissable » ce discours d'habilitation, qui rayonne encore d'une puissance philosophique et mathématique singulière. C'est aussi l'un des très rares exemples d'accession, en mathématique, au statut de classique intemporel<sup>11</sup>.

Dans son essence même, l'*Habilitationsvortrag* de Riemann est en effet un *chef-d'œuvre remarquable d'inachèvement et d'ouverture* ; de par les conséquences multiples qu'elle recèle, elle a eu en effet une influence déterminante quant au destin de branches mathématiques neuves qui devaient être développées ultérieurement, telles que par exemple : les fondements de la géométrie, la topologie, la géométrie différentielle, la géométrie riemannienne ou finslérienne, *etc.*

Toutefois, même si les considérations de Riemann sont apparemment très accessibles à la lecture et semblent avoir été dictées par une langue philosophique universelle et intemporelle, elles renferment nombre d'affirmations énigmatiques ; et comme ces affirmations remarquables ne sont pas justifiées par des démonstrations mathématiques, elles ont aiguisé la sagacité des géomètres pendant des décennies. Sans concession, Sophus Lie commentera les zones de pénombre<sup>12</sup> qui touchent à cette théorie entièrement nouvelle des groupes continus de transformations, théorie que Riemann ne possédait manifestement pas, et dont Lie allait faire l'œuvre monumentale de sa vie. On peut

<sup>10</sup> Le programme de travail de Riemann a certainement connu des alternances complexes que la biographie précieuse [35] de Dedekind (*cf.* aussi [8, 164]) était naturellement dans l'incapacité de reconstituer, puisque dans sa lettre du 5 février 1854 publiée par Neuenschwander ([117], p. 110), Riemann confie à son frère : « *Seit acht Tagen geht es mir nun wieder besser, die Probevorlesung, die ich beim Colloquium halten soll ist halb ausgearbeitet, und Dein Brief und der Gedanke an Dich sollen mir ein Sporn sein, mich durch nichts wieder von dieser Arbeit abbringen zu lassen.* »

<sup>11</sup> En littérature et en philosophie, la fréquentation régulière et l'étude exégétique du corpus classique font partie intégrante de la formation spécialisée ; tel n'est pas le cas en mathématiques.

<sup>12</sup> Le §100 du Chapitre 22 p. 275 ci-dessous offre une analyse du discours d'habilitation de Riemann, et tout particulièrement du § III, 1 p. 265 de [132] qui prétend avoir complètement résolu le problème auquel Helmholtz, et surtout Lie, ont consacré leurs forces de genèse conceptuelle.

s'imaginer néanmoins que Riemann a étayé par des recherches analytiques rigoureuses la plupart des propositions qu'il énonce seulement dans un langage conceptuel, eu égard au devoir qu'il avait vis-à-vis de son auditoire d'user au minimum d'un appareil technique<sup>13</sup>.

Grâce à sa pénétration conceptuelle, ce texte allait donc devenir une source d'inspiration récurrente dans le dernier tiers du 19<sup>ème</sup> siècle — et aussi à la charnière du 20<sup>ème</sup> —, au moment où la clarification et l'approfondissement des concepts fondamentaux s'affirmaient comme l'une des tendances dominantes en mathématiques. Ainsi, faudra-t-il attendre les travaux de Dedekind, Gehring, Clifford, Helmholtz, Christoffel, Lipschitz, Beltrami, Frobenius, Lie, Killing, Engel, Ricci-Curbastro, Levi-Civita, Schouten, É. Cartan et d'autres pour mesurer l'ampleur des développements inattendus que ces idées à peine esquissées contenaient en germe.

**1.3. Assembler l'inachevé.** C'est certainement la citation que Riemann a choisi de mettre en exergue à ses *Fragmente philosophischen Inhalts*<sup>14</sup> qui caractérise le mieux sa propre position dans ses travaux scientifiques<sup>15</sup> :

Ne rejetez pas avec mépris les présents que j'ai rassemblés pour vous avec dévotion avant de les avoir compris. Lucrèce, de Natura Rerum

---

<sup>13</sup> Seules les quatre courtes pages de la seconde et dernière partie de la *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab III<sup>ma</sup> Academia Parisiensi propositae* ([132], pp. 380–383) dévoilent quelques calculs elliptiques en relation avec la définition de la courbure sectionnelle qui apparaît dans l'habilitation. Ce manuscrit de 1861 ne fut pas publié car le prix de l'Académie de Paris proposé en 1858 n'a finalement pas été attribué à Riemann. Depuis les travaux de Lipschitz et de Christoffel, les calculs visionnaires (et cryptiques) de Riemann peuvent être interprétés comme associant aux quantités de courbure sectionnelle introduites par Riemann une certaine forme bilinéaire symétrique sur l'espace des 2-plans infinitésimaux qui est aujourd'hui appelée *tenseur de Riemann-Christoffel* et dont la connaissance recouvre tous les invariants locaux de la métrique ([154]).

<sup>14</sup> — publiés à titre posthume en 1876 dans ses *Gesammelte Mathematische Werke* —

<sup>15</sup> En 1840, Riemann quitte la maison familiale à Quickborn pour entrer au lycée à Hanovre. C'est à ce moment-là que débute sa correspondance régulière avec sa famille. Neueunschwander ([117], p. 90) qui a transcrit des lettres inédites signale que Riemann avait déjà en ce temps-là de la peine à mener ses compositions à bonne fin, parce qu'il rejetait continuellement ce qu'il avait déjà écrit.

Plus de la moitié de l'œuvre fascinante de Riemann est en effet constituée de travaux qu'il jugeait *inaboutis* et qu'il s'est refusé, pour cette raison, à publier<sup>16</sup>. D'un point de vue philosophique, la règle *riemannienne* de direction de l'esprit consiste donc à *rassembler des éléments qui ne sont pas compris*, à *formuler des questions réflexives* les concernant, à *renverser les interrogations spéculatives*, à *désigner les questions non résolues*. Comme Socrate, Riemann exprime qu'il ne sait pas ; cet état de fait qui est impersonnel et universel, le mathématicien doit l'accepter, puisqu'il fait partie intégrante de l'essence même des mathématiques.

Une telle posture générale s'apparente donc plus à une *volonté d'ignorance* qu'au doute systématique de Descartes, à ceci près que la *volonté d'ignorance*, en mathématiques, ne peut pas être une aporétique de principe comme l'est la maïeutique socratique, puisqu'elle doit déboucher à terme sur des propositions rigoureuses, sur des théorèmes, sur des connaissances adéquates. Analyser la *métaphysique des mathématiques* que nous a léguée Riemann, c'est d'une certaine manière entrer dans une *topologie de l'ouverture acceptée* de la pensée.

**1.4. Le mystère des notions primitives de la géométrie.** D'après Clifford ([31], p. 565), « C'est Riemann qui le premier a accompli la tâche d'analyser toutes les hypothèses de la géométrie, et de montrer leur indépendance mutuelle ».

Au commencement de son discours, Riemann annonce en effet que la Géométrie classique d'Euclide admet comme données préalables les concepts de point, de droite, d'espace, ainsi que les notions d'incidence, d'angle et d'intersection. De toutes ces notions, elle ne donne que des définitions nominales, implicites sur le plan logique<sup>17</sup>. En ce qui concerne les représentations mentales, les axiomes qui donnent naissance aux relations démonstratives fondamentales sont toujours soutenus, en filigrane, par un réseau d'intuitions archaïques ; et parce que

<sup>16</sup> Autre exemple dans le domaine de la création littéraire, analysé par Roland Barthes ([7], p. 343) : « Flaubert (1871, 50 ans) : 'Comme si de rien n'était, je prends des notes pour mon *Saint Antoine* [ce sera la troisième version], que je suis bien décidé à ne pas publier quand il sera fini, *ce qui fait que je travaille en toute liberté d'esprit*' [Lettre à Ernest Feydeau, 8 août 1871] ; problème bien énoncé [...]. 'Ne pas publier', sorte de figure mi-rhétorique, mi-magique, utilisée par beaucoup d'écrivains. »

<sup>17</sup> D'après Euclide, un point est ce qui est sans partie ; une ligne est une longueur sans épaisseur ; un angle est l'inclinaison l'une sur l'autre de deux lignes. D'inspiration métaphysique et procédant par prédication *négative*, les deux premières définitions occultent en effet la question de savoir où et comment asseoir ou fonder ces concepts qui doivent par ailleurs rester opératoirement évidents pour tout géomètre.

ces intuitions aisées s'enracinent dans l'expérience physique de la pensée, elles occultent l'interrogation mathématique abstraite, pure et *a priori*. Or d'après Riemann, la position des hypothèses primitives doit par nature être indécidée, elle doit par principe faire question en tant que telle, et donc, elle constituer un thème de recherche nouveau, abstrait, pur et *a priori*.

Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère [*im Dunkeln*]; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même *a priori* si elles peuvent l'être. [133], p. 280.

Dans cette seule phrase qui semble énoncer une constatation inspirée, s'exprime un des traits les plus caractéristiques de la philosophie riemannienne des mathématiques :

l'ouverture,

l'ouverture *dite*, l'ouverture *écrite*, l'ouverture *assumée*, l'ouverture *maintenue*, fussent-elles ombre, obscurité ou même *mystère*, comme Hoüel a si bien choisi de le traduire.

Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la Géométrie, personne, parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère [*Dunkelheit*]. [133], p. 280.

Riemann est le premier, dans l'histoire des mathématiques, à insister explicitement dans ses écrits, sans en passer par la formulation de problèmes ouverts précis, sur la présence constante de l'inachèvement. C'est en cela qu'il est immortel.

**1.5. Fondements de la géométrie.** Riemann connaissait-il les travaux de géométrie non-euclidienne dus à ses contemporains ? Hormis les *Éléments de géométrie* [95] de Legendre, La bibliothèque de l'université de Göttingen possédait une copie d'un travail de Bolyai (cf. [19]), et quelques publications de N.I. Lobatchevskiï, notamment l'essai sur la « géométrie imaginaire » paru au *Journal für die reine und angewandte Mathematik*<sup>18</sup> et son livre-fascicule *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles* (cf. [105]) publié à Berlin en 1840. Riemann pourrait avoir consulté ces sources, et d'après Neuenschwander (cf. aussi [141, 143]), il a effectivement emprunté le volume 17 du *Journal de Crelle* le 15 février 1854.

Toutefois, l'étude du *Nachlass* conduite par Scholz dans [141] montre que Riemann n'était pas réellement intéressé, comme avait pu

<sup>18</sup> — volume 17 (1837), 295–320 —

l'être Gauss, par les fondements de la géométrie élémentaire. Fait surprenant, les archives explorées ne portent aucune indication du fait que Riemann ait pu se constituer une connaissance circonstanciée des travaux de Bolyai et de Lobatchevskiï. En tout cas, dans son discours d'habilitation, il mentionne seulement Legendre, qu'il considère comme « le plus illustre des réformateurs modernes de la géométrie ». Fait tout aussi étonnant, Riemann ne cite pas une seule fois l'axiome des parallèles, même lorsqu'il traite des variétés de courbure constante au sein desquelles l'existence et le comportement des parallèles peuvent être caractérisés de manière extrêmement limpide en fonction du signe de la courbure (constante). En vérité, l'analyse par Scholz [141, 143] du feuillet n° 40 du dossier n° 16 du *Nachlass* montre le peu d'intérêt que Riemann aurait pu trouver à s'engager, dans des recherches de type logique ou fondationnel, en partant des postulats d'Euclide.

Même s'il est intéressant de saisir un tel mode de traitement de la géométrie, une telle entreprise serait extrêmement infructueuse, car de la sorte, on ne trouverait pas de nouveaux théorèmes, et ce qui apparaît simple et clair dans la présentation de l'espace deviendrait de cette manière-là compliqué et difficile. [143], pp. 28–29.

Ainsi Riemann semble-t-il écarter la voix d'axiomatisation *a posteriori* des géométries comme systèmes logiques clos et cohérents, telle qu'elle devait naître dans les années 1880 avec les travaux de Pasch<sup>19</sup>, Stolz, Schur, et ultérieurement de Veronese, Killing, Enriques, Pieri, Padoa, Russell, Hilbert, Poincaré. Mais sur la base d'une analyse de la méthodologie philosophique de Herbart qui a influencé Riemann, on peut néanmoins soutenir (*cf.* ce qui va suivre) que Riemann *anticipe l'organisation structurale et hiérarchique des concepts mathématiques modernes*, et ce, bien avant que naisse la méthode axiomatique hilbertienne proprement dite qui devait conférer un sens métamathématique précis aux concepts de cohérence, de complétude, d'indépendance, de suffisance, de nécessité, de spécialisation et de catégoricité.

<sup>19</sup> Freudenthal ([52], p. 617) souligne que Pasch dans ses [*Vorlesungen über neuere Geometrie*] (1882) anticipe très largement le point de vue formaliste pur dont Hilbert s'était fait l'ardent défenseur dans ses *Grundlagen der Geometrie* (1899) : « À chaque fois », écrit en effet Pasch, « que la géométrie doit être réellement déductive, le procédé d'inférence doit être indépendant aussi bien de la signification des notions géométriques que des figures. Les seules choses qui comptent sont les *relations* entre les notions géométriques, telles qu'elles sont établies dans les théorèmes et utilisées dans les définitions ».



**1.6. Le renversement riemannien.** Riemann était principalement intéressé par des questions d'un type nouveau, et qui font mystère en elles-mêmes et par elles-mêmes ; en acceptant d'explorer ces questions, il est possible de faire jouer aux racines de la connaissance mathématique le rôle de branches nouvelles en devenir. Renverser les questions d'essence et de conceptualisation, c'est un acte métaphysique par excellence. Sur le plan de la théorie de la connaissance, Riemann rejoint donc l'exigence critique de la philosophie qui a marqué son temps.

En effet, Kant caractérisait de manière imagée sa « solution transcendantale » au problème général de la raison pure comme un *renversement copernicien*<sup>20</sup> : le fait qu'il existe, en physique et en mathématiques, des connaissances synthétiques *a priori* — fait incontestable dont la philosophie (qui s'en étonne spontanément) se doit de rendre compte — peut trouver toute son intelligibilité, d'après Kant, si l'on fait l'hypothèse (révolutionnaire en philosophie) que *les objets se règlent sur notre connaissance*, et que ces objets sur lesquels se règle notre connaissance sont à distinguer rigoureusement des choses telles qu'elles sont en elles-mêmes et auxquelles notre entendement limité ne peut pas prétendre avoir accès. Ainsi, autant une connaissance *synthétique et a priori* des choses en elles-mêmes exposerait à d'in vraisemblables obscurités et à une anarchie sans fin de contradictions<sup>21</sup>, autant une connaissance synthétique *a priori* des objets d'expérience, en tant que ces objets trouvent leur source dans notre sensibilité, dans notre intuition, et dans notre entendement, permet d'établir un vrai rapport de structuration et de fonder ainsi sans conteste la *part d'apriorité* de la connaissance.

<sup>20</sup> L'astronome polonais Nicolas Copernic (1473–1543) proposa de substituer au géocentrisme l'héliocentrisme (*voir* [159] pour une étude philosophique). « Il en est précisé ici », écrit Kant ([82], p. 19) dans sa seconde Préface à la *Critique de la Raison pure* afin de caractériser son hypothèse fondamentale par une analogie imagée, « comme de la première idée de Copernic ; voyant qu'il ne pouvait pas réussir à expliquer les mouvements du ciel en admettant que toute l'armée des étoiles évoluait autour du spectateur, il chercha s'il n'aurait pas plus de succès en faisant tourner l'observateur lui-même autour des astres immobiles. Or en Métaphysique, on peut faire un pareil essai, pour ce qui est de l'intuition des objets, Si l'intuition devait se régler sur la nature des objets, je ne vois pas comment on en pourrait connaître quelque chose *a priori* ; si l'objet, au contraire (en tant qu'objet [Object] des sens), se règle sur la nature de notre pouvoir d'intuition, je puis me représenter à merveille cette possibilité. »

<sup>21</sup> « Le terrain [*Kampfplatz*] où se livrent ces combats sans fin se nomme la *Métaphysique* » ([82], p. 5).

Pour Kant, l'intuition ne se règle donc pas sur la nature de l'objet, mais c'est l'objet, en tant qu'objet des sens, qui se *règle* sur la nature de notre pouvoir d'intuition, ou plus exactement, qui se dévoile dans et par ce que nous en explorons, dans et par ce que nous en disons, et ainsi, avec le pouvoir de préformation qui nous appartient en propre, il doit en aller de même et de manière absolument générale quant aux *concepts* par lesquels l'entendement élabore les déterminations de la connaissance<sup>22</sup> (cf. [82], p 19). « Nous ne connaissons *a priori* des choses que ce que nous y mettons nous-mêmes » : c'est l'hypothèse fondamentale (risquée) du système que Kant a érigé afin de délimiter avec exactitude la portée des raisonnements métaphysiques qui dépassent les limites de toute expérience.

Ainsi d'après Kant, l'entendement ne doit pas seulement être défini comme le pouvoir d'élaborer des règles empiriques, en raisonnant par induction, en comparant, et en extrapolant, mais surtout, à un niveau véritablement transcendantal, comme le *pouvoir structurel de prescrire en quelque sorte ses propres règles à la nature*, au sens où les objets d'expérience sont nécessairement conformes aux conditions *a priori* dans lesquelles ils peuvent être perçus et pensés — autrement dit : les formes de la sensibilité et les contraintes logiques du raisonnement préforment en quelque sorte toutes les connaissances qui sont synthétiques *a priori*.

En quoi consiste alors, chez Riemann, le renversement philosophique par rapport à la tradition mathématique qui le précède ? Certainement pas dans l'élaboration d'une théorie générale de la connaissance qui serait destinée à expliquer les antinomies de la raison, les apparences transcendantales, et les paralogismes des preuves métaphysiques. Les mathématiques ont rarement besoin qu'on leur apprenne à corriger leurs raisonnements. Toutefois, dans la trajectoire philosophique de Riemann, on trouve une analogie de fond avec la solution kantienne au problème de la métaphysique<sup>23</sup>.

<sup>22</sup> Postérité remarquable de cette thèse kantienne au sujet de notre pratique de l'algèbre : bien que les idéalités algébriques (groupe de Galois ; structure d'une algèbre de Lie ; diagramme de Dynkin ; groupe fini produit par générateurs et relations ; syzygies entre invariants algébriques) possèdent un réseau *non spatialisé* et *non temporalisé* de relations complexes, notre compréhension de ces relations et les démonstrations que nous élaborons pour les *parcourir* sont inévitablement *linéaires* et *successives*. L'entendement préformant (et déformant) n'approche le multiple algébrique que par actions discrètes.

<sup>23</sup> On ne méditera jamais assez les toutes premières lignes de la *Critique de la raison pure* ([82], p. 5) : « La raison humaine a cette destinée singulière, dans un genre de ses connaissances, d'être accablée de questions qu'elle ne saurait éviter, car

Chez Riemann en effet, du point de vue de la théorie de la connaissance en général, le renversement consiste principalement dans la désignation — implicite, non théorisée et d'ordre méta-mathématique — de *caractères universels du questionnement mathématique* ; presque *a priori*, ces caractères s'intègrent aux structures fondamentales de la pensée mathématique, mais ils ne la préforment pas, ils ne la prédéfinissent pas, et ils ne la gouvernent pas. C'est que Riemann, dont l'humilité est légendaire, fait spontanément preuve d'une extrême prudence quant à l'énonciation de toute thèse métaphysique directrice. Ainsi est-il naturellement préservé de tout engagement dogmatique ou de toute tentation de *fermer* un ordre de questions. Jamais en effet il n'affirmerait avoir résolu de manière entièrement satisfaisante un problème mathématique donné. Son œuvre n'est pas seulement riche d'invention conceptuelle, mais elle est aussi — et c'est en cela que réside sa force philosophique majeure — confondante d'*inachèvement volontaire*. Kant soutenait, lui, que grâce à l'élaboration de cette « science particulière » qu'il appelait la *critique de la raison pure*, il avait pu résoudre les questions en les dissolvant lorsqu'elles s'avéraient être non résolubles<sup>24</sup>. Affirmer avoir résolu une question difficile, même au moyen d'un grand système de pensée, c'est un risque que Riemann ne prend pas.

Conséquence limpide : la seule certitude qu'une « métaphysique riemannienne » proprement universelle pourrait affirmer, c'est qu'il faut *maintenir ouvertes les questions inaugurales tout au long de leur destin*. Pour un mathématicien comme Riemann, il faut donc élaborer un suivi spéculatif constant des problèmes à travers leur histoire, et donc par la même occasion, il faut méditer la continuité des incertitudes qui s'expriment, se développent, et se complexifient. Comme pourrait le soutenir Heidegger, il s'agit de ne jamais *oublier* la question initiale dans toutes les questions qui lui sont subordonnées. Une telle thèse est un universel philosophique qui s'exprime aussi *dans* les mathématiques.

---

elles lui sont imposées par sa nature même, mais auxquelles elle ne peut répondre, parce qu'elles dépassent totalement le pouvoir de la raison humaine». Ici, dans le parallélisme dialectique entre Kant et Riemann, se dessine alors la question extrêmement délicate de la *démarcation* entre les mathématiques et la métaphysique, en tant que l'une et l'autre ont le même rapport à un champ de questions spontanées (et « accablantes »), sans pour autant emprunter la même voie quant aux réponses qu'elles sont susceptibles d'élaborer.

<sup>24</sup> « Après avoir découvert le point du malentendu de la raison avec elle-même, je les [ces questions] ai résolues à son entière satisfaction. [...] Et je n'ose dire qu'il ne doit pas y avoir un seul problème métaphysique qui ne soit ici résolu. » ([82]).

Il s'agit ainsi, pour la saine philosophie riemannienne qui s'exerce toujours dans les mathématiques contemporaines, d'examiner régulièrement dans quelle mesure les travaux qui paraissent d'année en année apportent, ou n'apportent pas une réponse partielle, une réponse satisfaisante, une réponse complète, voire même une réponse définitive<sup>25</sup>. Le traitement du *problème de Riemann* par Helmholtz et par Lie avec la théorie des groupes continus de transformations (*cf.* ce qui va suivre), puis par Kolmogorov, Busemann et par Freudenthal avec les concepts de la topologie générale, montre qu'une question initiale peut se métamorphoser, se ramifier et se diversifier en s'approfondissant. Dans une telle optique, si dogmatisme doctrinaire il peut y avoir, c'est un *dogmatisme de l'attente et de l'imprévisibilité*. La position *philosophique* de Riemann, non exprimée par lui comme système et intrinsèquement en adéquation avec le caractère fondamentalement imprévisible et ouvert de l'*irréversible-synthétique* (*cf.* [108]) en mathématiques, ne peut être entachée par une décision ontologique unilatérale, que ce soit un réalisme, un idéalisme, un transcendentalisme, un empirisme, un relativisme, ou un scepticisme. Presque par pétition de principe, certains problèmes acquièrent donc une ouverture dialectique indéfinie qui les rend inépuisables. À tout le moins, très peu de questions mathématiques peuvent être considérées comme complètement résolues : là est toute la teneur du *renversement riemannien*.

---

<sup>25</sup> En arrière-plan de ces considérations se profile donc un problème particulièrement délicat pour la philosophie des mathématiques, à savoir : quand, pourquoi, comment et à quelles conditions peut-on déclarer qu'une question mathématique a été complètement résolue par un théorème, ou par une théorie ? Étant donné le renouveau des problèmes d'effectivité en algèbre que suscite la maturité grandissante des calculateurs électroniques, la théorie de Galois fournit un exemple intéressant d'« illusion d'aboutissement par l'abstraction non calculatoire », puisque dans la pratique, la détermination du groupe de Galois sur  $\mathbb{Q}$  d'un polynôme à coefficients entiers n'est en rien résolue par la correspondance biunivoque (et presque tautologique) entre tous les sous-groupes du groupe de Galois d'une extension finie normale, et tous les sous-corps de cette extension qui contiennent  $\mathbb{Q}$  ([44]; voir le mémoire de synthèse [167] et sa bibliographie pour les résultats les plus récents de la théorie de Galois algorithmique). Le quantificateur universel “tout” cache ici des ordres de question nombreux, notamment le problème de *classifier a priori* tous les groupes finis qui peuvent se réaliser comme groupes de Galois, qui est essentiellement le *problème principal sur lequel débouche la correspondance de Galois*. Signalons seulement que Jordan traitera de la classification des sous-groupes du groupe des permutations de  $n \geq 1$  lettres, et que Lie prendra aussi à bras-le-corps le problème de *classifier* les groupes continus (finis ou infinis) de transformations.

Voilà donc pour le niveau absolument général de la philosophie riemannienne des mathématiques.

**1.7. Décider l'ouverture problématique du conceptuel.** Quant aux concepts fondamentaux de la géométrie, Riemann va opérer dans son habilitation une *deuxième révolution de pensée* par spécification de nouvelles arborescences mathématiques potentielles.

Aux structures prédéfinies de l'intuition et de l'entendement qui exigeaient chez Kant l'élaboration d'une esthétique transcendantale et d'une théorie de l'expérience synthétique, se substitue en effet chez Riemann l'affirmation méthodologique (implicite) qu'il existe des caractères *a priori*, constants et reproductibles de l'interrogation mathématique, et que ces caractères recouvrent trois grands domaines inépuisables d'investigation en agissant comme principes de genèse pour les mathématiques tout entières :

- la question de l'être et de la nature des objets mathématiques ;
- la question des liens de dépendance que ces êtres mathématiques purement problématiques entretiennent entre eux ;
- la question, d'inspiration proprement kantienne, pour les intuitions mathématiques comme pour les conceptions mathématiques, de leurs conditions de possibilité.

Absolument universelles, ces questions générales concernent toutes les mathématiques. Ainsi donc, il ne s'agit pas pour Riemann, au début de son discours d'habilitation, de mieux définir et de mieux fonder les notions euclidiennes primitives de point, de droite, ou de plan, mais il s'agit plutôt de s'interroger sur ce qu'est et sur ce que peut être l'espace, et donc par voie de conséquence, sur les *conditions mêmes de possibilité*, de diversité et de connexion pour les *conceptualisations* éventuelles de la notion problématique d'« espace ». Ceci, par excellence, c'est de la philosophie, et une telle philosophie est appelée à se réaliser *dans et par* les mathématiques.

La raison [de ce mystère] est que le concept général des grandeurs de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues, n'a jamais été l'objet d'aucune étude. En conséquence, je me suis proposé d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur [*aus allgemeinen Größenbegriffen*], le concept d'une grandeur de dimensions multiples [*Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse*].

[133], pp. 280–281.

**1.8. Nécessité, suffisance, bifurcation.** Renversement riemannien, donc, de la théorie des sciences mathématiques : les concepts ne sont

pas donnés dans l'expérience du monde sensible, ils ne sont pas produits par une intuition *sui generis*, et ils ne sont pas d'emblée présentés dans une évidence définitionnelle<sup>26</sup>. Au contraire, les concepts portent de manière permanente les marques de leur propre problématique ; ils sont donc à *construire*, et ils sont aussi à cause de cela *ouverts*.

Dans le § I où il introduit la notion, maintenant si fondamentale en géométrie différentielle, de *multiplicité*<sup>27</sup> [*Mannigfaltigkeit*]<sup>28</sup>, Riemann procède comme il l'a déjà fait dans sa *Dissertation inaugurale* et dans son mémoire sur les séries trigonométriques : à chaque étape d'une conceptualisation problématique, il recherche à la fois les conditions qui sont *nécessaires*, et les conditions qui sont *suffisantes* à la genèse du concept ou des concepts visés. Les premières lignes du § 1 en témoignent :

Les concepts de grandeur [*Grössenbegriffe*] ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination [*verschiedene Bestimmungsweisen*]. [133], p. 282.

Condition nécessaire, donc : « n'être possible que si ... ». Avant de penser aux concepts de grandeur en question, il faut disposer d'un concept préalable par lequel ces grandeurs pourraient être déterminées, et il faut se donner les moyens de *comparer* ces déterminations entre elles. Dans la donation, qui est nécessaire, l'Un est précédé par le Multiple, qui est lui aussi nécessaire.

Seconde constatation, frappante de lucidité philosophique : comme s'il respectait rigoureusement les antinomies entre le discret et le continu qui ont préoccupé la philosophie grecque (*cf.* notamment la discussion par Aristote des paradoxes de Zénon dans la *Physique* III), Riemann enracine d'emblée sa réflexion dans la *bifurcation philosophique incontournable* entre le discret et le continu.

<sup>26</sup> Lire et méditer Riemann permet de se départir d'une certaine « naïveté réaliste » quant à l'« évidence » de l'acte de pensée que représente le fait de poser, ou de rappeler la définition d'un objet mathématique, par exemple, dans un article de recherche ou lors d'une conférence.

<sup>27</sup> Vuillemin [168] et Chorlay [30] suggèrent de ne pas traduire le terme « *Mannigfaltigkeit* » introduit par Riemann par « variété », mais par « multiplicité ».

<sup>28</sup> Pour une analyse historique du concept de « variété », qui débouchera ultérieurement avec les travaux de Weyl, Cartan, Veblen et Whitehead sur la définition contemporaine en termes de cartes et d'atlas maximal, nous renvoyons aux études [140, 141, 46, 18, 16, 17, 93, 30].

Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une multiplicité [*Mannigfaltigkeit*]<sup>29</sup> continue ou une multiplicité discrète ; chacun en particulier de ces modes de détermination s'appelle, dans le premier cas, un point, dans le second un élément de cette multiplicité. [133], p. 282.

Mais avant de poursuivre cette analyse philosophique ciblée du discours de Riemann (*voir* p. 27 ci-dessous), un détour par une théorie générale de la connaissance qui l'a marqué s'impose.

**1.9. L'influence épistémologique de Herbart<sup>30</sup> sur Riemann.** En 1809, après des études en droit, philosophie, littérature et mathématiques à Iéna, un doctorat puis une habilitation à Göttingen dans lesquels il élabore les fondations de son système, le philosophe allemand Herbart (1776–1841) succède à Kant sur la chaire de philosophie de l'Université de Königsberg. Il crée un séminaire sur la pédagogie qu'il associe à une école pratique expérimentale, et il participe aux réformes de l'éducation en Prusse. En 1834, il obtient la chaire de philosophie à l'Université de Göttingen où il enseigne la philosophie et la pédagogie jusqu'à sa mort en 1841. Ses vues sont alors largement diffusées en Allemagne, et c'est par la lecture que Riemann entre en contact avec sa métaphysique.

Le dossier n° 18 du *Nachlass* de Riemann, conservé à la bibliothèque de l'Université de Göttingen, comporte 203 feuillets manuscrits regroupés sous le titre de « *Fragmente naturphilosophischen Inhalts* ». Ceux de ces fragments dont se dégage une certaine cohérence de pensée ont été édités par Dedekind et Weber à la fin des œuvres complètes [132]<sup>31</sup>. D'après Scholz [142] qui a sollicité l'aide de l'*Handschriftenabteilung der Göttinger Universitätsbibliothek*, 12 feuillets contiennent des notes de lecture consacrées à Herbart, que Riemann enrichit parfois de ses propres formulations. Les extraits sont

<sup>29</sup> *Varietas*, cf. le mémoire de Gauss : *Theoria residuorum biquadratorum*, et *Anzeige zu derselben*, Werke, Bd. II, pp. 110, 116 u. 118. Dans ses leçons de 1850–51 sur la méthode des moindres carrés, Gauss émettait des remarques occasionnelles sur l'extension de sa théorie des surfaces à la dimension  $n$  quelconque. Les notes calligraphiées de ce cours furent prises par A. Ritter qui soutint sa thèse en 1853 sous la direction de Gauss. D'après Stäckel ([155], p. 55), A. Ritter était ami proche de Riemann dans les années 1850 à 1853, et c'est probablement par son intermédiaire que Riemann est entré en contact avec les idées de Gauss sur la géométrie ([90], p. 114).

<sup>30</sup> Le lecteur est renvoyé à l'étude [142] de Scholz pour de plus amples informations.

<sup>31</sup> *Voir* [130] pour une traduction partielle en français.

tous tirés des travaux de Herbart sur la métaphysique et sur la psychologie.

L'auteur [Riemann lui-même] se considère comme herbartien en psychologie et en épistémologie (méthodologie et éidologie<sup>32</sup>) ; toutefois dans la plupart des cas, il ne peut s'accorder avec la philosophie naturelle de Herbart, et avec les disciplines métaphysiques (ontologie et synéologie) qui s'y réfèrent. [133], p. 508.

Bien que la notion de *présentations sérielles* [*Vorstellungsreihen*]<sup>33</sup> due à Herbart ait certainement pu inspirer Riemann dans son élaboration du concept de « multiplicité », la *synéologie*<sup>34</sup> ne l'a en fait pas réellement convaincu, comme l'a clairement démontré Scholz [142]. Il ressort de cette étude que Herbart a beaucoup plus influencé Riemann quant à sa méthodologie de recherche et à sa compréhension des aspects problématiques de la conceptualisation mathématique, que pour ce qui concerne l'élaboration d'une pensée spécifique de l'espace.

En premier lieu, Riemann était vraisemblablement en accord avec la réfutation par Herbart de la théorie kantienne<sup>35</sup>, de l'espace et du temps : l'idée de l'espace et du temps comme « récipients vides »

<sup>32</sup> D'après Herbart, la métaphysique englobe quatre disciplines : la méthodologie, l'éidologie [*Eidologie*], l'ontologie et la synéologie [*Syneologie*].

<sup>33</sup> Herbart considérait que les concepts géométriques tels qu'ils sont formés et développés par les sciences trouvent leur origine dans les représentations spatiales qui donnent accès à l'expérience du monde sensible, et qui sont intrinsèquement *sérielles*. En effet, toutes les formes de perception humaine de l'espace s'effectuent *en séries*, c'est-à-dire de manière successive et temporalisée, dans une continuité de discontinuités coprésentes, et elle s'exerce de manière locale, car elle se restreint à des voisinages immédiats de l'action individuelle. Aussi les *séries de présentation* [*Vorstellungsreihen*] s'ordonnent-elles et se connectent-elles l'une à l'autre pour engendrer des représentations spatiales. Une « forme sérielle continue » se présente lorsqu'une classe spécifique de représentations est soumise à une fusion graduelle et unifiée.

<sup>34</sup> À partir de la théorie psychologique des formes sérielles de représentations (cf. la note précédente), l'engendrement de *formes sérielles continues* [*continuirliche Reihenformen*] de concepts constitue, selon une procédure théorique très élaborée, l'objectif de la discipline métaphysique que Herbart appelle la *synéologie*, et qui désigne essentiellement sa théorie philosophique des fondements du concept d'espace.

<sup>35</sup> D'après l'*Esthétique transcendantale* de Kant ([82], pp. 70–72), l'existence des jugements synthétiques *a priori* — notamment en géométrie, mais aussi en arithmétique et en analyse — interdit que l'on voie dans l'espace et le temps des conditions de possibilité des choses mêmes. Quand il s'agit par exemple de tirer du concept de trois lignes droites la figure d'un triangle, se donner des objets dans l'intuition est une condition nécessaire et *sine qua non*. Autrement dit, pour que les démonstrations synthétiques *a priori* de la géométrie soient possibles, il faut disposer d'un pouvoir



dans lesquels nos sens seraient censés déverser leurs perceptions était critiquée par Herbart comme une hypothèse « complètement superficielle, vide de sens, et inappropriée » [*völlig gehaltlose, nichtssagende, unpassende*] ([142], p. 422). Aussi Riemann (à la suite de Herbart) considérait-il peut-être que la question serait « résolue » au sein d'une plus ample réflexion, grâce à des considérations nouvelles qui montreraient l'ouverture d'une « béance problématique » beaucoup plus considérable que ne l'avait soupçonné Kant.

**1.10. Le réalisme dialectique modéré de Herbart.** Herbart distingue autant que possible « le donné » — c'est-à-dire les phénomènes, les sensations et les perceptions — du « réel » [*das Reale*] qui constitue l'objectif principal de la connaissance philosophique et scientifique. Le savoir doit être structuré en fonction des *connexions conceptuelles possibles* entre les phénomènes. Tandis que l'expérience nous montre des propriétés et des faisceaux [*Complexionen*] de propriétés, le mouvement de la pensée, gouverné par les principes de la méthodologie conceptuelle (*cf.* ce qui va suivre), s'effectue par un arc d'embrassement, d'intégration et de structuration de la réalité. Par contraste avec Platon, Spinoza, ou encore Schelling, Herbart considérait donc qu'il existe des relations d'homologie précises entre les phénomènes et le réel, et que le savoir doit procéder de l'expérience donnée vers une explication pensée des phénomènes, *via* des clarifications conceptuelles adéquates.

Riemann a été marqué par la proposition de Herbart de développer les mathématiques « philosophiquement » comme une science pure des concepts ; une telle proposition s'accordait en fait avec la tendance philosophique de ses contemporains à élaborer des théories systématiques de la connaissance. Formé dans la tradition de Kant et de Fichte, Herbart admettait que l'objectif de la philosophie et de la science est de faire avancer la connaissance en raffinant et en approfondissant le champ de l'expérience.

Pour cette raison, Herbart attribuait un rôle essentiellement auxiliaire à la philosophie par rapport aux sciences, sans pour autant assigner de démarcation nette entre ces deux domaines d'investigation. L'un de ses buts principaux était d'établir une *methodologie dialectique modérée* qui incorpore la contradiction comme moyen transitoire pour l'éluclidation de connexions entre concepts. Toutefois, s'écartant de Hegel, Herbart n'érigait pas la contradiction (et son relèvement, l'*Aufhebung*

---

d'intuition *a priori*. Kant en déduit qu'il est « indubitablement certain » « que l'espace et le temps, en tant que conditions nécessaires de toute expérience (extérieure ou intérieure), ne sont que des conditions simplement subjectives de notre intuition ».

hégélienne) au rang de mouvement universel de la pensée dans sa totalité propre.

En résumé, deux aspects de la philosophie de Herbart montrent une affinité avec les sciences physiques et mathématiques plus marquée que chez les idéalistes allemands de son temps (Hegel, Fichte, Schelling) :

- l'assignation d'un rôle essentiellement auxiliaire à la philosophie par rapport à l'exploration scientifique du réel ;
- l'élaboration d'un réalisme dialectique modéré, en opposition avec l'idéalisme strictement dialectique.

En quoi Riemann alors a-t-il été *influencé* par Herbart<sup>36</sup> ? Les conceptions philosophiques de Herbart sur les sciences ont été lues et assimilées par Riemann à un niveau très général, mais en ce qui concerne la théorie de la connaissance, des divergences de vue existent, comme le montre une analyse fine des *Fragmente philosophischen Inhalts* ([142]). Par exemple, en considérant le développement historique de la connaissance mathématique (toujours structurée en systèmes cohérents exempts de contradiction), Riemann ne pouvait pas s'accorder complètement avec Herbart, pour qui le changement historique des concepts — et notamment dans l'ontologie qui fondait son réalisme modéré — s'articule tout au long d'une chaîne d'erreurs successivement corrigées<sup>37</sup>. En contrepoint et parce qu'il était mathématicien, Riemann déclarait que les relations d'un savoir nouvellement créé au sujet d'un domaine de la réalité par rapport à un savoir ancien dans le même domaine ne consistait pas nécessairement en un lien de correction et de falsification, mais en un travail de *modification* et de raffinement des structures conceptuelles<sup>38</sup>.

<sup>36</sup> Dedekind ([132], p. 545) décrivait comme suit la période où Riemann commençait ses travaux de recherche à Göttingen en 1849 : « Les premiers germes de ses idées en philosophie des sciences ont dû se développer à cette époque, simultanément à ses occupations dans les études philosophiques, largement orientées vers Herbart » [*In dieser Zeit müssen bei gleichzeitiger Beschäftigung mit philosophischen Studien, welche sich natmentlich auf Herbart richteten, die ersten Keime seiner naturphilosophischen Ideen sich entwickelt haben*].

<sup>37</sup> Si ma théorie [de la substance, de l'ontologie] n'est pas correcte, dit Herbart, alors elle confirme mon affirmation présente, que les concepts sont un travail encore inachevé.

<sup>38</sup> « Die Begriffssysteme, welche ihnen [Naturerkenntnissen] jetzt zu Grunde liegen, sind durch allmähliche Umwandlung älterer Begriffssysteme entstanden, und die Gründe, welche zu neuen Erklärungsweisen trieben, lassen sich stets auf Widersprüche oder Unwahrscheinlichkeiten, die sich in den älteren Erklärungsweisen herausstellten, zurückführen. » ([132], p. 489).

Ainsi d'une manière générale, c'est principalement sur le plan de la *méthodologie de la genèse des concepts* que Riemann a été marqué par les réflexions de Herbart. Un fragment philosophique permet de se faire une première idée des principes que Riemann a retenus.

Si quelque chose a lieu qui n'était pas attendu selon nos suppositions préalables, c'est-à-dire qui est impossible ou improbable selon ces dernières, alors il faut effectuer un travail pour compléter [les concepts] ou, si nécessaire, retravailler les axiomes afin que ce qui est perçu cesse d'être impossible ou improbable. Le complément ou l'amélioration du système conceptuel forme l'« explication » de la perception inattendue. [130], pp. 20–21.

Quant à la manière de conduire et d'organiser la recherche philosophique ou scientifique, deux méthodologies importantes ont été introduites par Herbart :

- 1) la méthode des relations [*Die Methode der Beziehungen*], et
- 2) la méthode de la spéculation.

Riemann en extrait une troisième méthode, qu'il développera de manière systématique :

- 3) la méthode des plus petits changements conceptuels.

**1.11. La méthode des relations.** Aussi bien dans l'expérience donnée que dans l'analyse des concepts déjà acquis, la contradiction constitue d'après Herbart la force motrice principale pour adapter, modifier, transformer, définir et créer de nouveaux concepts. Par un travail intellectuel adéquat, toute contradiction observée — tant dans un système conceptuel donné qu'entre la théorie et l'expérience — doit être résolue afin de faire progresser la connaissance : c'est la *méthode des relations* (dialectiques), inspirée lointainement de la pensée hégélienne. Tout progrès s'effectue alors par une *transition* à partir d'une raison [*Grund*], d'une cause, d'un motif, d'un fond, vers une certaine conclusion qui se situe dans une relation d'opposition et d'éclaircissement avec la raison « contredisante »<sup>39</sup>. De fait, la résorption des contradictions débouche sur des connaissances nouvelles, car la raison [*Grund*], en tant que contradiction effective et actualisante, ouvre sur des systèmes constitués de savoir potentiel auxquels elle n'appartient ni de manière préalable, ni de manière explicite. Suivant l'aphorisme (d'inspiration hégélienne)

<sup>39</sup> « Offenbar fordern wir von dem Grunde, daß, *indem er die Folge erzeugt*, er selbst sich *ändert*. Seine Materie soll sich verwandeln in die neue Materie der Folge. Hier kann nicht Wahrheit an Wahrheit geknüpft werden, sondern, damit die Folge Wahrheit enthalte, muß der Grund das Gegenteil davon sein. ([142], p. 438.)

de Herbart : « la raison est contradiction », car pour la pensée, la causalité réelle de l'essence des concepts se révèle dans, et seulement par le parcours des obstacles fondamentaux<sup>40</sup>.

À un niveau épistémologique supérieur, Herbart envisageait des situations contextuelles complexes qui donnent naissance à des contradictions *ouvertes*, et donc à une méthodologie ouverte pour l'exploration de relations ouvertes. Pour que la connaissance progresse, la procédure méthodologique générale consiste alors à résoudre les contradictions en élargissant le système conceptuel initial, de manière à mieux prendre en compte la situation contextuelle considérée. La notion même de *relation*, dans la « méthode des relations », manifeste donc la problématique réelle du *rapport* aux contradictions que les systèmes rencontrent. La relation, en tant que multiple exposé à l'inattendu, demande, pour faire face à cet éclatement, la mise au point de méthodes d'investigation. Eu égard à son intérêt pour l'éducation des esprits, l'une des questions principales de Herbart était en effet :

*Comment procéder dans la recherche, en philosophie ou en science ?*

Question aujourd'hui occultée, tue, bien qu'essentielle et incontournable.

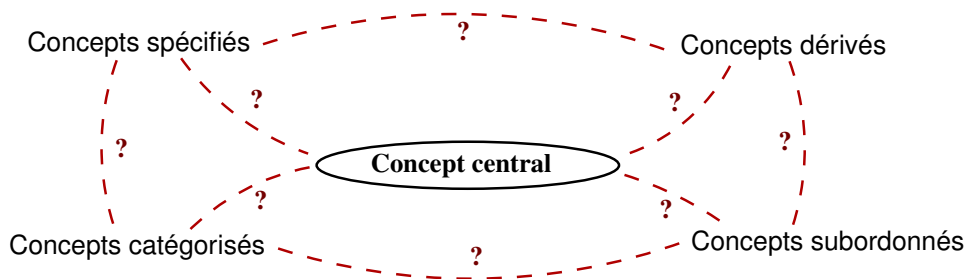
**1.12. La méthode de la spéculation et les graphes de concepts.** En approfondissant la méthode des relations, Herbart a dégagé l'idée générale d'*élaboration de l'unité dans la diversité* et il a proposé à cet effet que dans chaque domaine d'investigation scientifique soit mis au point un *concept central* [*Hauptbegriff*]<sup>41</sup> autour duquel s'organisent et se reflètent les concepts dérivés, subordonnés, spécifiés, ou catégorisés<sup>42</sup>. La tâche de la philosophie est alors d'analyser les *relations* entre ces concepts variés et d'examiner leurs caractéristiques intrinsèques. De Herbart, Riemann a vraisemblablement adopté l'idée que les liens potentiels entre une multiplicité virtuelle de concepts satellitaires *font et doivent faire question*, d'où les points d'interrogation dans notre

<sup>40</sup> Darum sagen wir : *der Grund ist ein Widerspruch*. Die Schärfe dieser Behauptung abstumpfen, heißt, dem Grunde seine Kraft benehmen. » ([142], p. 438.)

<sup>41</sup> Bien entendu, dans le discours d'habilitation de Riemann, le concept central concerné n'est autre que celui de *multiplicité* [*Mannigfaltigkeit*].

<sup>42</sup> Alors que les sciences développent seulement des concepts centraux reliés à leur domaine spécifique, la philosophie, lorsqu'elle est entendue comme étude des sciences, se doit de former des concepts unificateurs qui transcendent les contextes spécifiques.

diagramme ci-dessous, que nous appellerons *graphe problématique de concepts*<sup>43</sup>.



Hiérarchies, dérivations, liens logiques, tout interroge dans un tel graphe, tout est à explorer et donc, tout est à construire. Pour Herbart, ces objectifs d'élucidation sont la matière même de la philosophie comme savoir particulier [*Philosophie als eigene Wissenschaft*]. Certes, Herbart considérait que la différence essentielle entre la philosophie et les sciences consiste en ce que seules ces dernières ont directement affaire au « donné », mais d'après lui néanmoins, les mathématiques ont une place privilégiée aux côtés de la philosophie, en tant que toutes deux sont concernées par la création d'une science de la quantité<sup>44</sup> [*Grössenlehre*].

En tout cas, pour ce qui concerne l'élaboration des systèmes, le but ultime est la représentation du « réel »<sup>45</sup> en son architecture propre, et pour Herbart, la genèse des concepts s'effectue spécialement grâce à ce qu'il désigne comme la *méthode de la spéculation*. Par là, il faut entendre « toute entreprise visant à tracer des *transitions* entre (des) concepts ». Et lorsque Riemann prend des notes au sujet du traité de

<sup>43</sup> Un tel graphe n'a aucune raison d'être hiérarchisé en branches linéaires, ni même d'être représentable dans un espace à deux ou à trois dimensions.

<sup>44</sup> D'après Herbart, lorsqu'elles sont traitées de manière philosophique, les mathématiques s'intègrent dans la philosophie en général, et au début de son *Étude philosophique des sciences* ([77]), il suggère que le mathématicien ressent le besoin professionnel de dévoiler l'*esprit* de ses formules pleines d'esprit [*Der Mathematiker fühlt den Beruf, uns den Geist seiner geistreichen Formeln zu enthüllen*]. Scholz ([142], p. 426) ajoute qu'il serait difficile d'imaginer une meilleure caractérisation de la manière dont Riemann fait des mathématiques.

<sup>45</sup> L'ontologie de Herbart postulait le « réel » comme libre de contradictions et de changements.

Herbart *Sur les études philosophiques*, il résume en quelques phrases-clé (feuillet n° 177 du dossier 18)<sup>46</sup> les idées principales qu'il retient au sujet de cette « méthode de la spéculation » :

Philosophie = recherche de concepts.

I. Vues philosophiques.

II. Spéculation = tendance [*Streben*] vers la résolution de problème.

Démonstration d'une connexion nécessaire entre concepts :

problème de spéculation ultérieure, comme effort [*Bemühung*] pour tracer des transitions adéquates entre les concepts. [142], p. 425.

Ainsi la *méthode de la spéculation* désigne-t-elle tout effort, application ou travail visant à construire des *transitions appropriées* entre les concepts, aussi bien entre ceux qui sont acquis et connus, qu'entre ceux qui sont encore à inventer ou inconnus. Chaque concept-nodal est impliqué dans une relation problématique avec les concepts de son voisinage immédiat : c'est le sens des points d'interrogation qui sont inscrits à titre symbolique dans le diagramme abstrait ci-dessus. Le gain en adéquation augmente lorsque les flèches du graphe de transition qui se rapportent à un concept-nodal sont elles-mêmes construites en adéquation.

*la recherche de l'adéquation porte aussi sur le relationnel.*

Et l'exploration des « arêtes relationnelles » du graphe conceptuel problématique fait parfois naître de nouveaux « nodules conceptuels » au sein même des transitions qui soulèvent des questions. La métaphore allusive d'un « réseau de neurones » du conceptuel pourrait éclaircir encore un peu plus cette mystérieuse *méthode des relations*.

Qu'il s'agisse ici de *transition* [*Übergang*] est absolument crucial, car l'objectif est de créer les conditions de *continuité et de complétude* tant pour l'*objet concret* que pour la *pensée abstraite*, aussi bien en mathématiques que dans les sciences de la nature. Et dans l'*Essai d'une théorie des concepts fondamentaux des mathématiques et de la physique comme fondement pour expliquer la nature*<sup>47</sup>, Riemann exprime encore plus précisément son idée fixe au sujet de la *continuité*.

<sup>46</sup> *Philosophie = Untersuchung der Begriffe*

I. *Philosophische Ansichten.*

II. *Speculation = Streben zur Auflösung der Probleme.*

*Nachweisung eines nothwendigen Zusammenhangs unter Begriffen*

*Problem weiterer Specul(-ation) als Behmühung zwischen den Begriffen die gehörigen Übergänge zu bahnen.*

<sup>47</sup> *Fragmente philosophischen Inhalts*, [132], pp. 477–488 ; [130], pp. 15–20.

Tout ce qui est observé est la transition [*Übergang*] d'une chose d'un certain état vers un autre état ou, pour parler d'une manière plus générale, d'un mode de détermination [*Bestimmungsweise*] vers un autre, sans que soit perçu un saut au cours de la transition. Pour compléter cette observation, nous pouvons soit supposer que la transition se déroule selon un nombre très grand mais fini de sauts imperceptibles pour nos sens, soit que la chose se déroule de manière continue à travers *toutes* les étapes intermédiaires, en allant d'un état vers l'autre. [130], p. 21.

Dans ce même passage, Riemann parlait de l'hypothèse qu'on a déjà formé le concept de chose existante en soi [*der Begriff für sich bestehender Dinge*], et il demandait qu'on «relève la tâche qui consiste à maintenir aussi loin que possible» ce concept déjà prouvé de chose existante en soi, sachant que les processus de changement contredisent manifestement un tel concept de chose stable et existante<sup>48</sup>. Autrement dit, dès qu'il s'agit d'assurer la cohérence et la cohésion du concept d'existence en soi d'une chose soumise à l'étude, *l'antinomie, dans les sciences, entre le discret et le continu devient source de problèmes scientifiques*. De plus, la question très vaste suggérée par Riemann débouche aussi sur une étude scientifique de la psychologie de la perception et elle montre que *l'antinomie problématique entre le discret et le continu, contagieuse, s'insinue jusque dans les structures infimes de notre appareil perceptif spatio-temporel pour accentuer encore plus son caractère antinomique*.

Riemann suggère ainsi que le problème est encore plus complexe qu'il n'y paraît, puisque nos structures perceptives sont elles-mêmes aussi inscrites dans l'antinomie *physique* entre le discret et le continu. Lorsque la question des moyens d'appropriation perceptive est considérée comme question principale, aucune phénoménologie, fût-elle «transcendantale», ne peut se dispenser de psychologie expérimentale. Éclatés, les problèmes se distribuent entre disciplines, et certains d'entre eux restent désespérément ouverts malgré les progrès de la connaissance.

Ici à nouveau, Riemann, mathématicien pur, manifeste donc une *conscience philosophique remarquable* des antinomies universelles auxquelles l'entendement scientifique est exposé. De ces antinomies, il faut déduire l'ouverture — tel est le message intemporel de Riemann. Ces antinomies ne doivent en aucun cas déboucher sur la fermeture des questions qu'elles ne parviennent pas à résoudre.

---

<sup>48</sup> Héraclite *versus* Parménide.

Par exemple, d'après un tel point de vue métaphysique, l'émergence des théories physiques et astrophysiques va *ramifier et complexifier* le canevas initial des deux premières thèses et antithèses que Kant a formulées au sein des quatre conflits des idées transcendantales<sup>49</sup>. On pourrait dire que la force philosophique intensive de Riemann réside dans sa capacité à désigner des problèmes qui sont ouverts dans leur plus grande généralité, dans un *amont* de l'amont, là où l'inaugural est un initial pur, aux *racines mêmes* de l'arbre de la *connaissance problématisante*.

Aussi Riemann ne se range-t-il pas à la « solution » que Kant a voulu apporter aux antinomies de la raison pure<sup>50</sup>, et qui consiste en quelque sorte à considérer que le *conflit dialectique de la raison avec elle-même* provient d'une illusion transcendantale. En s'inspirant à tort de l'expérience concrète, la raison s'imagine en effet inconsiderément — d'après le raisonnement de Kant — que le rapport du conditionné à la série de ses conditions s'applique à des totalités de phénomènes<sup>51</sup>, et la raison en déduit sans plus de façons des conclusions métaphysiques qui se donnent pour fermes et indubitables, mais qui

<sup>49</sup> Première antinomie : finitude/infinitude de l'univers dans le temps ou dans l'espace ; deuxième antinomie : discrétude/continuité ou simplicité/composition de toutes les substances matérielles dans le monde ([82], pp. 338–347). Pour les questions cosmologiques, voir [159].

<sup>50</sup> Dans la septième section du chapitre II : *Les antinomies de la raison pure*, du Livre II : *Les raisonnements dialectiques de la raison pure* de la *Critique de la raison pure* qui s'intitule *Décision critique du conflit cosmologique de la raison avec elle-même* (et qui constitue l'un des passages-clés de l'ouvrage), Kant conclut que toute l'antinomie de la raison pure repose sur la fausse croyance que quand un phénomène conditionné est donné, la synthèse qui constitue l'ensemble des conditions empiriques qui contribuent à sa donation, puisse elle aussi être présentée en acte, alors qu'en vérité, elle n'est pas présentable et s'éloigne en se volatilissant dans la *régression inaccessible* des conditions empiriques. Ainsi, l'erreur est-elle de croire que « quand le conditionné est donné [par exemple, tout objet des sens], la série entière de toutes ses conditions est aussi donnée » ([82], p. 376). « Il ne nous reste pas d'autre moyen de terminer définitivement la lutte, à la satisfaction des deux parties, que de les convaincre qu'étant capables de se réfuter si bien réciproquement, elles se disputent pour rien et qu'un mirage transcendantal leur a fait voir une réalité là où il ne s'en trouve pas » ([82], p. 378).

<sup>51</sup> Mais d'après Kant, ce rapport ne peut exister en fait que dans et par les représentations d'entendement. « La majeure du syllogisme cosmologique prend le conditionné dans le sens transcendantal d'une catégorie pure et la mineure, dans le sens empirique d'un concept de l'entendement appliqué à de simples phénomènes, et par conséquent, on rencontre l'erreur dialectique qu'on nomme *sophisma figurae dictionis* » ([82], p. 377).



s'entre-détruisent parce qu'elles sont violemment antithétiques. Kant fait alors observer que « deux jugements opposés dialectiquement l'un à l'autre peuvent être faux tous les deux », mais la troisième issue logique qu'il théorise pour sortir de ces difficultés consiste à soutenir que « les phénomènes en général ne sont rien en dehors de nos représentations<sup>52</sup> ». Réhabilitation du tiers exclu à un niveau transcendantal, donc, mais à une telle issue, Riemann aurait vraisemblablement pu formuler deux objections inspirées de ses recherches en mathématiques et en physique.

Premièrement, à cause de la limitation des moyens expérimentaux, la régression du conditionné vers ses conditions, loin d'être indéfinie, s'avère en fait toujours particulièrement limitée, ce qui compromet le bien-fondé des raisonnements métaphysiques non seulement quant à leur contenu conclusif (Kant), mais aussi quant à leur portée synthétique organique — toujours trop rudimentaire et non légitimée par l'existence d'une réalité dominatrice supérieure<sup>53</sup>. Pour cette raison, la portée des considérations de la *Critique de la raison pure* est restreinte au champ synthétique (*a priori* ou *a posteriori*) d'une époque, et il est impossible d'admettre que la thétique et l'antithétique de la dialectique transcendantale aient pu être définitivement établies par le discours kantien, alors que les antinomies que dégage Kant continuent à se raffiner et à se complexifier — *sans s'effacer* — grâce aux progrès de la connaissance scientifique.

Deuxièmement, la représentation de régressions potentielles ne sert qu'à *manifestar la présence d'horizons de non-savoir* et à *ouvrir* des domaines neufs pour l'investigation scientifique. Le tiers-exclu riemannien, c'est l'inconnu devant soi, c'est l'imprévisible, c'est la résolution inattendue d'un problème, ou mieux encore, c'est l'ouverture constante de l'irréversible-synthétique.

**1.13. La méthode des plus petits changements conceptuels.** Dans le feuillet manuscrit 141 du dossier 18 du *Nachlass* que Scholz a découvert ([142], p. 420 et p. 433), Riemann s'interroge tout d'abord sur les étapes de la formation des concepts : à partir du perçu ; par induction ; par abstraction, ou par synthèse *a posteriori* ; et ensuite surtout, il insiste sur le *resserrement des transitions* entre les concepts :

<sup>52</sup> Kant déduisait en effet de ces considérations sur les antinomies une (seconde) « preuve » de l'« idéalité transcendantale » des phénomènes ([82], p. 381).

<sup>53</sup> En mathématiques, la complexification incessante et imprévisible de l'irréversible-synthétique garantit l'organicité du savoir, dans l'actuel et dans le potentiel.

Changement (ou complétion) des concepts qui soit le plus petit possible [...] <sup>54</sup> [142], p. 433.

Très certainement, cette pensée est directement inspirée d'une formule aphoristique de Herbart que Riemann recopie en l'extrayant de son contexte, et que nous encadrons aussi, vu son importance.

*La méthode des relations est la méthode des plus petits changements*<sup>55</sup>.

Resserrer les transitions conceptuelles, c'est tendre vers une plus grande *continuité de la pensée*<sup>56</sup>. L'objectif affirmé est de *compléter par élimination* toutes les différences, distorsions, sauts, fossés, etc. Dans leur exposition très systématique de la théorie des groupes de transformations, Engel et Lie mettront à exécution ce principe fondamental que Riemann n'avait pas eu le temps de développer.

À un niveau «méta-mathématique», ce qui est désigné par Riemann dans la généralité la plus grande comme *transition (continue) entre concepts* est susceptible de se réaliser comme connexion, comme hiérarchisation, comme sériation, comme interdépendance, comme nécessité, comme suffisance, ou enfin, terme ultime du resserrement de la continuité conceptuelle, comme *équivalence*, c'est-à-dire comme *nécessité et suffisance*. Tous les liens dynamiques entre concepts, axiomes et hypothèses recouvrent ainsi des distinctions en extension et en généralité qui les inscrivent dans un graphe de transitions ouvertes sur un horizon de continuité potentielles.

<sup>54</sup> *Möglichst geringe Veränderung (oder Ergänzung) der Begriffe.*

<sup>55</sup> *Die Methode der Beziehungen ist die Methode der kleinsten Veränderungen.*

<sup>56</sup> À la fin de la première partie des *Fragmente philosophischen Inhalts* intitulée *Zur Psychologie und Metaphysik*, Riemann évoque la méthode des limites introduite par Newton pour fonder le calcul infinitésimal, et il exprime spontanément une extension (par analogie) de cette méthode à la recherche d'une *continuité* dans la détermination — primitivement *discontinue* — des concepts. La méthode de Newton, écrit Riemann, «consiste en ceci : au lieu de considérer une transition continue d'une valeur d'une grandeur à une autre, d'une position à une autre, ou plus généralement d'un mode de détermination d'un concept [von einer Bestimmungsweise eines Begriffes] à un autre, on considère d'abord une transition par un nombre fini d'étapes intermédiaires, puis on permet au nombre de ces degrés intermédiaires d'augmenter, de telle sorte que les distances entre deux degrés intermédiaires consécutifs diminuent toutes à l'infini» ([132], p. 487 ; nous soulignons). Cette «continuification» des concepts qui se trouve — comme pour le calcul infinitésimal — à la limite du représentable, n'est pas directement accessible à notre réflexion, mais on peut s'imaginer qu'il soit possible de passer d'un système conceptuel à un autre par une simple modification dans les grandeurs relatives, de telle sorte que le système reste stable et inchangé dans la transition vers la limite du continu.

Ainsi s'exprime l'« impératif catégorique » riemannien qui fait naître une *diversité éclatée de problèmes d'organisation structurale* dont l'objectif est de créer des conditions pour la continuité de la pensée spéculative :

- nature, conception, problématique des notions primitives ;
- liaisons, dépendances, indépendances entre concepts définis ;
- nécessités, potentialités, *aprioricité* ;
- principes de genèse conceptuelle ;
- différenciations spécifiques.

Immédiatement après avoir ouvert les questions de nature, Riemann ose donc *ouvrir* le champ *encore inexistant* des relations possibles entre concepts potentiels. On peut sans conteste affirmer que la philosophie mathématique de Riemann anticipe la révolution axiomatique<sup>57</sup> (Hilbert, Bourbaki), puisque le structural formalisé est préformé par certaines structures dialectiques universelles du questionnement mathématique. D'après un tel point de vue, l'axiomatisation ultérieure des géométries est une tentative — parmi d'autres — de systématiser certaines réponses *et certaines questions* que l'exploration rencontre. Décider les ouvertures, accepter l'ignorance, et maintenir intentionnellement le rapport à l'Inconnu n'est peut-être pas la qualité la plus évidente des systèmes formalisés, et pourtant, l'« impératif catégorique riemannien » exigerait que lesdits systèmes expriment explicitement leur propre inachèvement.

**1.14. Modes amétriques de détermination.** Maintenant que nous avons élucidé les exigences méthodologiques générales que Riemann s'est fixées au contact de la philosophie de Herbart pour conduire ses recherches sur les fondements de la géométrie, nous pouvons reprendre

---

<sup>57</sup> Néanmoins, la pensée de Riemann ne se réduit pas à un procédé entièrement logique, voire purement axiomatique (*cf.* le commentaire [168], p. 408 de Vuillemin basé sur une lecture de Russell), puisque la logique formelle ne questionne pas au sens philosophique du terme, mais cherche à enfermer le relationnel du conceptuel dans une syntaxe constituée *a posteriori* par rapport aux recherches ouvertes. Il est beaucoup plus exact de dire que les recherches de Riemann sur la définition de l'espace procèdent « comme il est naturel dans l'analyse des concepts », à savoir : « *per genus proximum et differentiam specificam* » (*ibidem*), sans toutefois voir dans les déterminations successives de concepts des finalités prédéfinies et fermées, comme par exemple la « convergence » vers un système d'axiomes caractérisant l'espace euclidien. Très peu de commentateurs ont mis en lumière le souci constant de problématisation et d'ouverture qui s'exprime de manière très explicite dans tous les écrits de Riemann.

à présent l'analyse philosophique de son discours, que nous avons interrompue p. 15.

En partant, comme nous l'avons rappelé, de la bifurcation zénienne fondamentale entre le discret et le continu, Riemann insiste sur le fait que les occasions de faire naître des concepts dont les modes de détermination recourent à la continuité<sup>58</sup> sont beaucoup moins fréquentes<sup>59</sup> que lorsqu'il s'agit des concepts dont les modes de détermination forment une multiplicité discrète. En effet, l'équivalence numérique entre plusieurs collections d'objets concrets qui fonde, à un niveau intuitif proprement archaïque la notion élémentaire de nombre entier, ne pose quasiment aucun problème d'abstraction à la pensée, parce que les bijections entre collections d'objets individués possèdent, pour l'intuition, un sens physique extrêmement clair, du moins lorsqu'il s'agit de petits nombres entiers. Riemann dévoile alors sa motivation mathématique.

De telles recherches sont devenues nécessaires dans plusieurs parties des Mathématiques, notamment pour l'étude des fonctions analytiques à plusieurs valeurs<sup>60</sup>, et c'est surtout à cause de leur imperfection que le célèbre théorème d'Abel, ainsi que les travaux de Lagrange, de Pfaff, de Jacobi sur la théorie générale des équations différentielles, sont restés si longtemps stériles. [133], p. 283.

---

<sup>58</sup> À nouveau, Riemann se révèle penseur du continu, en analyse, en géométrie différentielle et en physique. Weyl écrivait ([134], p. 740) que la motivation de principe de Riemann était de comprendre le monde par son comportement dans l'infiniment petit [*die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen zu verstehen*].

<sup>59</sup> Riemann affirme même qu'elles sont plus rares [*selten*], or cela n'est pas tout à fait exact, car les mouvements des corps dans l'espace — cette réalité intuitive qui nous est omniprésente et qui allait connaître un destin algébrique inattendu avec le développement de la théorie des groupes de Lie — prouvent manifestement le contraire. D'ailleurs, Herbart avait déjà montré qu'il existe des espaces continus dont les modes d'existence sont extrêmement variés, comme par exemple (à nouveau) les divers lieux que peuvent occuper les objets sensibles, mais aussi la « ligne du son » [*Tonlinie*], ou encore le triangle des couleurs, étudié par Thomas Young et Clark Maxwell, avec le bleu, le rouge et le jaune disposés à ses sommets, ces trois couleurs pouvant se fondre en s'associant quantitativement pour produire toutes les couleurs possibles dans le continu bidimensionnel de l'intérieur du triangle. Au début de ce § I ([133], p. 282), Riemann a probablement plutôt voulu suggérer que les modes de détermination continue qui sont nécessaires pour penser les multiplicités continues ne sont pas encore disponibles, car le besoin de les élaborer ne s'est pas encore fait ressentir dans la vie ordinaire.

Cette remarque réfère à une tendance naissante des mathématiques de la première moitié du 19<sup>ème</sup> siècle : essayer de transférer le langage de la géométrie vers des systèmes analytiques ou algébriques à *plusieurs variables* ; une telle tendance était connue de Riemann, au moins partiellement, *via* Gauss ([140], p. 15 sq., 53 sq.). La recherche de généralité exige de mettre sur pied une théorie des grandeurs étendues qui soit indépendante des déterminations métriques et dans laquelle « on ne suppose rien de plus<sup>61</sup> que ce qui est déjà renfermé dans le concept de ces grandeurs ».

Éliminer les hypothèses adventices, circonscrire des hypothèses minimales, et s'en tenir rigoureusement à elles : impératif méthodologique riemannien ; principe riemannien de genèse.

Dans cette branche générale de la théorie des grandeurs étendues, où l'on ne suppose rien de plus que ce qui est déjà renfermé dans le concept de ces grandeurs, il nous suffira, pour notre objet actuel, de porter notre étude sur deux points, relatifs : le premier, à la génération du concept d'une multiplicité de plusieurs dimensions ; le second, au moyen de ramener les déterminations de lieu dans une multiplicité donnée à des déterminations de quantité, et c'est ce dernier point qui doit clairement faire ressortir le caractère essentiel d'une étude de  $n$  dimensions. [133], p. 283.

Problème inaugural : il s'agit donc de penser, de définir et d'engendrer une notion purement *amétrique*<sup>62</sup> d'étendue, dont les « quanta » ou « morceaux » d'étendue puissent être envisagés du point de vue de la

<sup>60</sup> Il s'agit bien sûr des surfaces étalées au-dessus de certaines régions du plan complexe, ramifiées autour de certains points, et recousues le long de certaines coupures que Riemann a introduites dans sa dissertation inaugurale. Pour ne pas interrompre l'étude proprement philosophique, nous laisserons de côté ces brèves allusions à l'analyse complexe, au théorème d'Abel concernant les intégrales de fonctions algébriques (*voir* [80]), et au problème de l'intégration des formes différentielles totales (*voir* [69]).

<sup>61</sup> L'exigence ainsi fondée par Riemann de se limiter à des hypothèses minimales s'exprime aussi très explicitement dans son *Habilitationsschrift* sur les séries trigonométriques.

<sup>62</sup> Si les moyens mathématiques ou axiomatiques manquent au géomètre pour mesurer les grandeurs spatiales, et s'il est impossible de se déplacer à la manière d'un arpenteur pour déposer chaînes, jalons et équerres sur un hypothétique sol de la géométrie spatiale abstraite, alors la question du plus grand et du plus petit perd son sens et son intérêt.

comparaison inclusive, sans pour autant l'être du point de vue de la mesure numérique<sup>63</sup>. Il faut ainsi libérer la notion d'étendue de l'emprise des grilles et des règles graduées, afin de penser l'étendue en termes de *régions*<sup>64</sup> situées dans une certaine multiplicité [*als Gebiete in einer Mannigfaltigkeit*].

Immédiatement et explicitement, Riemann divise donc le problème concerné en deux sous-problèmes :

*Problème 1* : engendrer le concept de multiplicité par synthèse et par analyse, en ayant recours à des modes de détermination quantitatifs non métriques.

*Problème 2* : trouver des conditions pour ramener les déterminations de lieu à des rapports métriques de type distance.

Évidemment, l'étude de ces deux questions générales devra toujours être encadrée par les mêmes exigences « méta-mathématiques universelles » qui animent constamment Riemann :

- donner des conditions *suffisantes* pour la genèse ;
- donner des conditions *nécessaires* pour la genèse ;
- établir la *nécessité* et la *suffisance* de conditions génétiques ;
- éliminer les caractères spécifiques étrangers au concept pur.

Pour accéder vraiment à une telle pensée génétique, il nous faut maintenant mettre complètement entre parenthèses les actes de postulation axiomatique par lesquels nous nous permettons aujourd'hui d'accepter sans nous poser plus de questions aussi bien les définitions formelles initiales structurées que les entames telles que « Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$  », ou « Soient  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  des coordonnées locales sur l'espace des phases  $\mathcal{P}$  d'un système hamiltonien quelconque ». Riemann cherche en fait à *démontrer* que l'on peut ramener la détermination locale des étendues géométriques à des suites de quantités numériques : c'est un pur problème de genèse, qui ne pré-occupe plus notre époque.

<sup>63</sup> Par son traitement détaillé des multiplicités continues qui précède l'introduction de coordonnées numériques, Riemann affirmait clairement que les nombres jouent un rôle auxiliaire en géométrie, s'exprimant de ce fait à contre-courant de la tendance générale à l'arithmétisation de l'analyse et de la géométrie ([140], pp. 30–34).

<sup>64</sup> Acte de saisie intuitive archaïque du spatial : comment le caractériser ? Les travaux de Sophus Lie déploieront une pensée du spatial multidimensionnel amétrique et mobile dans un langage essentiellement rhétorique et algébrique qui cherche néanmoins à transmettre chaque acte de pensée intuitive.

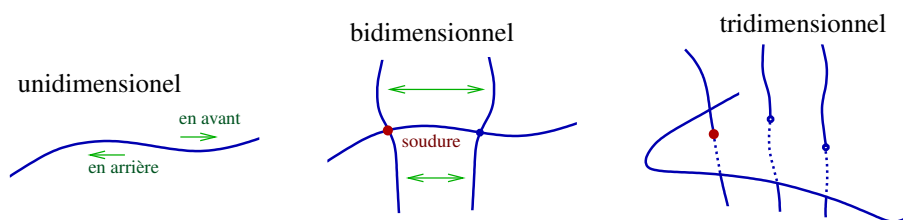
**1.15. Genèse du multidimensionnel.** Dans un tout premier moment, Riemann tente de caractériser l'unidimensionnalité initiale d'une multiplicité non discrète — dont il fera ensuite un principe fondamental de genèse — par la propriété que ses modes continus de détermination sont eux-mêmes déterminés<sup>65</sup>. D'après un raisonnement difficile à reconstituer, Riemann affirme alors que de tels modes de détermination ne peuvent alors être parcourus « que dans un seul sens », c'est-à-dire « en avant et en arrière » : c'est l'unidimensionnalité, appelée à devenir racine et principe de genèse inductive pour la multidimensionnalité.

Ensuite, *dyade*, *soudure* et *parcours* permettent d'engendrer le bidimensionnel<sup>66</sup>. *Dyade* : dédoubler l'objet *un* qui est donné, c'est-à-dire se donner deux multiplicités unidimensionnelles ; *soudure* : transporter une multiplicité pour la « riveter » sur une autre en un bipoint de coïncidence ; *parcours* : faire décrire à la seconde multiplicité unidimensionnelle toute la multiplicité unidimensionnelle de la première. Genèse : voir apparaître le bidimensionnel comme un voile créé aux franges de l'unidimensionnel par développement continu dans un éther extrinsèque.

---

<sup>65</sup> Cette phrase longue et difficile ([133], pp. 283–284) semble être une tentative inaboutie pour trouver dans la variabilité des modes de détermination d'une multiplicité donnée des conditions si restrictives qu'elles en impliquent l'unidimensionnalité. Le caractère inachevé de ce passage n'a pas échappé à Engel et à Lie, qui étaient probablement déjà informés, en 1891–93, des travaux naissants de Pasch, Stolz, Schur sur les fondements axiomatiques de la géométrie. « La véritable signification de la proposition d'après laquelle l'espace est une variété numérique [*Zählenmannigfaltigkeit*] ne ressort pas du travail de Riemann. Riemann cherche à démontrer cette proposition, mais sa démonstration ne peut pas être prise au sérieux. Si l'on veut véritablement démontrer que l'espace est une variété numérique, on devra, à n'en pas douter, postuler auparavant un nombre non négligeable d'axiomes, ce dont il semble que Riemann n'ait pas été conscient » (p. 161 ci-dessous). Il est vrai en effet que l'élaboration d'un raisonnement véritablement synthétique nécessite de faire une différence marquée entre hypothèses et conclusion, et de s'interroger sur la nature des hypothèses qu'on prendra comme axiomes. Comme Riemann ne spécifie pas ce qu'il faut précisément entendre par l'idée de lieu comme essence du géométral-local-continu, les raisonnements logiques et les démonstrations qu'il cherche à conduire pour ramener une telle notion de lieu à des grandeurs numériques sont donc encore truffés de problèmes ouverts.

<sup>66</sup> Pour de plus amples développements de cette direction de pensée, le lecteur est renvoyé à la *Science de la grandeur extensive* de Grassmann [64], commentée par Flament [46] et par Gilles Châtelet [27].



Le tridimensionnel s'engendre alors de manière analogue par déploiement extériorisé de l'unidimensionnel le long d'un bidimensionnel, et ainsi de suite pour les dimensionnalités d'ordre supérieur. Autre interprétation de ce procédé : la variation de la variabilité produit une variabilité d'ordre supérieur.

Si, au lieu de considérer le concept comme déterminable, on considère son objet comme variable, on pourra désigner cette construction comme la composition d'une variabilité de  $n + 1$  dimensions, au moyen d'une variabilité de  $n$  dimensions et d'une variabilité d'une seule dimension. [133], p. 284.

Et maintenant, le resserrement des conditions : il faut à présent s'interroger pour savoir si une *analyse inverse* est possible, car l'existence de deux genèses réciproques montrerait que le concept de multiplicité a été entièrement circonscrit. À un procédé de composition par induction doit donc succéder une analyse par décomposition dimensionnelle.

Je vais maintenant montrer réciproquement comment une variabilité, dont le champ est donné, peut se décomposer en une variabilité d'une dimension et une variabilité d'un nombre de dimensions moindre. [133], p. 284.

À cet instant précis va se dévoiler pour la première fois dans le texte de Riemann *l'interdépendance fondamentale entre le fonctionnel et le géométral*. C'est le premier moment où, à dessein, *l'analyse et l'algèbre commencent à vouloir capturer la géométrie*.

L'idée est simple : dans une portion de multiplicité, les éléments divers de la multiplicité comptés à partir d'un point fixé à l'avance doivent posséder un principe de différenciation spécifique par rapport au point en question. Autrement dit, on peut s'imaginer qu'à l'intérieur de ladite multiplicité, il existe au moins une certaine *fonction du lieu* qui ne soit constante le long d'aucune sous-portion de cette multiplicité. Ici, il ne s'agit pas de définir axiomatiquement le géométral et le fonctionnel à partir d'atlas maximaux de cartes locales à valeurs dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ([154, 140, 125]). Il s'agit plutôt d'observer que le fonctionnel naît



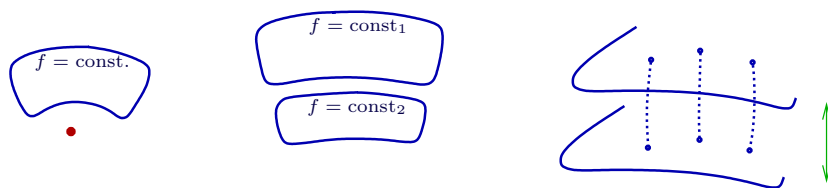
d'emblée avec le géométral, par l'effet d'une dualité ou d'une complémentarité qui se trouve à la racine des concepts.

À ce moment-là, bien que Riemann soit pertinemment conscient — grâce à ses travaux sur les séries trigonométriques — du fait que les fonctions diffèrent en nature suivant qu'elles sont continues, différentiables, ou analytiques, avec un ensemble éventuellement fini ou infini de discontinuités, il semble vouloir ne préciser ici aucune hypothèse technique au sujet de la régularité de la fonction en question. Par conséquent, le fonctionnel est ici absolument ouvert à la généralité et à la diversification des univers spatiaux. On évolue donc dans un monde virtuel qui embrasse *a priori* les variétés topologiques, les variétés de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\mathcal{C}^2$ ,  $\mathcal{C}^k$  ou  $\mathcal{C}^\infty$ , les variétés analytiques réelles, complexes, ou quaternioniques, les espaces analytiques singuliers, les espaces éventuellement fractals, non séparés, totalement discontinus, ou encore absolument mixtes, c'est-à-dire qui incorporent éventuellement, en des localités distinctes, chacun de ces aspects-là : postérité stupéfiante de la généralité riemannienne. Les raisonnements qui pourraient être considérés comme vagues et imprécis englobent donc ici des pans entiers de la géométrie à plusieurs dimensions, que Engel et Lie allaient être les premiers à développer d'une manière vraiment systématique, dans une optique exclusivement locale et générique.

Lorsqu'on fait varier la constante à laquelle on égale une telle fonction, les lieux de points en lesquels sa valeur est fixe forment alors une multiplicité continue<sup>67</sup> d'un nombre de dimensions moindre que celui de la variété donnée.

---

<sup>67</sup> En toute rigueur ici, il faut faire des hypothèses telles que par exemple la différentiabilité au moins  $\mathcal{C}^1$  et la non-annulation de la différentielle, puisque d'après un théorème de Whitney, tout sous-ensemble fermé d'une variété, aussi pathologique qu'il soit, peut être représenté comme lieu d'annulation d'une certaine fonction continue ([106]). Toutefois, dans ce moment d'analyse, les raisonnements sont locaux et génériques : « Les cas d'exception, dont l'étude est importante [souci d'ouverture], peuvent être ici laissés de côté ». Rien n'empêche en tout cas de pressentir que de tels raisonnements conservent un sens très précis dans la catégorie des espaces analytiques complexes singuliers, où l'ontologie parallèle du fonctionnel et du géométral, mieux contrôlée par les séries entières convergentes, se prolonge toujours d'un point vers un petit voisinage de ce point, grâce notamment au théorème de préparation de Weierstrass, au théorème de paramétrisation locale de Noether et au théorème de cohérence d'Oka.



Ces multiplicités, lorsqu'on fait varier la fonction, se transforment d'une manière continue les unes dans les autres ; on pourra donc admettre que l'une d'entre elles engendre les autres, et cela pourra avoir lieu, généralement parlant, de telle façon que chaque point de l'une se transporte en un point déterminé de l'autre. [133], pp. 284–285.

Ainsi par décomposition, Riemann parvient-il en utilisant des fonctions auxiliaires, à montrer que l'analyse du concept de multiplicité reconduit exactement au premier procédé de genèse : amplification de la variabilité par variation inductive de la variabilité.

En conclusion, que ce soit par l'analyse ou par la synthèse, « la détermination de lieu dans une multiplicité donnée, quand cela est possible, se réduit à un nombre fini de déterminations de quantité<sup>68</sup> » : ce qu'il fallait démontrer.

Contrairement aux définitions axiomatiques, Riemann a donc entrepris d'engendrer le multidimensionnel à partir de l'unidimensionnel, et surtout il a tenté d'articuler la genèse comme une *démonstration* procédant par des conditions variées. Helmholtz quant à lui, puis Russell ([137]) et Vuillemin ([168], pp. 388–464), envisageront le problème sous l'angle de la postulation d'axiomes, pourtant moins problématisant, et moins riche d'imprévisible. Pour terminer sur ce chapitre, notons à nouveau que Riemann ne peut se soustraire à un devoir constant de manifester le souci abstrait d'ouverture.

Toutefois il y a aussi des multiplicités dans lesquelles la détermination de lieu exige, non plus un nombre fini, mais soit une série infinie, soit une multiplicité continue de déterminations de grandeur. Telles sont, par exemple les multiplicités formées par les déterminations possibles d'une fonction dans une région donnée, par les formes possibles d'une figure de l'espace, etc. [133], p. 285.

### 1.16. Conditions pour la détermination des rapports métriques.

Après avoir libéré la notion archaïque d'étendue de toute saisie métrique, il s'agit maintenant de traiter le deuxième sous-problème (*cf.* p. 30), que Riemann reformule comme suit :

<sup>68</sup> Engel et Lie appelleront « variétés numériques » [*Zählenmannigfaltigkeit*] les multiplicités introduites par Riemann.

*De quels types de rapports métriques est susceptible une multiplicité ?*

Il s'agit de trouver des conditions qui caractérisent les différentes manières possibles de munir une multiplicité donnée d'un concept supplémentaire qui permette de parler de la *distance* qui existe entre toutes les paires de points. Or le titre passablement énigmatique de la sous-section concernée :

*Rapports métriques dont est susceptible une variété de  $n$  dimensions, dans l'hypothèse où les lignes possèdent une longueur, indépendamment de leur position, et où toute ligne est ainsi mesurable par toute autre ligne*

a plongé dans la perplexité de nombreux mathématiciens, philosophes, historiens et commentateurs. Tout d'abord, que signifie exactement cette seconde hypothèse elliptique d'après laquelle toute ligne doit être mesurable par toute autre ligne ? Faut-il y voir un principe d'arpentage : déplacement libre des règles (ou des lignes) ? Doit-on en faire toujours un axiome, en vertu d'une évidence physique imparable ? Par « lignes », faut-il entendre n'importe quelle courbe tracée dans la multiplicité ? Un tel principe de métrisation implique-t-il des comparaisons au niveau local fini, ou bien des comparaisons dans l'infinésimal ?

Riemann n'est jamais facile à lire, mais sa célèbre allocution « *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* » présente des difficultés de compréhension d'un type tout à fait spécial. § 100, p. 275 ci-dessous.

Autre énigme : que signifie la première hypothèse elliptique d'après laquelle les lignes possèdent une longueur, indépendamment de leur position ? Faut-il y voir une allusion à la libre mobilité des courbes et à l'invariance de leur longueur, lorsqu'on effectue une série de transformations ponctuelles de l'espace ? Mais une telle interprétation entrerait en contradiction avec le fait que la métrisation est et doit être absolument indépendante de la mobilité ; une telle indépendance vaut en effet déjà pour la théorie gaussienne des surfaces, et Riemann a explicitement énoncé que cette théorie contient les fondements de la question qu'il va traiter. En tout cas, par rapport à la théorie gaussienne des surfaces courbes qui héritent d'une métrique « ondulée » par restriction de la métrique pythagoricienne « plate » de l'espace à trois dimensions, Riemann va *renverser*<sup>69</sup> *complètement la réflexion*.

<sup>69</sup> Voir le § 1.6 p. 9

En effet, sans s'autoriser à céder ni à la formulation aisée de problèmes ouverts qui consiste simplement à augmenter le nombre de variables, ni à la générativité symbolique des expressions formelles, c'est-à-dire plus précisément, sans annoncer d'emblée à son auditoire :

« Étudions maintenant l'expression différentielle quadratique  $\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_j$  à  $n$  variables qui généralise visiblement l'expression connue en coordonnées paramétriques intrinsèques de la métrique  $E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2$  sur une surface courbe, dont Gauss a montré, dans son *Theorema Egregium*, qu'elle possède la mesure de courbure comme invariant à travers toute transformation isométrique »,

Riemann va plutôt, en renversant le sens de son étude, *chercher à trouver des principes de genèse a priori* qui montreront en quoi l'expression quadratique gaussienne, ainsi que sa généralisation à des dimensions supérieures, est en un certain sens naturelle, nécessaire, ou tout du moins « la plus simple possible » qui pourrait s'offrir à l'étude dans un *a priori* relatif, reconstitué *a posteriori*, de la connaissance mathématique. Régressive dans l'*a posteriori* par rapport à la théorie de Gauss, l'étude riemannienne cherche à ouvrir une voie nouvelle vers l'*a priori* génétique.

Par sa démarche, Riemann est donc un véritable *métaphysicien des mathématiques* : nous devons nous interroger, dit-il en effet, sur l'existence de causes profondes qui pourraient expliquer l'émergence de telles formes symboliques, ou de telles structures mathématiques. Le point de vue riemannien se situe donc bien en amont de toute option philosophique unilatérale sur l'essence des mathématiques et sait se soustraire aux polémiques afférentes ; idéalisme, platonisme, réalisme, constructivisme, intuitionnisme, historicisme, essentialisme, axiomatisme, formalisme : chacune de ces options philosophiques est engagée dans une problématique d'essence tellement profonde que les réponses possibles sont encore noyées dans l'ouverture et dans l'indécision, et tout penseur d'inspiration riemannienne se voit dans l'obligation philosophique d'accepter cet état de fait.

Ainsi la partie du discours de Riemann où il rappelle son principe méthodologique général d'investigation n'est-elle plus maintenant énigmatique pour notre analyse.

Nous arrivons au second des problèmes posés plus haut, savoir à l'étude des rapports métriques dont une multiplicité est susceptible, et des conditions suffisantes pour la détermination de ces rapports métriques. [133], p. 285.

Toute genèse doit en effet procéder par *conditions démonstratives*, au moins suffisantes dans un premier moment, et si possible ensuite, *nécessaires et suffisantes*, afin de resserrer au mieux peut-être les *écarts synthétiques* entre concepts qui pourraient cacher des pétitions de principe, des hypothèses implicites, ou mieux encore, des concepts nouveaux et ouverts qui pourraient connaître un destin inattendu dans l'histoire des mathématiques<sup>70</sup>. Ainsi sur le chemin génétique qui conduit aux métriques différentielles quadratiques maintenant dites « riemanniennes », Riemann va-t-il poser successivement plusieurs hypothèses ouvertes qui pourraient conduire à d'autres types de rapports métriques possibles.

**1.17. Genèse des métriques riemanniennes.** Les déterminations de lieu étant ramenées aux déterminations simultanées de  $n$  grandeurs numériques  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  (§ 1.15), le problème consiste maintenant à trouver une expression mathématique pour la longueur des lignes courbes tracées dans la multiplicité. Comme dans l'espace ordinaire, la donation d'une ligne courbe revient à ce que les quantités  $x_i$  dépendent paramétriquement d'une seule variable auxiliaire.

Je ne traiterai ce problème que sous certaines restrictions, et je me bornerai d'abord aux lignes dans lesquelles les rapports entre les accroissements  $dx$  des variables  $x$  correspondantes varient d'une manière continue. [133], p. 286.

*Leitmotiv* riemannien : encore une annonce d'ouverture potentielle laissée de côté par le choix d'une hypothèse déterminée. Poser une hypothèse, c'est s'écarter éventuellement d'un (autre) univers mathématique, c'est bifurquer vers une certaine branche de l'arbre mathématique, sans examiner d'autres branches, sans explorer d'autres univers.

---

<sup>70</sup> Encore une fois, rappelons que la pensée mathématique structuraliste contemporaine ne place jamais la question à un niveau aussi problématisant. En effet, lorsqu'on s'autorise à commencer un article ou un exposé par une phrase telle que « Soit  $M$  une variété différentielle munie d'une métrique riemannienne  $g$  », ou telle que « Soit  $\frac{dz}{1-|z|^2}$  la métrique de Poincaré sur le disque unité  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  dans  $\mathbb{C}$  », l'acte de position que désigne l'expression « Soit  $X$  un objet mathématique défini » réfère à un concept considéré comme déjà donné dans une architecture paradigmatique constituée.

Par conséquent, Riemann décide d'*infinitésimaliser*<sup>71</sup> le problème : avec cette hypothèse de continuité<sup>72</sup>, les lignes peuvent être décomposées en portions infinitésimales, et si l'on s'autorise<sup>73</sup> de plus à disposer de la théorie de l'intégration afin de sommer toutes les longueurs infinitésimales des éléments de ligne placés bout à bout, *il suffit alors*<sup>74</sup> de trouver une expression pour la longueur de tout élément linéaire infinitésimal  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  qui est situé en un point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Poursuite du raisonnement : dans l'infinitésimal et en un point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fixé, les rapports d'accroissement entre les composantes  $dx_i$  de l'élément infinitésimal en question le long d'une ligne donnée peuvent être considérés comme *constants*. Mais quand le point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  varie, ces rapports cessent d'être constants, et puisque les lignes sont libres de représenter, en un point donné quelconque, toutes les directions possibles qui passent par ce point, il en découle que les rapports d'accroissement infinitésimal le long d'une ligne doivent en fait *dépendre du point*, et donc aussi : *seulement* du point. Par conséquent, sous ces deux hypothèses fondamentales d'infinitésimalisation première et d'intégration seconde, Riemann a ramené la question géométrique de la genèse des rapports métriques à une question d'Analyse, à savoir : déterminer une *fonction* du lieu et de l'élément infinitésimal<sup>75</sup> :

$$\Omega = \Omega(x_1, \dots, x_n; dx_1, \dots, dx_n)$$

<sup>71</sup> En fait, dans l'en-tête (énigmatique) de ce paragraphe, Riemann aurait été probablement mieux inspiré d'annoncer cette infinitésimalisation comme l'une de ses hypothèses génétiques principales.

<sup>72</sup> — par laquelle il faudrait entendre plus rigoureusement une hypothèse de différentiabilité d'ordre au moins égal à 1 —

<sup>73</sup> À cause de ce recours à l'intégration — concept d'analyse encore problématique qui exige l'infini —, Engel et Lie objecteront p. 162 ci-dessous que les considérations de Riemann fournissent peu d'éclaircissements quant aux fondements de la géométrie purement élémentaire.

<sup>74</sup> Riemann recherche en effet des conditions seulement *suffisantes* pour la détermination des rapports métriques dans une multiplicité. À chaque fois qu'une hypothèse simplificatrice ou spécificatrice est admise, le choix d'une discontinuité conceptuelle estompe une fraction de la *nécessité* qui doit être corrélative de la *suffisance*.

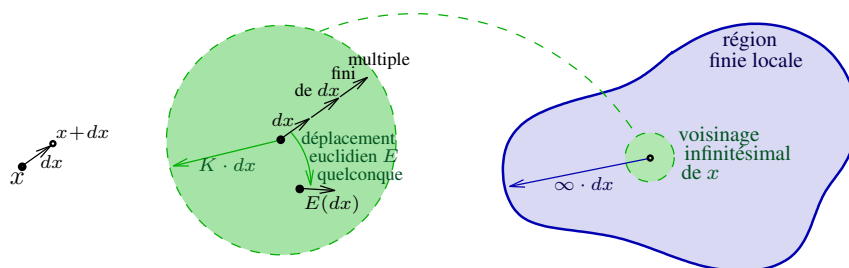
<sup>75</sup> Dans le § 100 p. 278 sq. ci-dessous que le lecteur est invité à lire en parallèle pour de plus amples éclaircissements (cf. aussi [168], pp. 409–412), Engel et Lie réexpérimentent les raisonnements de Riemann en utilisant un langage purement analytique. Par ailleurs, dans la recherche d'une expression fonctionnelle pour la métrique, ils traitent simultanément du cas local fini, inspiré de leur théorie des invariants, et du cas infinitésimal (Riemann).

la plus générale possible qui puisse fournir, en restriction sur les courbes quelconques, la longueur de n'importe quelle ligne tracée dans la multiplicité.

Autrement dit, la longueur en un point  $(x_1, \dots, x_n)$  d'un élément infinitésimal quelconque  $(dx_1, \dots, dx_n)$  attaché en ce point — que l'on note habituellement<sup>76</sup> «  $ds$  » — est égale à cette fonction pour l'instant inconnue :

$$\begin{aligned} ds &= \text{longueur}_x(dx) \\ &= \text{distance}(x, x + dx) \\ &= \Omega(x; dx). \end{aligned}$$

J'admettrai, en second lieu, que la longueur de l'élément linéaire, abstraction faite des quantités du second ordre, reste invariable, lorsque tous les points de cet élément subissent un même déplacement infiniment petit, ce qui implique en même temps que, si toutes les quantités  $dx$  croissent dans un même rapport, l'élément linéaire varie également dans ce même rapport. [133], p. 286.



Ici seulement — mais exclusivement à niveau infinitésimal — Riemann utilise l'hypothèse énigmatique d'après laquelle les lignes possèdent une longueur indépendamment de leur position. Ainsi, la longueur de  $dx$  doit être conservée lors de tout déplacement euclidien  $E$  qui est restreint à un voisinage infinitésimal de  $x$  :

$$\text{longueur}(dx) = \text{longueur}(E(dx)).$$

Donc dans l'infiniment petit, la métrique recherchée semble être supposée comme devant être euclidienne, ce qui équivaut à dire — on peut le démontrer — que la métrique est donnée par une forme quadratique différentielle positive. Mais ce serait brûler les étapes et omettre de découvrir de nouveaux noyaux conceptuels possibles dans le graphe problématique et virtuel des concepts métriques.

<sup>76</sup> Cette notation utilisée depuis le 18<sup>ème</sup> siècle et reprise par Gauss, réfère à la longueur d'un élément d'arc infinitésimal d'une courbe tracée dans le plan ou dans l'espace.

En effet, Riemann ne se sert en fait de son hypothèse mystérieuse (demandant que chaque ligne puisse être mesurée par toute autre ligne) que pour en déduire que la longueur d'un multiple entier fini  $k dx$  de  $dx$  est égale à  $k$  fois la longueur de  $dx$ <sup>77</sup>, et aussi en même temps, que la longueur de  $-dx$ <sup>78</sup> s'identifie à la longueur de  $dx$ .

Ensuite, par un argument de continuité qui pourrait consister à faire tendre  $k$  vers l'infini tout en rapetissant  $dx$  afin que  $k dx$  demeure une quantité infinitésimale, Riemann semble en déduire que la fonction  $\Omega(x; dx)$  pourra être n'importe quelle fonction homogène du premier degré en  $dx$ , à savoir qui satisfait<sup>79</sup> :

$$\Omega(x; \lambda dx) = |\lambda| \Omega(x; dx),$$

pour tout nombre réel fini  $\lambda$ . Or cette nouvelle conclusion provisoire ne nécessite absolument pas que les rapports métriques soient euclidiens dans l'infinitésimal. En effet, cette propriété demande seulement que les longueurs se dilatent dans l'infinitésimal de manière purement homothétique — exigence minimale qui laisse encore disponible une très grande généralité. On peut donc dire qu'à cet endroit-là (bien qu'il semble en avoir été clairement soucieux), Riemann n'a pas réellement pris le temps de resserrer les hypothèses minimales qui conduisent aux métriques dites de Finsler, nettement plus générales que les métriques riemanniennes (voir [154, 28, 6]).

La poursuite du raisonnement marque alors un revirement inattendu de la spéculation, puisqu'après fixation d'un point-origine  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , Riemann cherche maintenant une fonction *non infinitésimale* du lieu :

$$\Omega(x_1, \dots, x_n; x_1^0, \dots, x_n^0)$$

dont les ensembles de niveau  $\{x : \Omega(x; x^0) = \text{const.}\}$  s'identifient aux lieux équidistants de l'origine. En fait, ce retour au niveau macroscopique local fini va permettre de se rapprocher en pensée des différentielles *quadratiques* qui généralisent les métriques gaussiennes, car il

<sup>77</sup> — en effet,  $k dx$  s'obtient en mettant bout à bout  $k$  copies de  $dx$  dans la même direction que le  $dx$  de départ (voir le diagramme), et chacune de ces copies est tout simplement obtenue par une translation parallèle à  $dx$  dans le voisinage infinitésimal de  $x$  —

<sup>78</sup> — qui se déduit de  $dx$  par une transformation euclidienne standard, la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $dx$ , —

<sup>79</sup> Riemann sous-entend intuitivement qu'une telle fonction est en quelque sorte semi-explicite, voire localement développable en série entière par rapport à  $dx$ , puisqu'il se la représente comme une fonction homogène du premier degré en les quantités  $dx$  « dans laquelle les constantes arbitraires seront des fonctions continues de  $x$  ».



est alors tout à fait naturel que la *première différentielle par rapport à  $x$*  d'une telle fonction  $\Omega(x; x^0)$  doive nécessairement s'annuler<sup>80</sup> pour  $x = x^0$ , puisque toute notion de distance que l'on peut s'imaginer doit évidemment atteindre son minimum, égal à 0, au point de référence  $x = x^0$ . Le quadratique (ordre 2) comme successeur du linéaire (ordre 1) s'introduit donc seulement à travers le principe de stabilité existentielle des minima. On notera que presque immédiatement après avoir voulu passer au macroscopique, Riemann *réinfinésimalise* le raisonnement en considérant la différentielle  $d_x\Omega(x^0; x^0)$ .

Puisque cette première différentielle  $d_x\Omega(x^0; x^0)$  s'annule, le comportement quantitatif de  $\Omega(x; x^0)$ , lorsque  $x$  parcourt un voisinage infinitésimal de  $x^0$ , sera entièrement représenté par sa *différentielle seconde* :

$$d^2\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i \partial x_j}(x^0; x^0) dx_i dx_j.$$

Par construction, cette différentielle seconde donne donc une bonne approximation de type Taylor-Young pour la valeur :

$$\begin{aligned} \Omega(x^0 + dx; x^0) - \Omega(x^0; x^0) &= \Omega(x^0 + dx; x^0) - 0 \\ &= \text{longueur}_{x^0}(dx) \\ &= ds|_{x^0}. \end{aligned}$$

À présent, nouvelle bifurcation d'hypothèses : si tous les coefficients  $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i \partial x_j}(x^0; x^0)$  de cette différentielle seconde s'annulent, le développement devra se poursuivre jusqu'aux termes d'ordre 3. Mais comme tout produit  $dx_i dx_j dx_k$  de degré trois entre différentielles change de signe quand on change  $dx$  en  $-dx$ , et comme la fonction distance recherchée doit forcément être positive, il en découle que dans ce cas, la différentielle troisième  $d^3\Omega(x^0; x^0)$  doit donc nécessairement s'annuler. Ainsi, on doit alors tester si la différentielle *quatrième* ne s'annule pas, et ainsi de suite.

En toute généralité, ce raisonnement qui présuppose l'analyticité de la fonction  $\Omega$ , montre que la métrique infinitésimale recherchée doit s'identifier à la racine  $2k$ -ième d'une expression homogène de degré  $2k$

---

<sup>80</sup> Si une fonction  $\omega = \omega(x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  variables possède une dérivée partielle  $\frac{\partial\omega}{\partial x_i}$  qui ne s'annule pas en un point  $x^0$ , alors  $\omega$  croît ou décroît *strictement* (selon le signe de cette dérivée partielle) le long d'un petit segment affine parallèle à l'axe des  $x_i$  qui passe par  $x^0$ .

toujours positive dont les coefficients sont des fonctions de  $x$  :

$$ds = \sqrt[2\kappa]{\sum_{i_1, \dots, i_{2\kappa}=1}^n \omega_{i_1, \dots, i_{2\kappa}}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \cdots dx_{i_{2\kappa}}}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que de tels coefficients  $\omega_{i_1, \dots, i_{2\kappa}}$  sont complètement symétriques par rapport à leurs indices inférieurs, à savoir :

$$\omega_{i_1, \dots, i_{2\kappa}}(x) \equiv \omega_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(2\kappa)}}(x),$$

pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, 2\kappa\}$ .

Le cas le plus simple est bien sûr celui des formes différentielles *quadratiques* ( $2\kappa = 2$ ), pour lequel le carré  $ds^2$  de la longueur d'un élément infinitésimal quelconque de coordonnées non toutes nulles  $(dx_1, \dots, dx_n)$  basé en un point  $(x_1, \dots, x_n)$  est donné par une expression du second ordre en les  $dx_i$  :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_j$$

à coefficients des fonctions arbitraires  $g_{i,j} \equiv g_{j,i}$  de  $x$ , de telle sorte que la somme ne prenne que des valeurs strictement positives.

En conclusion, la genèse des métriques riemanniennes transcende tout acte de postulation axiomatique *a posteriori*. Problématisante, la genèse riemannienne procède par spécification progressive d'hypothèses qui sont hiérarchisées en ordre de généralité. Chaque choix engage la pensée dans un nouvel irréversible-synthétique.

La coprésence de ces bifurcations spéculatives indique *l'ouverture collatérale permanente de la pensée mathématique*. Au sein même du concept final de différentielle quadratique infinitésimale positive, le degré de liberté et d'arbitraire dans le choix des fonctions  $g_{i,j}(x)$  maintient l'ouverture intrinsèque du concept et le prédispose à une plasticité remarquable, confirmée par sa capacité à héberger des théories physiques aussi variées que la cristallographie, la mécanique des milieux continus, ou encore la théorie de la relativité généralisée.

**1.18. Surfaces de courbure constante.** Le travail de Gauss sur la théorie intrinsèque des surface a trouvé des continuateurs ([129, 135, 90]) à l'Université de Dorpat, maintenant Tartù, une ville de langue germanique située dans une province estonienne. Senff a publié en 1831

les formules qu'on attribue aujourd'hui à Frenet<sup>81</sup> ; Peterson a soutenu en 1853 une thèse sur les équations aujourd'hui attribuées à Mainardi-Codazzi ; et surtout Minding, figure la plus influente, a travaillé sur le développement des lignes courbes à l'intérieur de surfaces courbes, a introduit le concept de courbure géodésique, et a étudié les surfaces dont la courbure gaussienne est constante.

Pour ce qui nous intéresse, Minding a su exprimer la métrique gaussienne d'une surface de courbure constante  $\kappa > 0$  sous la forme<sup>82</sup> normalisée suivante :

$$ds^2 = dp^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin p\sqrt{\kappa}\right)^2 dq^2$$

ou lorsque  $-\kappa < 0$  sous la forme :

$$ds^2 = dp^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sinh p\sqrt{\kappa}\right)^2 dq^2$$

Le cas de la courbure nulle s'obtient en prenant la limite, lorsque  $\kappa$  tend vers zéro, de chacune de ces deux formules<sup>83</sup>, et l'on retrouve ainsi l'expression de la métrique pythagoricienne en coordonnées polaires (rayon  $p$ , angle  $q$ ) :  $ds^2 = dp^2 + p^2 dq^2$ .

Une autre expression normalisée des métriques gaussiennes de courbure constante était très vraisemblablement connue de Riemann,

<sup>81</sup> Pour une excellente présentation de la théorie des courbes et des surfaces dans l'espace à trois dimensions, nous renvoyons aux leçons de Do Carmo [37]. Les aspects philosophiques fins de l'émergence de la théorie des surfaces de Gauss ne pourront pas être abordés ici, et nous bornerons notre analyse à l'examen résumé de la façon dont Riemann semble être parvenu au concept de courbure, en nous basant sur Weyl ([170, 171]) et sur Spivak ([154]).

<sup>82</sup> Lorsque le  $ds^2$  est représentée en coordonnées polaires géodésiques sous la forme normalisée  $ds^2 = dp^2 + G(p, q) dq^2$ , sa courbure de Gauss s'exprime alors par la formule relativement simple :  $\kappa = \kappa(p) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial p^2}$ . Sachant que le signe de la dérivée seconde change suivant qu'on a affaire au sinus (tout court) :  $\frac{\partial^2}{\partial p^2} (\sin p\sqrt{\kappa}) = -\sqrt{\kappa}^2 \sin p\sqrt{\kappa}$ , ou au sinus hyperbolique :  $\frac{\partial^2}{\partial p^2} (\sinh p\sqrt{\kappa}) = \sqrt{\kappa}^2 \sinh p\sqrt{\kappa}$ , on retrouve effectivement  $\kappa$  dans le premier cas, et  $-\kappa$  dans le second cas.

<sup>83</sup> Rappelons que  $\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + \dots$  et que  $\sinh t = t + \frac{1}{6} t^3 + \dots$ , d'où  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin p\sqrt{\kappa} = p$  et aussi  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sinh p\sqrt{\kappa} = p$ .

et elle possède l'avantage remarquable, par rapport aux formules précédentes, de ne pas contraindre à distinguer plusieurs cas<sup>84</sup> :

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right]^2}.$$

Dans son *Habilitationsvortrag*, la seule formule significative que Riemann osera signaler à son auditoire d'universitaires issus de tous les horizons sera la généralisation évidente de cette expression à la dimension  $n$  quelconque :

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right]^2},$$

dans laquelle on peut immédiatement relire la formule précédente en égalant à zéro  $(n - 2)$  variables  $x_i$ .

### 1.19. Courbure sectionnelle de Riemann-Christoffel-Lipschitz.

*Question* : en passant à la dimension quelconque  $n \geq 2$  et pour des métriques quelconques, pourquoi Riemann a-t-il envisagé de prolonger la théorie de Gauss sous l'angle de la courbure dite *sectionnelle*, c'est-à-dire en *sectionnant* les multiplicité de dimension  $n$  par des *surfaces* de dimension 2 ? La *Commentatio* (cf. note p. 5) fournit une réponse qui témoigne clairement de l'enracinement de cette genèse dans la matrice du tridimensionnel.

L'expression  $\sqrt{\sum b_{i,i'} ds_i ds_{i'}}$  peut être envisagée comme l'élément linéaire dans un espace généralisé de  $n$  dimensions transcendant notre intuition. Si dans cet espace on trace toutes les lignes les plus courtes issues du point  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , dans lesquelles les éléments initiaux de variation des  $s$  sont comme les rapports  $\alpha ds_1 + \beta \delta s_1 : \alpha ds_2 + \beta \delta s_2 : \cdots : \alpha ds_n + \beta \delta s_n$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent des quantités arbitraires, alors ces lignes constituent une surface qui peut être développée dans l'espace de notre intuition commune<sup>85</sup>. [132], p. 382.

<sup>84</sup> Lorsque le  $ds^2$  est représenté en coordonnées isothermes sous la forme normalisée :  $ds^2 = \lambda^2(u, v)[du^2 + dv^2]$ , la courbure est donnée par une formule que Gauss possédait déjà en 1822 :

$$\kappa = \kappa(u, v) = -\frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} \right),$$

et qui apparaissait dans son *Copenhagen Preisschrift* sur les applications conformes qui lui a valu le prix de l'Académie de Copenhague ([90]). L'application de cette formule générale dans le cas où  $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4} + \kappa(x_1^2 + x_2^2)$  fournit effectivement la constante  $\kappa$ , quel que soit le nombre réel  $\kappa$  fixé à l'avance.

Nécessité pour la *pensée*, pour la *conception*, et surtout pour l'*intuition* : nécessité de ressaisir la courbure sous un angle bidimensionnel et gaussien, car le pluridimensionnel *nous transcende*. Étonnant coup de chance riemannien que confirmera pleinement la réinterprétation tensorielle : tous les invariants d'ordre deux d'une métrique quadratique infinitésimale peuvent être obtenus en se restreignant à des *surfaces* qu'on inscrit dans la variété et qu'on oriente à volonté dans des directions arbitraires.

Toutefois, la réduction s'arrête à la dimension 2, car le tranchage par des objets de dimension 1 rend la courbure invisible. En effet, chaque courbe (au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ ) est intrinsèquement équivalente (isométrique<sup>86</sup>) à un simple segment de droite : la *régression en dimension* du caractère *intrinsèque* de la courbure doit s'arrêter net à la dimension 2. Et inversement, le passage de la dimension 1 à la dimension 2 imposait un saut qualitatif inattendu que Gauss avait su découvrir : naissance de la courbure *intrinsèque* des surfaces, courbure qui demeure ponctuellement invariable dans toute transformation isométrique, alors que toutes les lignes tracées dans une surface sont dépossédées de toute rigidité intrinsèque.

Par ailleurs, la découverte de Gauss aurait pu faire croire qu'en dimension  $n \geq 3$ , d'autres phénomènes spécifiques et d'autres invariants inattendus nouveaux émergeraient, qui seraient eux aussi *propres aux*

<sup>85</sup> *Expressio*  $\sqrt{\sum b_{i,i'} ds_i ds_{i'}}$  *spectari potest tanquam elementum lineae in spatio generaliore n dimensionum nostrum intuitum transcendente. Quodsi in hoc spatio a puncto*  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  *ducantur omnes lineae brevissimae, in quarum elementis initialibus variationes ipsarum s sunt ut*  $\alpha ds_1 + \beta \delta s_1 : \alpha ds_2 + \beta \delta s_2 : \dots : \alpha ds_n + \beta \delta s_n$ , *denotantibus*  $\alpha$  *et*  $\beta$  *quantitates quaslibet, hae lineae superficiem constituent, quam in spatium vulgare nostro intuitui subjectum evolvere licet.* Ici, les deux éléments infinitésimaux  $(ds_1, ds_2, \dots, ds_n)$  et  $(\delta s_1, \delta s_2, \dots, \delta s_n)$  basés en un point de coordonnées  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  sont supposés être linéairement indépendants, et la combinaison linéaire générale :

$$(\alpha ds_1 + \beta \delta s_1, \alpha ds_2 + \beta \delta s_2, \dots, \alpha ds_n + \beta \delta s_n)$$

comprend alors tous les éléments linéaires contenus dans le plan qu'ils engendrent. Riemann considère donc la *surface* locale et finie qui est obtenue en intégrant toutes les géodésiques issues du point dans toutes ces directions et il s'imagine alors qu'une telle surface, interne à la multiplicité (variété) initiale, pourrait en être extraite afin de se réaliser visuellement dans un espace tridimensionnel auxiliaire. À partir de cet extrait, on pourrait même s'imaginer que l'invention riemannienne de la courbure par sectionnement obéissait à simple exigence d'appropriation intuitive.

<sup>86</sup> — grâce à la paramétrisation par longueur d'arc, ou à la rectification d'un lacet par le geste physique —

*dimensions supérieures.* Peut-être même sans qu'il s'en soit réellement douté, Riemann a-t-il été conduit à entrevoir la bidimensionnalité pure de la courbure. Seuls les travaux de Lipschitz et de Christoffel confirmeront cette intuition. Impossible donc de se faire une idée *a priori* de l'intrinsèque qui l'exempte de l'imprévisibilité contingente des nécessités latérales inscrites dans des modalités hypothétiques.

En toute dimension  $n \geq 2$ , Riemann va donc approcher le concept de courbure par sections de surfaces, domaine où la théorie de Gauss s'appliquera. C'est peut-être cette idée fondamentale qui a guidé le mystérieux calcul que la *Commentatio* (cf. note p. 5) nous transmet sans détails intermédiaires : faire vivre le bidimensionnel gaussien dans le multidimensionnel.

Soient en effet  $x = (x_1, \dots, x_n)$  des coordonnées (numériques) locales dans lesquelles le carré  $ds^2$  de la longueur de l'élément linéaire  $(dx_1, \dots, dx_n)$  basé au point  $x$  s'exprime par l'expression quadratique  $\sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(x) dx_i dx_j$ , le point central étant l'origine  $0 = (0, \dots, 0)$ . Riemann commence par effectuer un simple développement de Taylor à l'ordre deux de tous les coefficients métriques :

$$g_{i,j}(x) = g_{i,j}(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k}(0) x_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 g_{i,j}}{\partial x_k \partial x_l}(0) x_k x_l + \dots$$

Principe mathématique absolu : contracter, éliminer les termes superflus, rendre visible l'être dans sa plus simple expression. Tout d'abord, la diagonalisation des formes quadratiques définies positives à coefficients réels permet immédiatement, quitte à effectuer au préalable un changement linéaire de coordonnées, de supposer qu'on a à l'origine  $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ , d'où :

$$\sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(0) dx_i dx_j = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Si l'on introduit ces grandeurs, alors, pour des valeurs infiniment petites des  $x$ , le carré de l'élément linéaire sera  $= \sum dx^2$  ; le terme de l'ordre suivant dans ce carré sera égal à une fonction homogène du second degré des  $n \frac{n-1}{2}$  grandeurs  $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), (x_1 dx_3 - x_3 dx_1), \dots$ , c'est-à-dire qu'il sera un infiniment petit du quatrième ordre ; de telle sorte que l'on obtient une grandeur finie en divisant ce terme par le carré du triangle infiniment petit dont les sommets correspondent aux systèmes de valeurs  $(0, 0, 0, \dots), (x_1, x_2, x_3, \dots), (dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$  des variables.

[133], p. 289.

D'après Weyl [170] et Spivak [154], il semblerait que le principe de normalisation que Gauss avait élaboré en termes de coordonnées isothermes ait été repris et généralisé par Riemann. Aucun élément manuscrit ne nous est parvenu mais l'on peut penser<sup>87</sup> que Riemann se soit proposé d'examiner, en dimension  $n \geq 3$ , ce qui devait correspondre au lemme de Gauss sur l'orthogonalité des géodésiques. En tout cas, notons  $M$  la variété riemannienne, fixons un point  $p \in M$  et considérons  $n$  vecteurs  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  dans l'espace tangent  $T_p M$  à  $M$  en  $p$  qui forment une base orthonormée de  $T_p M$ . L'application exponentielle locale ([154, 38]) :

$$\exp: T_p M \rightarrow M$$

envoie tout vecteur  $X(p)$  de norme riemannienne  $g(X(p), X(p))^{1/2}$  suffisamment petite sur le point qui est situé à la distance  $g(X(p), X(p))^{1/2}$  — égale à cette norme — sur l'unique géodésique issue de  $p$  et dirigée par  $X(p)$ . Cette application définit un difféomorphisme local de  $T_p M$  sur  $M$  qui envoie l'origine  $0 \in T_p M$  sur  $p$ . Si l'on note maintenant  $\psi: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'isomorphisme de  $T_p M$  avec  $\mathbb{R}^n$  qui est automatiquement fourni avec la base orthonormale :

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \\ \exp \downarrow & & \psi(x_1 X_1(p) + \dots + x_n X_n(p)) := (x_1, \dots, x_n) \\ M & & \end{array}$$

alors l'application  $\psi \circ \exp^{-1}$  fournit un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $M$  qui sont appelées *coordonnées riemanniennes normales*. Toute autre base orthonormée de  $T_p M$  fournirait un système essentiellement équivalent de coordonnées locales. L'avantage principal de ces systèmes de coordonnées est de donner l'accès le plus direct aux quantités (tensorielles) de courbure, grâce à l'énoncé suivant, dont nous ne reconstituerons pas la démonstration.

**Proposition.** ([133, 170, 154]) *Dans tout système de coordonnées riemanniennes normales  $(x_1, \dots, x_n)$ , le développement de Taylor en  $x =$*

---

<sup>87</sup> C'est là toute la limite de l'histoire des mathématiques lorsque, trop pauvre en documents, mais consciente de la complexité des situations et de la richesse éventuelle des échanges purement verbaux entre acteurs, elle se trouve réduite à émettre une variété de conjectures qui finissent à terme par circonscrire toutes les éventualités d'un réel perdu.

0 des coefficients  $g_{i,j}(x)$  de la métrique :

$$g_{i,j}(x) = \delta_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 g_{i,j}}{\partial x_k \partial x_l}(0) x_k x_l + \dots,$$

supprime tous les termes  $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k}(0)$  d'ordre 1 et fait apparaître des termes d'ordre deux :

$$R_{i,j;k,l} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{i,j}}{\partial x_k \partial x_l}(0)$$

qui satisfont les relations de symétrie indicielle évidentes<sup>88</sup> :

$$R_{i,j;k,l} = R_{j,i;k,l} = R_{i,j;l,k}$$

ainsi que les symétries indicielles non triviales :

- (i)  $R_{i,j;k,l} = R_{k,l;i,j}$
- (ii)  $R_{i,j;k,l} + R_{i,l;j,k} + R_{i,k;l,j} = 0.$

Alors dans ces conditions, le développement de Taylor à l'ordre deux de la métrique quadratique infinitésimale :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(x) dx_i dx_j &= dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^n R_{i,j;k,l} (x_i dx_k - x_k dx_i) \cdot (x_j dx_l - x_l dx_j) \end{aligned}$$

peut être réécrit, à un facteur  $\frac{1}{3}$  près, comme une forme quadratique à coefficients  $R_{i,j;k,l}$  sur les coordonnées plückériennes :

$$\begin{vmatrix} x_{i_1} & dx_{i_1} \\ x_{i_2} & dx_{i_2} \end{vmatrix} = x_{i_1} dx_{i_2} - x_{i_2} dx_{i_1} \quad (1 \leq i_1 < i_2 \leq n)$$

du 2-plan engendré par les deux éléments infinitésimaux  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(dx_1, \dots, dx_n)$ .

Précisions l'interprétation géométrique. Riemann s'imagine un triangle infiniment petit variable (et surprenant) dans lequel non seulement  $(dx_1, \dots, dx_n)$ , mais encore  $(x_1, \dots, x_n)$  sont des quantités infinitésimales. Si l'on note donc ce deuxième élément infinitésimal

<sup>88</sup> — puisque  $g_{i,j} = g_{j,i}$  et que les deux dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}$  commutent.



$(\delta x_1, \dots, \delta x_n)$  avec un symbole  $\delta$  pour plus d'homogénéité conceptuelle, les termes d'ordre deux de la métrique s'écrivent alors comme une certaine forme quadratique :

$$\frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^n R_{i,j;k,l} (\delta x_i dx_k - \delta x_k dx_i) \cdot (\delta x_j dx_l - \delta x_l dx_j)$$

en les coordonnées plückériennes  $\delta x_{i_1} dx_{i_2} - \delta x_{i_2} dx_{i_1}$  du 2-plan infinitésimal engendré par  $(dx_1, \dots, dx_n)$  et  $(\delta x_1, \dots, \delta x_n)$  basés au point de référence. Pour obtenir la courbure de Gauss de la surface formée des géodésiques dirigées par le 2-plan  $\alpha dx + \beta \delta x$  (à un facteur constant près), il suffit de diviser cette expression par le carré de l'aire infinitésimale du triangle 0,  $dx$ ,  $\delta x$ . Il est quasiment certain que Riemann s'est inspiré de l'énoncé similaire en dimension 2 connu par les continuateurs de Gauss, et nous pouvons conclure que c'est *l'exigence de représentation intuitive d'une multiplicité par des tranches bidimensionnelles qui a conduit Riemann vers la courbure sectionnelle*.

**1.20. Caractérisation des variétés localement euclidiennes.** Le développement de Taylor dans des coordonnées géodésiques riemanniennes normales offre l'accès le plus direct aux composantes de courbure, mais cette approche présente l'inconvénient d'être confinée à un seul point. Dans la deuxième et dernière partie de la *Commentatio* ([132], pp. 380–383), Riemann cherche à réduire l'équation différentielle de la conduction de la chaleur :

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \sum_j b_{ij} \frac{\partial u}{\partial s_j} \right) = h \frac{\partial u}{\partial t}$$

à une forme la plus simple possible. Il ramène alors ce problème à la transformation d'une métrique quadratique :

$$\sum_{\iota, \iota'} b_{\iota, \iota'} ds_{\iota} ds_{\iota'}$$

en une métrique plate euclidienne  $\sum_{\iota, \iota'} a_{\iota, \iota'} ds_{\iota} ds_{\iota'}$  dont tous les  $a_{\iota, \iota'}$  sont constants, métrique qui est donc équivalente à  $ds_1^2 + \dots + ds_n^2$ . Par un calcul assez elliptique, Riemann trouve la condition nécessaire que pour toute collection de quatre indices  $\iota, \iota', \iota'', \iota'''$ , l'expression suivante :

$$(I) \quad 0 = \frac{\partial^2 b_{\iota, \iota''}}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 b_{\iota', \iota'''}}{\partial s_{\iota} \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota, \iota'''}}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota', \iota''}}{\partial s_{\iota} \partial s_{\iota'''}} \\ + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu'} (p_{\nu, \iota', \iota'''} p_{\nu', \iota, \iota''} - p_{\nu, \iota, \iota'''} p_{\nu', \iota', \iota''}) \frac{\beta_{\nu, \nu'}}{B},$$

doit s'annuler identiquement, où  $B = \det(b_{l,l'})$  et où  $(\frac{\beta_{l,l'}}{B})$  est l'inverse de  $(b_{l,l'})$ . Aucun argument ne vient supporter l'affirmation implicite que cette condition est aussi nécessaire, bien que l'*Habilitationsvortrag* ait énoncé une telle réciproque<sup>89</sup>. Ensuite, Riemann désigne par la notation :

$$(\iota', \iota''\iota''')$$

le membre de droite de cette équation et en quelques lignes « cryptiques », il prétend que la *variation seconde* de la métrique :

$$\delta\delta \sum b_{l,l'} ds_l ds_{l'} - 2d\delta \sum b_{l,l'} ds_l ds_{l'} + dd \sum b_{l,l'} \delta s_l \delta s_{l'}$$

peut être réécrite de façon à faire apparaître ces expressions à quatre indices :

$$(II) = \sum (\iota', \iota''\iota''') (ds_l \delta s_{l'} - ds_{l'} \delta s_l) (ds_{l''} \delta s_{l'''} - ds_{l'''} \delta s_{l''}).$$

Plus encore, le quotient de cette expression par l'aire infinitésimale au carré engendrée par  $ds$  et par  $\delta s$  :

$$(II) = \frac{-\frac{1}{2} \sum (\iota', \iota''\iota''') (ds_l \delta s_{l'} - ds_{l'} \delta s_l) (ds_{l''} \delta s_{l'''} - ds_{l'''} \delta s_{l''})}{\sum b_{l,l'} ds_l ds_{l'} \sum b_{l,l'} \delta s_l \delta s_{l'} - \left( \sum b_{l,l'} ds_l \delta s_{l'} \right)^2}$$

est un invariant. Ces affirmations sont énoncées de manière tellement elliptique et sans aucune vérification que nous n'avons pas d'autre possibilité que de nous imaginer que Riemann en contrôlait déjà parfaitement la justesse en dimension deux, grâce aux travaux de Gauss, Minding, Peterson.

<sup>89</sup> Spivak [154] élabore cinq démonstrations distinctes de cet énoncé fondamental.

**Théorème.** Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne de dimension  $n \geq 2$ , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- $(M, g)$  est localement isométrique à  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne ;
- toutes les composantes  $A_{ijk}^l$  du tenseur de courbure s'annulent identiquement ;
- en tout point, la forme quadratique de Riemann-Christoffel s'annule identiquement ;
- en tout point, la courbure sectionnelle de Riemann-Gauss s'annule suivant au moins  $\frac{n(n-1)}{2}$  directions superficielles indépendantes.

## Chapitre 2 : La mobilité helmholtzienne de la rigidité

**2.1. Le problème de Riemann-Helmholtz.** Dans le plan de son *Habilitationsvortrag*, après avoir exprimé son intention d'élaborer un concept général de multiplicité continue, Riemann annonce qu'il se préoccupera d'appliquer ces considérations abstraites à l'« espace ». Chez les géomètres du 19<sup>ème</sup> siècle, ce nom est strictement réservé à l'« espace physique réel » tridimensionnel et euclidien.

Rappelons notamment qu'au début des années 1820, Gauss a été conduit à mesurer le très grand triangle géodésique (et terrestre) Brocken – Hohehagen – Inselberg dans la campagne du royaume de Hanovre afin de « tester » la nature euclidienne de l'espace physique ([145, 147]). À cette époque-là, Gauss venait d'être nommé conseiller scientifique des gouvernements de Hanovre (dont dépendait Göttingen) et du Danemark pour l'établissement géodésique du cadastre, et il était déjà en pleine possession de sa théorie (extrinsèque) des surfaces. Aussi Riemann sait-il pertinemment que les propriétés par lesquelles l'espace physique se distingue de toute autre multiplicité abstraite à trois dimensions ne peuvent en effet être empruntées qu'à l'*expérience*.

De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples au moyen desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet, n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. [133], p. 281.

Ainsi, pour décider quelle est « la » géométrie de l'« espace », l'expérience est susceptible de trancher, mais à *l'avance*, par des considérations de géométrie pure, on peut *rechercher* mathématiquement les hypothèses les plus naturelles et les plus simples qui puissent caractériser complètement cette notion d'« espace physique », notion qui semble nous être donnée dans l'évidence de son euclidéanité présente. C'est donc dans le passage cité à l'instant, extrait du plan de l'*Habilitationsvortrag*, qu'est formulé (implicitement) le célèbre :

*Problème de Riemann-Helmholtz*

« *Problème* » et non « *théorème* », parce que ni Riemann ni Helmholtz ne l'ont réellement résolu, ce problème demande précisément par quelles propriétés l'espace euclidien tridimensionnel muni de la métrique pythagoricienne pourrait être caractérisé parmi *toutes* les géométries possibles. Mais au moment de soulever la question, Riemann était certainement très loin de soupçonner l'incroyable diversité des géométries que Sophus Lie allait découvrir par des procédés algébriques unifiées, engendrant malgré lui, à la suite du fameux *Programme d'Erlangen* ([86]), une prolifération de groupes et de sous-groupes de transformations (Chapitre 5).

*Le problème surgit de lui-même* : nécessité sybilline, assertion méta-mathématique, vision d'une question adéquate. Riemann, comme on le sait, suit tous les fils d'Ariane de l'ouverture. À la donation d'un sens univoque dans l'expérience physique du monde répond donc la surrection articulée des questionnements mathématiques purs. Fait d'« *expérience mathématique* » : les hypothèses abstraites possibles sont soumises à la variation, à la diversité, à la multiplication, à la ramification, et à l'éclatement.

Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses.

[133], p. 281.

**2.2. Incomplétudes riemanniennes.** Dans la troisième et dernière partie de son *Habilitationsvortrag*, Riemann annonce en quelques lignes qu'il a complètement résolu<sup>1</sup> le problème de caractériser l'espace euclidien standard parmi les multiplicités à trois dimensions munies d'une métrique quadratique infinitésimale définie positive.

Première solution, la plus simple et la plus économique sur le plan démonstratif : demander que la mesure de courbure sectionnelle soit nulle<sup>2</sup> en tout point suivant trois directions de surface indépendantes<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Deux raisons ont convaincu les mathématiciens des années 1868 à 1890 que le problème n'était en fait pas complètement résolu : 1) les assertions de Riemann n'ont jamais été suivies de démonstrations détaillées, même à titre posthume ; 2) les raisonnements de Helmholtz étaient entachés d'erreurs et d'imprécisions mathématiques.

<sup>2</sup> Cf. le § 1.20 ci-dessus.

<sup>3</sup> À notre connaissance, l'examen du *Nachlass* n'a fourni aucun document exploitable qui permette aux historiens des mathématiques de se faire une idée des démonstrations de Riemann. Contemporain de Klein, le bibliothécaire Distel de l'université de Göttingen savait en revanche que le *Nachlass* contenait des notes intéressantes sur la théorie des nombres et sur la distribution des zéros de la *fonction zeta de Riemann*,

Autrement dit, l'espace est localement euclidien *si et seulement si* sa courbure riemannienne s'annule identiquement. Dans ce cas, le théorème de Pythagore est alors satisfait pour tous les triangles rectangles finis situés dans n'importe quelle surface totalement géodésique, et aussi, la somme des angles de tout triangle quelconque est égale à  $\pi$ .

Deuxième « solution » : Riemann affirme que l'existence d'un groupe de mouvements isométriques qui permet de transférer un élément de surface quelconque basé en un point vers un autre élément de surface quelconque situé en un autre point arbitraire implique la constante de la mesure de courbure sectionnelle.

Si l'on suppose, en second lieu, comme Euclide, une existence indépendante de la position, non seulement pour les lignes, mais encore pour les corps, il s'ensuit que la mesure de courbure est partout constante, et alors la somme des angles est déterminée dans tous les triangles, lorsqu'elle l'est dans un seul. [133], p. 294.

L'argument intuitif est simple : un corp rigide bidimensionnel maximalement mobile suffira pour propager partout dans la multiplicité la courbure sectionnelle qu'il possède. Toutes les surfaces géodésiques en tout point orientées dans toute direction ont la même courbure : la courbure est *constante*. Alors dans cette circonstance et dans des coordonnées géodésiques normales adéquates<sup>4</sup>, Riemann représente la métrique par une formule (déjà mentionnée) invariante symétrique par rapport à toutes les variables :

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{\left[1 + \frac{\kappa}{4} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right]^2},$$

définie par  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  pour  $\text{Re } s > 1$  et que Riemann avait introduite dans l'espoir de démontrer que le nombre des nombres premiers inférieurs à un entier  $n \geq 2$  se comporte asymptotiquement comme  $\frac{\log n}{n}$ , ou mieux encore (Gauss), comme le logarithme intégral  $\int_2^n \frac{1}{\log x} dx$ . En 1932, après des tentatives de Bessel-Hagen, Siegel a étudié soigneusement ces notes manuscrites et il en a réorganisé le contenu dans un mémoire de refonte générale [149]. Toutefois, d'après Siegel : « In Riemanns Aufzeichnungen zur Theorie der Zetafunktion finden sich nirgendwo druckfertige Stellen ; mitunter stehen zusammenhanglose Formeln auf demselben Blatt ; häufig ist von Gleichungen nur eine Seite hingeschrieben ; stets fehlen Restabschätzungen und Konvergenzuntersuchungen, auch an wesentlichen Punkten ».

<sup>4</sup> Dans [170], Weyl a reconstitué les calculs qui auraient pu conduire Riemann à cette expression.

dans laquelle  $\kappa$  est une *constante réelle*, que l'on peut même supposer après dilatation être égale à  $-1$  (géométrie hyperbolique), à  $0$  (géométrie euclidienne) ou à  $1$  (géométrie sphérique). Dans un autre passage, Riemann fournit quelques explications.

Le caractère commun de ces variétés dont la mesure de courbure est constante, peut aussi être exprimé en disant que les figures peuvent se mouvoir<sup>5</sup> sans élargissement [Dehnung] en elles. Car il est évident que les figures en elles ne pourraient pas coulisser [verschiebar sein] et pivoter [drehbar sein] librement, si la mesure de courbure n'était pas la même en chaque point et dans toutes les directions. Mais d'autre part, les rapports métriques de la variété sont complètement déterminés par la mesure de courbure ; donc les rapports métriques autour d'un point et dans toutes les directions sont exactement les mêmes qu'autour d'un autre point, et par conséquent, à partir de ce premier point, les mêmes constructions peuvent être transférées, d'où il s'ensuit que, dans les variétés dont la mesure de courbure est constante, on peut donner aux figures chaque position quelconque. [133], p. 281.

Toutefois, au-delà du niveau intuitif, la conceptualisation mathématique rigoureuse de ces affirmations demeure essentiellement problématique pour Engel et pour Lie. Riemann semble exprimer que l'exigence d'après laquelle la mesure de courbure doit être partout constante possède la même signification que certaines exigences concernant la mobilité des figures. Dans un premier temps, Engel et Lie cherchent à restituer l'enchaînement des idées de Riemann d'une manière quelque peu plus précise, « quoique non absolument précise », ajoutent-ils immédiatement.

Riemann cherche, parmi les variétés dont la longueur d'un élément courbe a la forme (5), toutes celles dans lesquelles les figures peuvent occuper chaque position quelconque, c'est-à-dire, dans lesquelles les figures peuvent coulisser et tourner, sans subir d'élargissement. Il parvient à ce résultat que les variétés dont la mesure de courbure est constante en tous lieux sont les seules dans lesquelles les figures sont mobiles de cette manière. p. 280 ci-dessous.

Plusieurs problèmes de conceptualisation se dessinent donc : Qu'est-ce que le « mouvement » ? Qu'entend-on par « figures » ? Que veut dire « coulisser » ? Que veut dire « tourner » ? Que veut dire « sans subir d'élargissement » ? C'est le physicien allemand Hermann von Helmholtz qui va tenter en 1868 de donner un sens mathématique précis à ces notions intuitives.

<sup>5</sup> Note de Engel et Lie : « Ici à vrai dire, Riemann aurait même dû ajouter le mot 'librement' ».

**2.3. Rendre objectives les propositions de la géométrie.** Selon Lie<sup>6</sup>, le mérite principal de Helmholtz par rapport à Riemann est d'avoir explicitement construit la géométrie en stipulant un certain nombre d'*axiomes* (non problématisants) qui se rapportent à des collections de points *finiment éloignés les uns des autres*, sans utiliser la notion d'élément d'arc infinitésimal, et sans admettre de pouvoir disposer de la théorie de l'intégration. Autre mérite de cette méthode neuve : Helmholtz est le premier à avoir opéré avec la famille des mouvements de l'espace (à trois dimensions), tout en l'interprétant comme famille de transformations de la variété numérique sous-jacente. On trouve en effet chez Helmholtz les tous premiers concepts embryonnaires pour l'édification d'une théorie mathématique des groupes de mouvements dans l'espace, et il est très probable que son mémoire a été la pierre angulaire d'inspiration, de motivation, et de problématisation lorsque, deux ou trois années plus tard, Klein et Lie collaborèrent à l'élaboration du *Programme d'Erlangen* ([86])

Fortement stimulé par la publication posthume très récente de l'*Habilitationsvortrag* de Riemann<sup>7</sup>, Helmholtz déclare dans son mémoire [73] de juin 1868 qu'il conduit en privé depuis de nombreuses années des réflexions techniques sur la notion d'« espace ». Il se félicite aussi de trouver comme compagnon de pensée, dans ces investigations délicates sur les fondements de la géométrie, un mathématicien de l'envergure de Riemann, et il propose de présenter à la *königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* un système alternatif d'axiomes afin de développer une autre vision du problème mathématique de l'espace.

Pour Helmholtz qui a travaillé sur la physiologie et l'anatomie de l'œil, la question de l'origine et de la nature essentielle de nos intuitions générales de l'espace est primordiale. Plus précisément, il s'agit de déterminer dans quelle mesure les propositions de la géométrie possèdent un sens qui est *objectivement* valide. Et à l'opposé, il s'agit de savoir aussi quelle est la fraction des définitions et des conséquences des définitions qui dépend seulement de l'abstraction des descriptions mathématiques. Ces deux questions helmholtziennes ne peuvent certainement pas recevoir de réponse simple, car il y a un cercle mystérieux

<sup>6</sup> En parallèle, le lecteur pourra découvrir les *Remarques préliminaires* à la Division V, traduites en français p. 159 sq. ci-dessous.

<sup>7</sup> En fait, il obtint une copie des notes manuscrites que Schering avait prises sur le travail de Riemann. Schering s'est vu attribuer la chaire de Riemann en 1866.

de correspondances intuitives entre les représentations idéales des objets géométriques purs et leur portrait physique approximatif, imparfait et défectueux.

En tout cas pour Helmholtz — que l'on a pu considérer comme *résolument empiriste* ([33, 34]) —, notre intuition archaïque, concrète, évidente et profondément *non problématique* des objets dans le monde physique *doit être incarnée fidèlement dans les systèmes axiomatiques de la géométrie pure*. Le point de vue de Helmholtz est donc celui d'un penseur universel des sciences expérimentales qui admet deux faits fondamentaux transmis par l'expérience :

1) la mesure de l'espace est et ne peut être basée que sur l'observation de *congruences* entre des objets<sup>8</sup> ;

2) toute forme de congruence demande pour son effectuation qu'il existe des corps rigides, fixes en eux-mêmes, et qu'on puisse les déplacer comme des règles sans qu'ils changent ni de forme, ni de longueur<sup>9</sup>.

L'espace ubiquitaire est comme le milieu terrestre : baigné d'une atmosphère invisible, il n'oppose en principe aucune résistance à la libre mobilité des règles mesurantes. Corps mesurant et corps mesuré sont structurellement homologues, voire interchangeables. Dans ce monde homogène de corps rigides, l'essence fondamentale est la distance ; c'est aussi un principe d'équivalence ontologique.

<sup>8</sup> Par mise en congruence, il faut entendre tout procédé concret par lequel les deux extrémités d'un objet-étalon sont placées en coïncidence avec une paire de points repérables sur l'objet à mesurer ; ensuite si nécessaire, l'étalon invariable de mesure doit être reporté jusqu'à épuisement de l'extension de l'objet, un certain nombre de fois en fonction de la taille de l'objet. Lorsque la longueur cherchée n'est pas un multiple entier de l'objet-règle utilisé, graduations et subdivisions complètent alors le défaut restant. L'horizon microscopique borne rapidement l'effort de raffinement dans la mesure. Helmholtz affirme donc clairement que l'ontologie sous-jacente au mesurable repose sur l'équivalence, sur la comparaison, sur la sommation finie et sur la (sub)division. Le caractère archimédien de l'espace physique provient de ce qu'il héberge des essences rigides *arithmétisantes*.

<sup>9</sup> Sinon, si des corps mobiles devaient nécessairement changer de longueur lorsqu'ils sont déplacés d'un lieu vers un autre — la modification de leur longueur pouvant d'ailleurs même *a priori* dépendre du chemin qu'on leur fait emprunter —, il serait absolument impossible de parler d'une longueur comme résultat invariable d'une pluralité de mesures. « Les axiomes géométriques ne concernent pas les relations spatiales *per se*, mais ils impliquent aussi le comportement mécanique de nos corps *les plus rigides* lorsqu'ils sont déplacés » (cité p. 531 de [34]).



On a donc affaire à une théorie essentiellement active de la mesure qui semble s'imaginer comme absolument nécessaire un sujet porteur muni de règles et de réglettes, forcé de parcourir l'espace, depuis ses dimensions microscopiques jusqu'à ses dimensions astronomiques, afin de s'assurer par des moyens rigoureusement élémentaires que les distances relatives entre certains villages, que la superficie d'un appartement, que les dimensions d'un meuble à la vente, ou celles d'une boîte à bijoux, sont exactes au mètre près, au centimètre près, au millimètre près<sup>10</sup>.

Argument surprenant s'il en est : Helmholtz écarte la rectilinéarité des rayons de lumière comme principe de référence pour la mesure, parce que les aveugles à qui les vérités de la géométrie sont bien connues n'ont accès qu'aux congruences.

Donc je suppose dès le début que la mesure de l'espace soit possible par des congruences déterminées et je me propose comme but la tâche de rechercher la forme analytique la plus générale d'une variété multiplement étendue dans laquelle soient possibles les mouvements ayant la constitution ainsi demandée. [76], p. 41.

En fait, Helmholtz délimite pour ses recherches un objectif encore plus ciblé, moins susceptible de l'exposer à l'inattendu mathématique : il cherche en effet à formuler des hypothèses physiquement évidentes (qu'on appellerait aujourd'hui *axiomes*) afin de retrouver seulement l'espace euclidien tridimensionnel comme concept compris sous de tels axiomes. Approche axiomatique ou recherche d'un théorème d'unicité ? L'ambiguïté est réelle, d'autant plus que la mise au point d'hypothèses spécifiques qui impliquent l'euclidéanité sera complètement absorbée

---

<sup>10</sup> Ce point de vue qui s'imaginerait une universalisation possible de l'empiricité archaïque est à distinguer nettement du point de vue de Riemann, pour lequel la métrique est *intrinsèquement donnée dans l'infinitésimal* et ne nécessite *aucun parcours*, ni même aucun acte de mesure — si ce n'est pour estimer mathématiquement, par intégration, la longueur d'une ligne courbe finie — puisque *chaque différentielle infinitésimale  $dx$  est d'emblée accompagnée de sa longueur attributée*  $(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j)^{1/2}$ . Point crucial : *aucun déplacement de corps ou de réglette n'est requis*. Plus précisément : dans toute métrique riemannienne ou finslérienne, l'essence métrique est déjà décalquée sur l'étendue comme le serait une infinité d'étiquettes millimétriques disposées en tout point, et dans toutes les directions issues d'un point. Mariage entre l'*intrinsèque pur* et le champ physique possible : « Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui » ([133], p. 297).

par la théorie des groupes continus, qui montrera comment l'engendrement du divers déborde l'ontologie naïve des unicités initialement espérées (cf. le Chapitre 20 p. 166 ci-dessous).

**2.4. Les quatre axiomes de Helmholtz.** Helmholtz reconnaît que son approche qui consiste à introduire d'emblée la restriction de libre mobilité de corps rigides dans l'espace embrasse beaucoup moins de concepts que l'analyse problématisante de Riemann (cf. le Chapitre 1). Toutefois, il semble être embarrassé par l'extrême généralité des considérations abstraites de Riemann, qu'il préfère envisager comme une tentative de caractériser l'espace euclidien tridimensionnel en recherchant les meilleures hypothèses suffisantes. Ainsi a-t-il étudié de près la restriction finale de mobilité introduite par Riemann pour distinguer l'espace physique des autres multiplicités possibles, et il s'est interrogé sur la possibilité de placer au fondement de la géométrie ce qu'il considèrerait comme la conclusion principale de la leçon d'épreuve de Riemann, à savoir : les propriétés de libre mobilité dont Riemann prétendait qu'elles impliquent la constance de la courbure sectionnelle. En renversant complètement l'ordre de pensée riemannien<sup>11</sup>, Helmholtz procède donc presque d'une manière purement axiomatique au sens moderne du terme. Car en effet, au début de son mémoire [76], quatre « axiomes » concernant la notion d'espace<sup>12</sup>, sont explicitement formulés et admis comme hypothèses dans les démonstrations qui suivent.

I : Axiome de multiplicité numérique et de continuité des mouvements. Les éléments individuels (points) d'une multiplicité à  $n$  dimensions peuvent être spécifiés par la *mesure*<sup>13</sup> de exactement  $n$  grandeurs numériques réelles  $(x_1, \dots, x_n)$ . Le mouvement d'un point est représenté par une modification continue, et même suffisamment différentiable si nécessaire, de ses coordonnées. Tout est essentiellement local,

<sup>11</sup> Chercher dans l'ouverture, c'est s'élever dans un arbre exponentiel truffé de branchements imprévus et de bifurcations indécises. Prendre connaissance de vérités par l'axiomatique *a posteriori*, c'est descendre sans choix dans des branches qui canalisent la pensée.

<sup>12</sup> En parallèle, le lecteur pourra découvrir la traduction complète en français de ces axiomes, reproduits par Engel et Lie dans le § 91 du Chapitre 21, p. 221 ci-dessous ; ensuite, le § 92 p. 223 en offre une formulation mathématique très précise.

<sup>13</sup> Chez Helmholtz ([34]), les coordonnées ont un sens *métrique* : elles sont d'emblée accompagnées d'un étalon d'unité de mesure qui est représenté par la quantité 1.

implicitement plongé dans  $\mathbb{R}^n$ , sans phénomène topologique, sans discontinuité, sans condition au bord, sans contrainte spécifique. L'étude des exceptions est potentiellement réservée à des analyses ultérieures.

II : Axiome de l'existence des corps rigides mobiles. Cet axiome exprime l'idée nouvelle principale de Helmholtz. Pour que l'espace soit physiquement mesurable, on présuppose l'existence de systèmes de points rigides en eux-mêmes, et néanmoins susceptibles d'être déplacés (axiome III) :

*mobilité de la rigidité.*

Mais quelle est ici la définition mathématique précise de la « rigidité » ? Impossible de demander qu'il s'agisse d'une *distance*, au sens euclidien ou métrique du terme, puisque c'est justement l'euclidéanité locale que Helmholtz cherche à démontrer à partir d'axiomes abstraits et naturels.

Herméneutique *indécise* de la position d'hypothèses, ou nécessité de réaliser une *assomption en généralité* pour engendrer des essences hypothétiques d'ordre supérieur : il faut donc formuler un axiome qui ne demande presque rien d'explicite, et qui s'inscrive *a priori* dans un très grand univers de potentialités mathématiques.

L'espoir, *via* une démonstration synthétique éventuellement longue et difficile, est de se persuader qu'une notion très archaïque de « stabilité-rigidité » dans le mouvement redonnera celle qui semble la plus naturellement transmise dans l'expérience physique, à savoir la rigidité euclidienne. On est en pleine exploration métaphysique des conditions d'aprioricité du savoir physico-mathématique. On recherche en quelque sorte des signes qui confirmeraient l'existence de vérités profondes (et vraisemblablement cachées), lesquelles vérités profondes pourraient répondre à la question très importante d'un « pourquoi », à savoir : « *Pourquoi l'espace physique est-il tridimensionnel et euclidien* » ? Avec son hypothèse de corps rigides, Helmholtz recherche donc un « parce que » qui s'élève plus haut dans l'échelle métaphysique qu'une simple confirmation expérimentale basée sur des mesures microscopiques ou sur des mesures astronomiques.

La définition de Helmholtz est à la fois intuitive et très générale : il doit exister une certaine fonction à *deux arguments* qui est définie sur la totalité de toutes les paires de points appartenant au corps rigide et qui satisfait la propriété d'invariance suivante : pour toute paire de points fixée à l'avance, la valeur de cette fonction sur les deux points en question devra rester *invariable* au cours de tous les mouvements possibles (axiome III) du corps en question.

Plus encore que dans la théorie gaussienne des formes quadratiques à coefficients entiers, ou dans la théorie galoisienne des substitutions de racines, c'est vraiment dans l'univers des *mouvements continus* physico-mathématiques que l'Idée métaphysique d'*invariance* trouve son origine la plus profonde. Lie conceptualisera cette Idée dominatrice dans de nombreuses branches de sa théorie des groupes continus (équation invariante ; système d'équations aux dérivées partielles invariantes ; algèbres classifiantes d'invariants différentiels) en plaçant le concept à un très haut niveau d'abstraction : l'invariant peut être une fonction arbitraire, réelle ou complexe, souvent d'un très grand nombre d'arguments. Et dans les diverses solutions au problème de Riemann-Helmholtz qu'il expose avec Engel, Lie formulera la notion d'invariant<sup>14</sup>, *sans aucune référence implicite à la notion de distance* : pas de valeurs positives, pas d'inégalité du triangle.

Plus encore, Lie extraira de cet axiome helmholtzien plusieurs présuppositions implicites situées à l'interface entre l'axiome II et l'axiome III, et que Helmholtz déduisait à tort de ses axiomes incomplètement formulés : 1) l'invariant doit être non dégénéré ; 2) lorsqu'on fixe plusieurs points en position générale, les équations d'invariance relativement à ces points doivent être mutuellement indépendantes ; 3) les invariants de toute collection de  $s > 2$  points se déduisent des invariants entre paires de points, c'est-à-dire : il n'y a pas d'autres invariants que ceux qui existent entre les paires de points.

**III : Axiome de libre mobilité des corps rigides.** En s'inspirant de Riemann<sup>15</sup>, Helmholtz demande que les corps rigides puissent être déplacés continûment en tout lieu<sup>16</sup>, c'est-à-dire qu'un point quelconque spécifié à l'avance dans un corps rigide peut être transféré vers tout autre point de l'espace au moyen d'au moins un mouvement continu qui déplace le corps dans son intégralité tout en respectant sa rigidité interne.

<sup>14</sup> Voir l'équation (3) au début du Chapitre 20 et aussi la condition C) p. 236).

<sup>15</sup> Voir la citation p. 53.

<sup>16</sup> Cette condition est suffisante pour l'effectuation de mesures physiques au niveau macroscopique. Toutefois, de nombreux commentateurs (*cf.* par exemple [76, 33, 34]) ont insisté sur le fait que seule la mobilité de *réglattes* unidimensionnelles, et non la mobilité de corps rigides arbitraires, peut être invoquée comme *physiquement nécessaire* pour effectuer des mesures de distance dans le monde. Ce point de vue laisse néanmoins complètement de côté la question de savoir ce qu'il faut entendre *abstraitemment* par un déplacement de réglattes, et semble s'en remettre trop aisément à une intuition approximative de l'arpentage. Seule la théorie abstraite des groupes continus de transformations conceptualise les mouvements possibles des figures, qu'elles soient règles ou corps, finies ou infinitésimales.

Si l'on fait abstraction des conditions aux limites et des discontinuités éventuelles, les seules contraintes qui pourraient faire obstacle au mouvement ne peuvent provenir que des équations qui sont formées avec la fonction invariante entre paires de points, par exemple si l'on demande qu'un, ou deux, ou trois points, ou plus, du corps rigide restent entièrement fixés au cours du mouvement. Ensuite, Helmholtz entreprend de « démontrer<sup>17</sup> » que les mouvements d'un corps rigide comprennent exactement  $\frac{n(n+1)}{2}$  degrés de liberté, et donc notamment 6 dans le cas de l'espace physique euclidien (translations : 3 paramètres ; rotations : 3 paramètres).

Paradoxe : la notion de corps rigide continu comprenant une *infinité* de points en cohésion n'est donc pas pleinement utilisée dans ces raisonnements. Six points au maximum sont à distinguer. En tout cas, Engel et Lie démontreront rigoureusement cet énoncé sur le nombre  $\frac{n(n+1)}{2}$  de degrés de liberté, en analysant finement les hypothèses qui étaient implicites dans les axiomes II et III. Par ailleurs, en supposant beaucoup moins que Helmholtz<sup>18</sup>, le Chapitre 20 p. 166 ci-dessous commencera par une étude purement abstraite des groupes continus de transformations pour lesquels deux points ont un, et un seul invariant, tandis que  $s > 2$  points n'ont pas d'autre invariant que ceux qui se déduisent des paires de points qui sont contenus en eux, et cela, d'abord dans le domaine complexe, puis dans le domaine réel. Cette étude abstraite extrêmement recherchée sur le plan mathématique repose sur un très grand nombre de résultats contenus dans les trois volumes de la *Theorie der Transformationsgruppen*.

IV : Axiome de la monodromie ou de la périodicité des rotations des corps rigides. C'est l'axiome le plus controversé, car on verra<sup>19</sup> qu'il exclut trop aisément un très grand nombre de géométries possibles, au sens de Klein et Lie, c'est-à-dire de groupes de transformations « exotiques ». Lorsque  $(n - 1)$  points d'un corps rigide sont fixés en position générale, Helmholtz prétend (comme conséquence de

<sup>17</sup> Voir le §93 p. 235 ci-dessous pour une critique de Lie et Engel.

<sup>18</sup> « Le procédé de Lie a lieu entièrement *a priori* », écrit Jules Vuillemin p. 420 de [168].

<sup>19</sup> En infinitésimalisant le problème, Helmholtz va se ramener à considérer un système d'équations différentielles ordinaires  $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$  d'ordre 1 à coefficients  $a_{ij}$  constants, et l'axiome de monodromie va directement impliquer que la matrice  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ 1 \leq i \leq 3}}$  possède une valeur propre nulle, et deux valeurs propres imaginaires conjuguées  $\pm i\omega$ ,  $\omega > 0$ , ce qui fait que la matrice  $a_{ij}$  représente tout simplement une rotation dans l'espace euclidien à trois dimensions.

l'Axiome III) qu'il reste encore un, et un seul degré de liberté autorisant un mouvement continu ; ce mouvement dépend alors d'un, et d'un seul paramètre, et nous venons de signaler que Engel et Lie ont clarifié cette affirmation. L'axiome de monodromie demande alors que la « rotation<sup>20</sup> » (sans retour en arrière) du corps rigide autour de  $(n-1)$  de ses points supposés fixés doit le reconduire, au bout d'un temps fini, à sa position initiale : chaque point en lui revient coïncider avec la position qu'il occupait au début. Cet axiome qui exclut donc tout mouvement *en spirale* (contraction ou dilatation des « longueurs » après un tour) et tout mouvement *en hélice* (décalage le long d'un axe après un tour) semble parler un langage évident pour l'intuition euclidienne. Engel et Lie reformuleront cet axiome de manière un peu plus précise<sup>21</sup> en utilisant la notion de groupe à un paramètre, essentiellement absente du mémoire de Helmholtz.

**2.5. Linéarisation de l'isotropie.** Les métriques quadratiques de Gauss  $E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2$  et de Riemann  $\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j$  que Helmholtz cherche à ressaisir s'expriment en termes *infinitésimaux*, et c'est certainement pour cette raison que Helmholtz a considéré comme *naturel* d'interpréter tous ses axiomes directement dans l'infiniment petit<sup>22</sup>.

J'utiliserai les hypothèses II, III et IV seulement pour des points dont les différences de coordonnées infiniment petites. Aussi la congruence indépendante des limites sera supposée valide seulement pour des éléments spatiaux [76], pp. 44–45.

Examinons donc comment Helmholtz procède sur le plan mathématique. Soient  $(u, v, w)$  les coordonnées d'un point appartenant au corps rigide dans une première situation de ce corps, et soient  $(r, s, t)$  les coordonnées d'un même point dans une seconde situation du corps. Alors ces coordonnées  $(r, s, t)$  dépendent en toute généralité de  $(u, v, w)$  et de six constantes arbitraires qui expriment les degrés de liberté. Helmholtz sous-entend que  $(u, v, w) \mapsto (r, s, t)$  est un difféomorphisme — c'est

<sup>20</sup> La terminologie utilisée par Helmholtz montre que la démonstration mathématique *a priori* qu'il met en œuvre est sous-tendue, dans l'intuition explorante, par l'idée que l'on a déjà affaire au groupe orthogonal euclidien. Pour être rigoureux, il faudrait qualifier ce mouvement non pas de « rotation », mais de mouvement continu à un paramètre.

<sup>21</sup> Voir la condition E) p. 237 ci-dessous, qui exprime tout simplement que le mouvement à un paramètre encore possible est *périodique*.

<sup>22</sup> Ici se trouve son erreur d'inadvertance principale, cf. le § 2.6 ci-dessous.

une conséquence de la rigidité — et il écrit la transformation correspondante entre différentielles, donnée par une matrice jacobienne. Ensuite, il fixe le point  $(r, s, t)$  et il considère seulement toutes les transformations encore possibles du corps rigide qui envoient ce point  $(r, s, t)$  sur un point de coordonnées  $(\rho, \sigma, \tau)$  satisfaisant  $r = \rho, s = \sigma, t = \tau$ . Dans ce cas, la transformation entre les différentielles de coordonnées<sup>23</sup> :

$$(1) \quad \begin{cases} dr = A_0 d\rho + B_0 d\sigma + C_0 d\tau \\ ds = A_1 d\rho + B_1 d\sigma + C_1 d\tau \\ dt = A_2 d\rho + B_2 d\sigma + C_2 d\tau \end{cases}$$

incorpore neuf fonctions  $A_n, B_n, C_n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) qui dépendent encore de trois paramètres arbitraires<sup>24</sup> que Helmholtz note  $p', p''$  et  $p'''$ . Ces équations montrent comment sont transformés les éléments infinitésimaux basés au point fixé.

Dans ces trois équations (1), Helmholtz introduit alors les notations :

$$\begin{aligned} dr &= \varepsilon x & d\rho &= \varepsilon \xi \\ ds &= \varepsilon y & d\sigma &= \varepsilon \nu \\ dt &= \varepsilon z & d\tau &= \varepsilon \zeta, \end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  est une quantité infinitésimale que l'on peut visiblement supprimer en divisant de part et d'autre de chaque équation. De cette manière, on envisage les transformations dans l'infiniment petit comme des transformations *linéaires* agissant dans le domaine *fini*<sup>25</sup> :

$$(2) \quad \begin{cases} x = A_0 \xi + B_0 \nu + C_0 \zeta \\ y = A_1 \xi + B_1 \nu + C_1 \zeta \\ z = A_2 \xi + B_2 \nu + C_2 \zeta. \end{cases}$$

D'après Engel et Lie (§ 94 p. 237 ci-dessous), lorsque le point fixé est rapporté à l'origine d'un système de coordonnées  $(x, y, z)$ , le raisonnement de Helmholtz revient à effectuer un développement en série entière par rapport aux trois variables  $x, y$  et  $z$ , mais en supprimant

<sup>23</sup> En parallèle, on se reportera avantagusement à la discussion qu'en font Engel et Lie au début du § 94 p. 237, notamment aux équations (15), (16) et (16').

<sup>24</sup> Dans la théorie de Lie, cette donnée correspond essentiellement à considérer le sous-groupe d'isotropie d'un point  $(x_0, y_0, z_0)$  fixé.

<sup>25</sup> La division par  $\varepsilon$  agit comme un zoom infiniment puissant au point considéré. La matrice  $3 \times 3$  ainsi obtenue de fonctions de  $p', p'', p'''$  est localement inversible par construction.

tous les termes d'ordre  $\geq 2$ , ce qui donne un groupe linéaire homogène qu'ils écrivent quant à eux<sup>26</sup> :

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \\ y' = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z \\ z' = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z. \end{cases}$$

Ce sous-groupe du groupe linéaire homogène complet  $GL_3(\mathbb{R})$  indique alors comment sont transformées les droites (infiniment petites) passant par l'origine, lorsque le corps rigide pivote de toutes les manières possibles autour de son point fixe.

Ce groupe linéaire agissant au niveau infinitésimal constitue une découverte importante. En effet, la considération de telles transformations linéarisées (et projectivisées) en un point fixe constitue l'une des plus idées les plus efficaces que Lie a mises au point afin de classer groupes et sous-groupes de transformations (*voir* le Chapitre 5), et l'on peut s'imaginer que les considérations embryonnaires et « balbutiantes » de Helmholtz ont pu constituer pour Lie une source constante d'inspiration et de défi, un point d'orgue à atteindre, ce qui expliquerait peut-être la raison pour laquelle le chapitre sur le problème de Riemann-Helmholtz a été placé à l'extrême fin de la *Theorie der Transformationsgruppen*<sup>27</sup>.

Ainsi, comme il l'a annoncé au tout début de son exposition mathématique, Helmholtz applique « seulement » ses hypothèses à des points infiniment proches les uns des autres, comme si cette exigence semblait en demander *moins* que lorsqu'on les applique à un domaine d'extension *fini*, puisque la portée des axiomes serait de la sorte *restreinte* à un domaine d'extension encore plus petit. Toutefois, la circulation imparfaite entre l'infinitésimal et le fini va réserver des surprises à l'exploration rigoureuse en termes de contre-exemples.

**2.6. Critique par Lie de l'erreur principale de Helmholtz.** Engel et Lie interprètent les exigences helmholtziennes en termes de théorie des groupes continus de transformations<sup>28</sup>. En notant  $p = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $q := \frac{\partial}{\partial y}$  et

<sup>26</sup> — sous-groupe à trois paramètres de  $GL_3(\mathbb{R})$  —

<sup>27</sup> L'ultime Division VI du Volume III [42] de la *Theorie der Transformationsgruppen* comprend cinq chapitres consacrés à des considérations générales, historiques et méthodologiques qui reviennent en arrière sur l'ensemble de l'ouvrage.

<sup>28</sup> Le lecteur est renvoyé au Chapitre 4 et au § 85 p. 167 pour une présentation des éléments fondamentaux de la théorie ; sans cela, il peut aussi se reporter directement



$r := \frac{\partial}{\partial z}$  pour abrégier, soient :

$$X_k = \xi_k(x, y, z) p + \eta_k(x, y, z) q + \zeta_k(x, y, z) r \quad (k=1 \dots 6)$$

six transformations infinitésimales qui engendrent un groupe continu à six paramètres de transformations locales de l'espace réel à trois dimensions muni des coordonnées  $(x, y, z)$ , ce groupe étant supposé satisfaire les axiomes II, III et IV de Helmholtz. Le deuxième axiome : parfaite mobilité des corps rigides, demande notamment que le groupe soit transitif. De manière équivalente, en tout point donné à l'avance, les (champs de) vecteurs  $X_1, \dots, X_6$  engendrent l'espace tangent en ce point. Sans perte de généralité, on peut supposer que le système des coordonnées est centré au point considéré. Quitte à effectuer des combinaisons linéaires (pivot de Gauss), on peut supposer aussi que les trois premières transformations infinitésimales s'écrivent :

$$X_1 = p + \dots, \quad X_2 = q + \dots, \quad X_3 = r + \dots,$$

où les termes «  $+\dots$  » d'ordre supérieurs sont des restes de la forme<sup>29</sup>  $O(1) p + O(1) q + O(1) r$ , et aussi en même temps que les *trois* transformations infinitésimales linéairement indépendantes restantes s'annulent à l'origine, de telle sorte que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_k := & (\alpha_{k1} x + \alpha_{k2} y + \alpha_{k3} z + \dots) p + \\ & + (\beta_{k1} x + \beta_{k2} y + \beta_{k3} z + \dots) q + \\ & + (\gamma_{k1} x + \gamma_{k2} y + \gamma_{k3} z + \dots) r \\ & (k=4, 5, 6), \end{aligned}$$

où les termes «  $+\dots$  » d'ordre supérieur sont de la forme  $O(2) p + O(2) q + O(2) r$ , et où les  $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, \gamma_{kl}$  sont des constantes réelles. Engel et Lie introduisent alors le *groupe réduit* associé au groupe  $X_1, \dots, X_6$ , qui est formé des transformations infinitésimales  $p, q$  et  $r$  issues de  $X_1, X_2$  et  $X_3$  en supprimant purement et simplement tous les termes d'ordre  $\geq 1$ , avec les trois transformations d'ordre exactement égal à 1 :

$$\begin{aligned} L_k = & (\alpha_{k1} x + \alpha_{k2} y + \alpha_{k3} z) p + (\beta_{k1} x + \beta_{k2} y + \beta_{k3} z) q + \\ & + (\gamma_{k1} x + \gamma_{k2} y + \gamma_{k3} z) r \\ & (k=1, 2, 3), \end{aligned}$$

à la fin de ce paragraphe pour prendre connaissance de la teneur des contre-exemples de Lie.

<sup>29</sup> Ici, la notation  $O(1)$  désigne un reste analytique s'annulant pour  $x = y = z = 0$ ; de même, la notation  $O(2)$  désigne un reste analytique s'annulant, ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre 1, lorsque  $x = y = z = 0$ .

qui sont obtenues à partir de  $X_4, X_5$  et  $X_6$  en supprimant tous les termes d'ordre  $\geq 2$ . Alors l'hypothèse que les six transformations infinitésimales initiales  $X_1, \dots, X_6$  forment une algèbre de Lie<sup>30</sup> implique que les six transformations réduites  $p, q, r, L_1, L_2$  et  $L_3$  forment elles aussi une algèbre de Lie. Par conséquent, d'après le troisième théorème fondamental de Lie (§ 4.9), les six transformations infinitésimales réduites  $p, q, r, L_1, L_2$  et  $L_3$  engendrent à nouveau un groupe de transformations, qui constitue en fait un certain sous-groupe à six paramètres du groupe affine complet de l'espace à trois dimensions.

Par une série d'exemples que Lie avait déjà fait paraître en 1892 dans les *Comptes Rendus de l'Académie*, Engel et Lie montrent combien il est périlleux d'extrapoler les axiomes supposés valides dans des régions locales d'extension finie au sujet du comportement de points qui sont infiniment proches les uns des autres. Ainsi l'existence d'un, et d'un seul invariant généralisé (distance abstraite) entre paires de points ne se transfère-t-elle pas fidèlement d'un univers à l'autre. En effet, dans le § 94 p. 237 ci-dessous, Engel et Lie décrivent deux exemples élémentaires :

- un groupe  $X_1, \dots, X_6$  pour lequel deux points ont *un et un seul* invariant, alors que pour le groupe réduit  $p, q, r, L_1, L_2, L_3$ , deux points ont *deux* invariants fonctionnellement indépendants<sup>31</sup> ;
- un autre groupe  $X_1, \dots, X_6$  pour lequel deux points n'ont *aucun* invariant, alors que pour le groupe réduit  $p, q, r, L_1, L_2, L_3$ , deux points ont *un et un seul* invariant.

Voilà donc l'*erreur principale de Helmholtz* : supprimer « à la physicienne » tous les termes d'ordre supérieur à 1, ce qui détruit complètement l'harmonie euclidienne des corps rigides qui se donnait pour évidente à l'intuition. Et l'axiome de monodromie recèle un phénomène encore plus troublant. Dans le Théorème 37 p. 215 ci-dessous, sans utiliser les axiomes III et IV de Helmholtz, Engel et Lie trouvent abstraitement *onze groupes réels* pour lesquels deux points ont un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de point supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel. Au cours de cette recherche, ils découvrent un groupe particulier, le groupe (24) p. 243, qui satisfait l'axiome de monodromie, alors que son groupe réduit ne le satisfait pas : même l'axiome le plus

<sup>30</sup> Voir le § 4.9 et la note p. 241.

<sup>31</sup> La raison formelle de ces décalages de structure est simple d'un point de vue analytique : le passage du groupe (21) de dimension 6 au groupe réduit (21') du § 94 p. 237 supprime tellement de termes, que le groupe réduit devient de dimension 4 !

central dans les raisonnements mathématiques de Helmholtz est remis en cause dans le passage à l'infiniment petit !

Grâce aux exemples précédents, il a été suffisamment démontré que la supposition que Monsieur de Helmholtz a introduite tacitement [l'infinésimalisation] et qui a été décrite plus précisément aux pages 239 sq. [dans la traduction ci-dessous] est erronée. Et maintenant, comme ses considérations ultérieures prennent entièrement cette supposition comme point de départ et n'ont force de preuve que sur la base de cette supposition, nous parvenons donc au résultat que Monsieur de Helmholtz n'a pas démontré l'assertion qu'il énonce à la fin de son travail, à savoir : il n'a pas démontré que ses axiomes suffisent à caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens. p. 247 ci-dessous.

Cette observation conduit alors à contourner l'erreur principale de Helmholtz en supposant directement que les axiomes II, III et IV sont valides dans l'infiniment petit, c'est-à-dire plus précisément, que le groupe réduit les satisfait. On se ramène ainsi à un problème plus accessible : trouver, dans le groupe affine complet de l'espace à trois dimensions, tous les sous-groupes transitifs à six paramètres pour lesquels deux points ont un et un seul invariant et qui satisfont de plus l'axiome de monodromie. En utilisant toute la force de la théorie des groupes de transformations, Engel et Lie vérifieront que les conclusions de Helmholtz peuvent être rendus rigoureuses et véridiques par une voie différente (*voir* le § 2.8 ci-dessous). Et sans insister ici sur les erreurs mathématiques de Helmholtz<sup>32</sup>, eu égard à son but principal qui était de retrouver la métrique pythagoricienne tridimensionnelle  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  telle qu'elle était représentée dans l'infiniment petit par Gauss et par Riemann, l'approche qui consiste à infinitésimaliser d'emblée les quatre axiomes était tout à fait naturelle.

**2.7. Calculs helmholtziens.** Pour l'instant, reprenons maintenant les raisonnements mathématiques originaux de Helmholtz ([76]) que Lie ne cherchera pas à imiter<sup>33</sup>. Dans les équations de transformations linéaires homogènes (2), les quantités  $A_n, B_n, C_n$  dépendent de trois paramètres indépendants  $p', p''$  et  $p'''$ . Supposons alors que  $p', p''$  et  $p'''$  dépendent

<sup>32</sup> Le Chapitre 21 p. 220 ci-dessous y consacre déjà une analyse suffisamment minutieuse.

<sup>33</sup> Grande liberté de stratégie dans la théorie des groupes.

linéairement d'une variable « temporelle » auxiliaire notée  $\eta$ , introduisons les trois quotients différentiels :

$$\mathfrak{A}_n := \frac{d}{d\eta} \left( A_n(p'(\eta), p''(\eta), p'''(\eta)) \right) \quad (n=0, 1, 2),$$

et de même, introduisons les quotients différentiels analogues  $\mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n$  pour  $n = 0, 1, 2$ . En différentiant alors les équations (2) par rapport à  $\eta$ , on obtient des équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\eta} = \mathfrak{A}_0 \xi + \mathfrak{B}_0 v + \mathfrak{C}_0 \zeta \\ \frac{dy}{d\eta} = \mathfrak{A}_1 \xi + \mathfrak{B}_1 v + \mathfrak{C}_1 \zeta \\ \frac{dz}{d\eta} = \mathfrak{A}_2 \xi + \mathfrak{B}_2 v + \mathfrak{C}_2 \zeta, \end{cases}$$

dans lesquelles on peut réexprimer  $\xi, v, \zeta$  en fonction de  $x, y, z$  en inversant le système (2), ce qui donne un système homogène d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\eta} = a_0 x + b_0 y + c_0 z \\ \frac{dy}{d\eta} = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \frac{dz}{d\eta} = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \end{cases}$$

avec certaines fonctions  $a_n, b_n, c_n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) du paramètre individuel  $\eta$ . Les paramètres initiaux  $p', p'', p'''$  étant au nombre de trois, on peut en fait obtenir trois tels systèmes indépendants en choisissant la dépendance (supposée linéaire) par rapport à  $\eta$  de ces paramètres le long de trois directions de droite qui sont indépendantes (*cf.* ce qui va suivre).

Dans un passage difficile à déchiffrer dont le contenu fut ensuite très largement englobé par la théorie de Lie des transformations infinitésimales associées à un groupe linéaire homogène, Helmholtz montre que les fonctions  $a_n, b_n, c_n$  sont en fait *constantes*. Ainsi peut-on appliquer au système (3) ci-dessus les théorèmes bien connus de la théorie des systèmes d'ordre 1 à coefficients constants.

Par ailleurs, en supposant l'existence d'un, et d'un seul invariant pour toute paire de points relativement au groupe d'isotropie linéarisé (validité de l'axiome II dans l'infinitésimal), Helmholtz affirme dans un

court passage tout aussi délicat<sup>34</sup> que le déterminant du système doit s'annuler :

$$(4) \quad 0 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Dans son approche du problème, Helmholtz semble connaître et maîtriser la théorie qui permet de résoudre les systèmes linéaires homogènes d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1, théorie que Lie appliquera ensuite très fréquemment. Résumons brièvement les résultats dans un langage contemporain, en admettant le théorème de réduction des matrices à une forme normale de Jordan (*cf.* [20] pour un historique).

L'annulation du déterminant montre qu'une valeur propre au moins de la matrice vaut zéro. Helmholtz démontre avec clarté que les deux autres valeurs propres  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  (éventuellement égales) sont nécessairement imaginaires pures conjuguées l'une de l'autre<sup>35</sup> et non nulles. En effet, la solution au système (3) de condition initiale le point  $(x_0, y_0, z_0)$  est donnée par l'exponentielle de matrice  $e^{Mt}$  appliquée à ce point, vu comme vecteur colonne. Après un changement de base éventuel, les trois éléments diagonaux de la matrice  $e^{Mt}$  sont :  $e^{0t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$  et  $e^{\lambda_3 t}$ . Dès que la partie réelle de  $\lambda_2$  ou celle de  $\lambda_3$  est non nulle, il est impossible que le mouvement à un paramètre représenté par le système (3) soit périodique, comme le demande l'axiome de monodromie, puisque

<sup>34</sup> Paul Hertz, qui a bénéficié d'échanges épistolaires avec le professeur Engel, reconstitue l'argument ([76], pp. 67–68). Pour tout deuxième point  $(x_0, y_0, z_0)$  distinct de l'origine, le troisième axiome helmholtzien demande qu'un mouvement à un paramètre soit encore possible. Puisque les quantités numériques  $p', p'', p'''$  et  $x_0, y_0, z_0$  sont toutes deux au nombre de trois, Helmholtz semble admettre que tous les systèmes (3) correspondent biunivoquement avec les mouvements qui fixent deux points distincts. Alors pour tout tel deuxième point donné  $(x_0, y_0, z_0)$  distinct de l'origine, on doit pouvoir choisir une certaine dépendance linéaire de  $(p', p'', p''')$  par rapport à un paramètre  $\eta$  tel que le système (3) décrive précisément tous les mouvements fixant l'origine et le deuxième point  $(x_0, y_0, z_0)$ . On en déduit donc un système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx_0}{d\eta} = a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 z_0 \\ 0 &= \frac{dy_0}{d\eta} = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 \\ 0 &= \frac{dz_0}{d\eta} = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 \end{aligned}$$

qui implique l'annulation du déterminant (4).

<sup>35</sup> Ceci découle directement du fait que la matrice est réelle. Comme ses valeurs propres sont alors distinctes, elle est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

$e^{(a+ib)t}$  diverge lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ , suivant le signe de  $a$ , lorsque  $a \neq 0$ . Enfin, le cas où *toutes* les valeurs propres sont nulles ne se produit pas : ou bien la forme normale de Jordan de  $M$  est identiquement nulle, d'où tous les points restent au repos (cas exclu par l'axiome de mobilité) ; ou bien cette forme normale est nilpotente, et le mouvement s'éloigne polynomialement vers l'infini<sup>36</sup>.

Ainsi, dans de nouvelles coordonnées appropriées, le système peut être écrit sous une forme normale simplifiée :

$$\frac{dX}{d\eta} = 0, \quad \frac{dY}{d\eta} = -\omega Z \quad \frac{dZ}{d\eta} = \omega Y.$$

Sans surprise, on retrouve les équations différentielles d'une rotation euclidienne d'axe  $\{Y = Z = 0\}$ . À la très grande généralité initiale du propos de Helmholtz succède donc la considération de mouvements qui étaient déjà fort bien compris dans les mathématiques et dans la mécanique de l'époque. Lie au contraire replacera l'ambition de généralité à un niveau largement supérieur. L'axiome de monodromie qui semblait intuitivement si évident impose donc une condition extrêmement forte qui permet d'éliminer presque tous les systèmes (3), excepté ceux qui fournissent des rotations euclidiennes.

Ensuite, en modifiant convenablement la dépendance de  $(p', p'', p''')$  par rapport à  $\eta$ , Helmholtz prétend que l'on obtient deux autres rotations le long des deux axes  $\{X = Z = 0\}$  et  $\{X = Y = 0\}$  qu'il écrit sous la forme générale suivante, en introduisant deux nouvelles directions unidimensionnelles  $\eta'$  et  $\eta''$  dans l'espace des paramètres  $(p', p'', p''')$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{d\eta'} = \alpha_0 X + 0 + \gamma_0 Z \\ \frac{dY}{d\eta'} = \alpha_1 X + 0 + \gamma_1 Z \\ \frac{dZ}{d\eta'} = \alpha_2 X + 0 + \gamma_2 Z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{d\eta''} = \mathbf{a}_0 X + \mathbf{b}_0 Y + 0 \\ \frac{dY}{d\eta''} = \mathbf{a}_1 X + \mathbf{b}_1 Y + 0 \\ \frac{dZ}{d\eta''} = \mathbf{a}_2 X + \mathbf{b}_2 Y + 0. \end{array} \right.$$

Pour chacun de ces deux systèmes, le déterminant correspondant (4) doit s'annuler, et en particulier, la trace matricielle doit être nulle :

$$0 = \alpha_0 + \gamma_2 \quad \text{et} \quad 0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_1.$$

<sup>36</sup> Dans de nouvelles coordonnées normalisantes  $(X, Y, Z)$ , le système s'écrit :  $\frac{dZ}{dt} = 0$ ,  $\frac{dY}{dt} = Z$  et  $\frac{dX}{dt} = \varepsilon Y$ , avec  $\varepsilon = 0$  ou  $= 1$  suivant que le rang de la matrice (nilpotente)  $M$  est égal à 1 ou à 2. L'intégration donne un mouvement :  $Z = Z_0$ ,  $Y = Y_0 + Z_0 t$ ,  $X = \varepsilon(X_0 + Y_0 t + \frac{1}{2} Z_0 t^2)$  qui n'est pas périodique.

Ensuite, Helmholtz utilise un argument indirect qu'il aurait pu présenter de manière nettement plus limpide sur le plan technique : par linéarité supposée de la dépendance de  $(p', p'', p''')$  par rapport à  $\eta$ ,  $\eta'$  et  $\eta''$ , le système obtenu par sommation de deux quelconques systèmes parmi les trois systèmes considérés doit encore constituer un système du même type, de telle sorte que le déterminant correspondant (4) doit à nouveau s'annuler. Cet argument combiné à un argument d'homogénéité des équations obtenues par rapport aux constantes qui interviennent dans chaque système permet à Helmholtz de déduire que<sup>37</sup> :

$$0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \gamma_2 \quad \text{et} \quad 0 = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2,$$

et que :

$$(5) \quad 0 = \gamma_0 \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_0 \alpha_2.$$

Enfin, en formant la somme des trois systèmes après annulation de ces six constantes et en réappliquant l'argument d'annulation nécessaire du déterminant (4), Helmholtz montre que<sup>38</sup> :

$$0 = \gamma_1 \quad \text{et} \quad 0 = \mathfrak{b}_2.$$

Pour terminer, en posant :

$$\alpha_2 = -\phi, \quad \gamma_0 = \kappa\phi, \quad \mathfrak{a}_1 = \psi,$$

d'où il découle grâce à (5) que :

$$\mathfrak{b}_0 = -\kappa\psi,$$

<sup>37</sup> Le raisonnement devrait converger vers le fait que la matrice combinaison linéaire générale des trois systèmes en question n'est autre qu'une matrice  $3 \times 3$  antisymétrique quelconque, quoiqu'un tel énoncé parlant soit en fait absent du mémoire de Helmholtz.

<sup>38</sup> L'étude de la matrice combinaison linéaire générale des trois systèmes s'arrête là. Fait surprenant : Helmholtz qui semble être conscient de retrouver les équations différentielles du groupe des rotations qui fixent un point dans l'espace tridimensionnel ne poursuit néanmoins pas le raisonnement de normalisation des constantes, et il oublie de convoquer à nouveau le fait que les deux valeurs propres non nulles de chaque système doivent être imaginaires conjuguées, ce qui lui aurait donné les équations finales :  $\mathfrak{b}_0 = -\mathfrak{a}_1$  et  $\gamma_0 = -\alpha_2$ . À l'inverse chez Engel et Lie, le souci de complétion absolue de la pensée technique ne laisse dans l'ombre aucun calcul en vue des harmonies formelles conclusives.

Helmholtz obtient le système complet de toutes les transformations possibles qui fixent l'origine :

$$\begin{cases} dX = 0 + \kappa\phi Z d\eta' - \kappa\psi Y d\eta'' \\ dY = -\omega Z d\eta + 0 + \psi X d\eta'' \\ dZ = \omega Y d\eta - \phi X d\eta' + 0. \end{cases}$$

Ici, la quantité  $\kappa$  doit être positive pour que les valeurs propres non nulles soit imaginaires pures conjuguées l'une de l'autre. Helmholtz observe alors qu'il découle de ce dernier système que la quantité suivante s'annule :

$$\frac{1}{\kappa} X dX + Y dY + Z dZ = 0,$$

c'est-à-dire après intégration :

$$X^2 + \kappa Y^2 + \kappa Z^2 = \text{const.}$$

Le facteur positif  $\kappa$  peut être supprimé en remplaçant  $Y$ ,  $Z$  par  $\sqrt{\kappa} Y$ ,  $\sqrt{\kappa} Z$ , et l'on retrouve les équations de la famille des sphères euclidiennes centrées en l'origine.

**2.8. Insuffisances et reprises.** Helmholtz semble être satisfait par cette conclusion, mais deux erreurs éventuelles peuvent encore être commises.

Premièrement, par construction, les quantités  $x$ ,  $y$ ,  $z$  puis  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  qui s'en déduisent par combinaison linéaire demeurent *infinitésimales*. On ne retrouve donc la métrique pythagoricienne que dans l'infiniment petit, et il est à nouveau absolument hors de question d'en déduire que cette métrique vaut dans le domaine local fini, voire dans le domaine global. D'ailleurs, toute métrique riemannienne quelconque est infinitésimalement équivalente à une métrique euclidienne : la conclusion de Helmholtz ne prouve donc que le caractère infinitésimalement riemannien de la métrique, ce dont Helmholtz semble être néanmoins conscient dans le dernier paragraphe de son mémoire.

Mais deuxièmement, Helmholtz prétend qu'il a en fait exploré la conséquence de la mobilité des corps rigides dans l'extension locale finie en tenant compte de la courbure riemannienne, et il annonce alors *sans aucune démonstration* le résultat final de ses investigations. D'après lui, si les axiomes I à IV sont satisfaits en toute généralité dans le domaine fini, alors la seule géométrie correspondante serait celle qui prévaut sur une sphère de rayon  $R$  dans un espace à quatre dimensions muni des coordonnées réelles  $(X, Y, Z, S)$  d'équation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + (S + R)^2 = R^2,$$



le cas  $R = \infty$  correspondant à la géométrie euclidienne. Et puisque dans une telle famille, tous les cas où  $R < \infty$  fournissent une géométrie sur l'espace d'une sphère tridimensionnelle qui est *compact*, Helmholtz a cru pouvoir caractériser pleinement la géométrie euclidienne en ajoutant deux axiomes<sup>39</sup> :

- V : L'espace possède trois dimensions.
- VI : L'espace est infini en extension.

Malheureusement, dans une lettre datant du 24 avril 1869, Eugenio Beltrami informait Helmholtz de la consistance éclatante de la géométrie de Lobatchevskiï grâce à sa réalisation sur une *pseudosphère infinie tridimensionnelle*. Helmholtz était ainsi contredit. Pour conclure, on retiendra l'énoncé suivant, qui laisse encore essentiellement ouverte la question soulevée par Riemann.

**Proposition de Helmholtz.** *En supposant que la libre mobilité des corps rigides et l'axiome de monodromie valent tous deux au niveau infinitésimal, le sous-groupe d'isotropie linéarisé de tout point quelconque est isomorphe à  $SO_3(\mathbb{R})$ .*

### 2.9. L'approche infinitésimale systématique de Engel et de Lie.

Engel et Lie donneront au moins trois solutions distinctes au problème de Riemann-Helmholtz. La première (§ 95 p. 248 ci-dessous) rebondit sur la pétition de principe helmholtzienne en proposant tout simplement de formuler directement les axiomes au niveau infinitésimal. Mais une différence majeure s'introduit : on ne suppose alors *nullement* l'existence d'une fonction de deux points quelconques dont la valeur demeure invariante dans les mouvements (rigidité).

Tout d'abord<sup>40</sup>, Engel et Lie partent de l'hypothèse que l'espace est une variété numérique (locale) à trois dimensions et que les mouvements de cet espace forment un groupe continu de transformations (locales) qui est transitif et à six paramètres. Soient  $X_1, \dots, X_6$  six transformations infinitésimales linéairement indépendantes et fermées par crochet de Lie dans l'espace des  $(x, y, z)$  qui engendrent un tel groupe. Comme le groupe est transitif, si l'on fixe un point réel  $(x_0, y_0, z_0)$  en position générale, il existe exactement 3 transformations infinitésimales linéairement indépendantes dont les combinaisons engendrent l'espace

<sup>39</sup> Implicitement, le premier de ces deux derniers axiomes avait déjà été admis.

<sup>40</sup> La lecture de ce dernier paragraphe nécessite une connaissance préalable des fondements de la théorie de Lie qui seront exposées en détail dans les Chapitres 4 et 5 ci-dessous.

des  $(x, y, z)$  en ce point, et il existe aussi 3 = 6 - 3 autres transformations infinitésimales indépendantes s'annulant en ce point qui sont de la forme :

$$\begin{aligned} Y_k = & (\alpha_{k1}(x - x_0) + \alpha_{k2}(y - y_0) + \alpha_{k3}(z - z_0) + \cdots) p + \\ & + (\beta_{k1}(x - x_0) + \beta_{k2}(y - y_0) + \beta_{k3}(z - z_0) + \cdots) q + \\ & + (\gamma_{k1}(x - x_0) + \gamma_{k2}(y - y_0) + \gamma_{k3}(z - z_0) + \cdots) r \\ & (k = 123), \end{aligned}$$

où par convention, les termes « + ... » s'annulent à l'ordre au moins deux en  $(x_0, y_0, z_0)$ . En supprimant purement et simplement tous ces restes, on obtient trois générateurs (qui peuvent éventuellement devenir linéairement *dépendants*) :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k = & (\alpha_{k1}(x - x_0) + \alpha_{k2}(y - y_0) + \alpha_{k3}(z - z_0)) p + \\ & + (\beta_{k1}(x - x_0) + \beta_{k2}(y - y_0) + \beta_{k3}(z - z_0)) q + \\ & + (\gamma_{k1}(x - x_0) + \gamma_{k2}(y - y_0) + \gamma_{k3}(z - z_0)) r \\ & (k = 123), \end{aligned}$$

d'un sous-groupe<sup>41</sup> linéaire de  $GL_3(\mathbb{R})$ . Ce sous-groupe (dit *réduit*) détermine de quelle manière les éléments linéaires infinitésimaux  $(dx, dy, dz)$  sont transformés par les transformations du groupe qui fixent le point  $(x_0, y_0, z_0)$  considéré.

Le troisième axiome p. 248 demande que ce sous-groupe d'isotropie linéarisée demeure à trois paramètres. Toutefois, aucune existence d'invariant n'est postulée. Enfin, le quatrième axiome p. 248 demande que *tout* sous-groupe à *un* paramètre de ce groupe linéaire homogène à trois dimensions soit constitué de mouvements qui agissent *périodiquement* sur les éléments linéaires passant par l'origine<sup>42</sup>. Plus précisément, pour tout sous-groupe à un paramètre dudit groupe d'isotropie

<sup>41</sup> Les relations de crochets de Lie  $[Y_j, Y_k] = \sum_{s=1}^3 c_{jks} Y_s$  où les  $c_{jks}$  sont des constantes réelles, sont en effet directement héritées par les transformations réduites :  $[\bar{Y}_j, \bar{Y}_k] = \sum_{s=1}^3 c_{jks} \bar{Y}_s$  parce que dans le groupe, il n'existe aucune transformation infinitésimale s'annulant à l'ordre deux en  $(x_0, y_0, z_0)$ .

<sup>42</sup> En première apparence, cette condition semble donc légèrement plus exigeante qu'un axiome de monodromie qui serait formulé au niveau infinitésimal, en tant qu'un tel axiome ne devrait porter que sur les sous-groupes à un paramètre qui fixent un deuxième point. Par ailleurs, cette condition est légèrement plus générale, en tant que l'on ne demande pas que l'élément linéaire revienne coïncider exactement avec lui-même après un temps fini : on autorise les dilatations éventuelles.

linéarisée, tout élément linéaire subit une transformation qui le ramène à se retrouver dans la même direction après un temps fini.

Dans ces conditions, si l'on demandait de plus que chaque élément linéaire revienne coïncider avec lui-même après un temps fini, le raisonnement de Helmholtz s'appliquerait encore à quelques modifications mineures près. En effet, soit  $Y := \lambda_1 \bar{Y}_1 + \lambda_2 \bar{Y}_2 + \lambda_3 \bar{Y}_3$  une combinaison linéaire quelconque des  $\bar{Y}_k$  à coefficients réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non tous nuls. Les valeurs propres de la matrice  $3 \times 3$  des coefficients (réels) de  $\bar{Y}$  par rapport à  $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$  sont ou bien réelles, ou bien complexes conjuguées par paires, et jamais toutes nulles puisque le groupe linéaire réduit  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3$  est de dimension trois. Lorsqu'elles ne sont pas toutes réelles, deux seulement peuvent être complexes conjuguées<sup>43</sup>, la dernière étant réelle. Par un raisonnement basée sur la forme normale de Jordan de cette matrice (comme chez Helmholtz), on se convainc alors aisément que la périodicité stricte du mouvement n'est possible que si deux valeurs propres sont imaginaires *pures* non nulles conjuguées l'une de l'autre, tandis que la troisième est nécessairement *nulle*. En appliquant cet énoncé à  $\bar{Y} = \bar{Y}_k$  pour  $k = 1, 2, 3$ , on trouve alors trois rotations d'axes linéairement indépendants qui engendrent le groupe  $SO_3(\mathbb{R})$  : c'est le groupe d'isotropie linéarisée en tout point, première étape de la démonstration (la seconde étape est en fait absente chez Helmholtz).

Toutefois, ce n'est pas du tout de cette manière-là que Engel et Lie approchent le problème. Dans cette Division V terminale de leur ouvrage, ils peuvent se « payer le luxe » de convoquer pleinement les théorèmes de classification qu'ils ont mis au point auparavant afin de faire voir que la caractérisation des groupes d'isotropie linéarisée tombe comme un fruit mûr par un simple examen des listes et des théorèmes qui ont été établis précédemment.

En effet (*cf.* le § 95 p. 248 ci-dessous), l'isotropie linéarisée d'un point en position générale que l'on place au centre (*i.e.* à l'origine) d'un nouveau système de coordonnées  $(x'_1, x'_2, x'_n)$  sera représentée par trois générateurs infinitésimaux indépendants :

$$\sum_{\mu\nu}^{1,2,3} \alpha_{k\mu\nu} x'_\mu p'_\nu \quad (k = 1, 2, 3),$$

<sup>43</sup> — puisque 3 est le nombre total de valeurs propres comptées avec multiplicité —

où l'on a noté  $p'_\mu := \frac{\partial}{\partial x'_\mu}$ , qui forment une algèbre de Lie que nous noterons  $g'$ . Comme l'action est linéaire, elle se transmet à l'espace projectif  $P(\mathbb{R}^3) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  et l'on obtient une nouvelle algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  dont on peut représenter les générateurs dans un système de coordonnées inhomogènes  $(\mathfrak{x}, \eta)$ . Seule la dilatation  $x'_1 p'_1 + x'_2 p'_2 + x'_3 p'_3$  disparaît lorsqu'on projectivise<sup>44</sup>, et donc la dimension de  $\mathfrak{g}$  vaut deux s'il existe une combinaison linéaire des générateurs de  $g'$  qui est égale à cette dilatation (ce cas sera exclu dans un instant), et elle vaut trois sinon.

Deux pièces maîtresses entrent alors en scène. Nous avons signalé que l'axiome le plus important par sa puissance de restriction demandait que chaque mouvement à un paramètre soient périodique sur les éléments linéaires, à un facteur dilatant près. Quand on projectivise, le facteur dilatant disparaît, chaque point subit un mouvement rigoureusement périodique — à moins qu'il ne reste fixe —, et cela impose notamment que tous les points décrivent une courbe fermée. Mais une telle circonstance ne se produit que très rarement.

Tout d'abord, en dimension 2 et bien avant que n'apparaisse le problème de Riemann-Helmholtz, Engel et Lie avaient déjà classifié *toutes* les transformations infinitésimales projectives réelles à changement de coordonnées projective près. Il y en a sept (cf. (30) p. 250 ci-dessous), et c'est la première pièce maîtresse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p} + \eta \mathfrak{q}; \quad \mathfrak{p} + \mathfrak{x} \mathfrak{q}; \quad \eta \mathfrak{q}; \quad \mathfrak{q}; \\ \mathfrak{x} \mathfrak{p} + \mathfrak{c} \eta \mathfrak{q} \quad (\mathfrak{c} \neq 0, 1); \quad \eta \mathfrak{p} - \mathfrak{x} \mathfrak{q} + \mathfrak{c} (\mathfrak{x} \mathfrak{p} + \eta \mathfrak{q}) \quad (\mathfrak{c} \neq 0); \\ \eta \mathfrak{p} - \mathfrak{x} \mathfrak{q}. \end{array} \right.$$

Ici,  $(\mathfrak{x}, \eta)$  sont des coordonnées inhomogènes sur  $P_2(\mathbb{R})$  et  $\mathfrak{p} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}$ ,  $\mathfrak{q} = \frac{\partial}{\partial \eta}$ . On vérifie que les cinq premières transformations sont exclues, parce que chacune d'entre elle laisse globalement invariante au moins une droite projective sur laquelle la transformation infinitésimale se ramène, si l'on note  $x$  une coordonnée indépendante sur une telle droite : 1) ou bien à  $\frac{\partial}{\partial x}$  ; 2) ou bien à  $x \frac{\partial}{\partial x}$  ; et alors il est clair dans les deux cas que les courbes intégrales correspondantes :  $x(t) = x_0 + t$  et  $x(t) = x_0 e^t$  ne sont *pas* périodiques. La sixième transformation :

$$\text{rotation} + \mathfrak{c} \cdot \text{dilatation} = \eta \mathfrak{p} - \mathfrak{x} \mathfrak{q} + \mathfrak{c} (\mathfrak{x} \mathfrak{p} + \eta \mathfrak{q}) \quad (\mathfrak{c} \neq 0)$$

est elle aussi exclue, puisque tout point est entraîné autour de l'origine par la présence du facteur de rotation, tout en étant attiré (ou repulsé)

<sup>44</sup> Elle seule donne la transformation projective infinitésimale identiquement nulle.

par le facteur de dilatation : tout mouvement s'effectue en spirale, sans périodiser.

Enfin, la septième et dernière transformation infinitésimale :  $\eta \mathfrak{p} - \mathfrak{r} \mathfrak{q}$  engendre le groupe des rotations, qui convient parfaitement.

L'utilisation de la deuxième pièce maîtresse est encore plus magistrale. Dans les chapitres précédents du Volume III de la *Theorie der Transformationsgruppen*, Engel et Lie avaient en effet déjà classifié toutes les sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{R})$  du groupe projectif réel en dimension deux. Il leur suffit alors d'examiner, dans cette liste remarquable et complète, seulement les algèbres de Lie à deux ou trois paramètres pour exclure systématiquement toutes celles qui contiennent une transformation infinitésimale de l'une des six formes précédentes. Cet examen presque instantané montre qu'il existe *un seul* groupe projectif réel à trois paramètres qui convient, à savoir :

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{r} (\mathfrak{r} \mathfrak{p} + \eta \mathfrak{q}), \quad \mathfrak{q} + \eta (\mathfrak{r} \mathfrak{p} + \eta \mathfrak{q}), \quad \eta \mathfrak{p} - \mathfrak{r} \mathfrak{q},$$

et ce groupe n'est autre que le projectivisé du groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions, à une seule ambiguïté près : la présence éventuelle d'un facteur de dilatation qui aurait disparu par projectivisation. Autrement dit, si on revient aux coordonnées homogènes initiales  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , les trois générateurs de l'isotropie linéarisée doivent forcément être de la forme :

$$x'_\mu p'_\nu - x'_\nu p'_\mu + \alpha_{\mu\nu} (x'_1 p'_1 + x'_2 p'_2 + x'_3 p'_3) \\ (\mu, \nu = 1, 2, 3; \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\nu\mu} = 0).$$

Mais alors un simple examen de la condition que ces trois transformations infinitésimales doivent être fermées par crochet montre (*voir* la note p. 252 ci-dessous) que toutes les constantes  $\alpha_{\mu\nu}$  doivent en fait être nulles. En définitive, Engel et Lie ont essentiellement<sup>45</sup> redémontré la proposition de Helmholtz p. 73 avec de purs moyens de théorie des groupes.

Maintenant que l'isotropie linéarisée est caractérisée et connue, il reste à rechercher tous les groupes transitifs à six paramètres dont l'isotropie linéarisée est constituée du groupe des rotations euclidiennes dans l'espace :

$$x'_1 p'_2 - x'_2 p'_1, \quad x'_1 p'_3 - x'_3 p'_1, \quad x'_2 p'_3 - x'_3 p'_2.$$

<sup>45</sup> Rappelons toutefois que les hypothèses sont légèrement différentes.

Cette dernière étape de la démonstration, que Helmholtz n'a absolument pas traitée, comme nous l'avons vu, Lie l'a complétée en détail, en appliquant les résultats de son traité.

**Théorème de Lie.** (cf. p. 268) *Si un groupe réel continu de l'espace à trois dimensions est transitif à six paramètres et si le groupe d'isotropie linéarisée de tout point est formé des rotations euclidiennes, alors ce groupe est équivalent, via une transformation ponctuelle réelle de cet espace, soit au groupe des déplacements euclidiens de l'espace des  $(x, y, z)$  :*

$$p, \quad q, \quad r, \quad xq - yp, \quad xr - zp, \quad yr - zq,$$

*soit à l'un des deux groupes à six paramètres de mouvements non-euclidiens :*

$$\begin{aligned} & x_2 p_1 - x_1 p_2, \quad x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad x_3 p_2 - x_2 p_3, \\ & x_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) \pm p_1, \quad x_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) \pm p_2, \\ & x_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) \pm p_3, \end{aligned}$$

*par lequel la surface imaginaire :  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm 1 = 0$  reste invariante<sup>46</sup>.*

---

<sup>46</sup> On vérifie en effet aisément que les trois premières transformations infinitésimales annulent identiquement l'équation, tandis que les trois dernières reproduisent l'équation au facteur  $2x_k$  près,  $k = 1, 2, 3$ .

## Partie II : Introduction mathématique à la théorie de Lie

### Prologue : Trois principes de pensée qui gouvernent la théorie de Lie

**Transformations ponctuelles paramétrées.** Soient  $x = (x_1, \dots, x_n)$  des coordonnées sur l'espace réel ou complexe  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  de dimension  $n \geq 1$ . Si  $(x'_1, \dots, x'_n)$  sont des coordonnées sur une seconde copie auxiliaire d'un même espace réel ou complexe à  $n$  dimensions, on peut considérer les applications :

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

définies dans le premier espace et à valeurs dans le second espace, où les  $f_i$  sont des fonctions quelconques de leurs  $n$  arguments  $(x_1, \dots, x_n)$ . L'application :

$$x \mapsto f(x) = x'$$

est alors appelée une *transformation ponctuelle* lorsqu'elle transforme de manière biunivoque et différentiable<sup>1</sup> la totalité des points  $(x_1, \dots, x_n)$  de l'espace-source en des points  $(x'_1, \dots, x'_n)$  de l'espace d'arrivée de telle sorte que son application inverse :

$$x' \mapsto f^{-1}(x') = x$$

soit elle aussi différentiable<sup>2</sup> et biunivoque. Aujourd'hui, on dit que  $x \mapsto f(x) = x'$  est un difféomorphisme (de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ , respectivement). Plus généralement, on considère des difféomorphismes entre sous-ensembles ouverts quelconques  $U$  et  $U'$  (de  $\mathbb{R}^n$  ou de  $\mathbb{C}^n$ ).

Dans la théorie de Lie des groupes continus de transformations, l'objet-archétype est constitué de *transformations ponctuelles* :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n),$$

---

<sup>1</sup> Au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est-à-dire que chaque composante  $f_i$  de l'application possède des dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$  dans toutes les directions de coordonnées  $x_k$ , et que ces dérivées partielles sont partout *continues*.

<sup>2</sup> À nouveau : au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ .

qui sont de plus *paramétrées* par un nombre fini  $r$  de paramètres réels ou complexes  $(a_1, \dots, a_r)$ , à savoir pour chaque  $a$  fixé, chaque application :

$$x' = f(x; a) =: f_a(x)$$

est supposée constituer un *difféomorphisme* d'un certain domaine<sup>3</sup> de l'espace-source sur un autre domaine situé dans un espace d'arrivée ayant la même dimension  $n$  et muni de coordonnées  $(x'_1, \dots, x'_n)$ . Ainsi, le déterminant jacobien :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \text{Perm}_n} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \frac{\partial f_2}{\partial x_{\sigma(2)}} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma(n)}}$$

ne s'annule en aucun point du domaine source. Avant d'introduire les axiomes de groupe (voir § 4.2), la première question à résoudre est : de combien de paramètres exactement les transformations  $x'_i = f_i(x; a)$  dépendent-elles réellement ? Certains paramètres pourraient en effet être superflus, et devraient à ce titre être supprimés à l'avance. Or à cette fin, il est crucial de formuler explicitement dès le début et une fois pour toutes *trois principes de pensée concernant l'admission des hypothèses fondamentales qui gouvernent la théorie des groupes continus développée par Lie*.

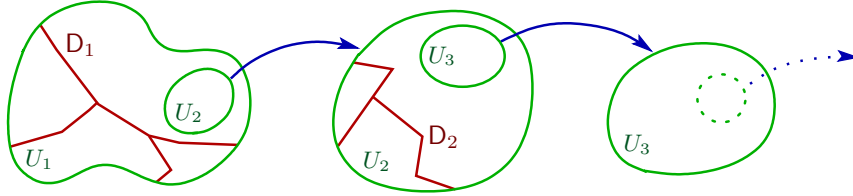
**Hypothèse générale d'analyticité :** Courbes, surfaces, variétés, sous-variétés, équations de transformation, groupes, sous-groupes, *etc.*, tous les objets mathématiques de la théorie seront supposés *analytiques* (réels ou complexes), c'est-à-dire que les fonctions qui les représentent dans des systèmes de coordonnées locales seront systématiquement supposées développables en série entière convergente dans un certain domaine de  $\mathbb{R}^k$  ou de  $\mathbb{C}^k$ , pour un certain  $k \geq 1$ .

**Principe de relocalisation libre au voisinage d'un point générique :** Considérons un objet mathématique local représenté par des fonctions qui sont analytiques dans un domaine  $U_1$ , et supposons qu'un certain « bon » comportement « générique » se produise dans  $U_1 \setminus D_1$  en dehors d'un certain sous-ensemble analytique  $D_1 \subset U_1$  ; par exemple, l'inversion d'une matrice carrée qui est constituée de fonctions analytiques est possible seulement en dehors de l'ensemble  $D_1$  des zéros de son

<sup>3</sup> D'après une définition standard de topologie générale, un *domaine* est un ouvert *connexe* non vide.



déterminant<sup>4</sup>, qui est une fonction analytique. Alors on s'autorise à relocaliser les considérations dans tout sous-domaine  $U_2 \subset U_1 \setminus D_1$ .



Ensuite, dans  $U_2$ , des raisonnements ultérieurs peuvent demander que l'on évite un autre sous-ensemble analytique propre  $D_2$ , et donc l'on doit à nouveau relocaliser les considérations dans un sous-domaine  $U_3 \subset U_2 \setminus D_2$ , et ainsi de suite. La plupart des démonstrations de la *Théorie des groupes de transformations*, et tout particulièrement les

<sup>4</sup> Plus généralement, considérons une matrice rectangulaire  $G(y) := (g_i^j(y))_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$  de taille  $n \times m$  dont les éléments  $g_i^j = g_i^j(y)$  sont des fonctions analytiques d'un certain nombre de variables  $y = (y_1, \dots, y_q)$  qui sont définies dans un certain domaine  $U$  de  $\mathbb{C}^q$  (ou de  $\mathbb{R}^q$ ). Pour tout entier  $\rho$  tel que  $1 \leq \rho \leq \min(m, n)$ , on peut former la collection de tous les déterminants de taille  $\rho \times \rho$  (mineurs) qui sont extraits de cette matrice :

$$\Delta_{i_1, \dots, i_\rho}^{j_1, \dots, j_\rho}(y) := \begin{vmatrix} g_{i_1}^{j_1}(y) & \cdots & g_{i_1}^{j_\rho}(y) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i_\rho}^{j_1}(y) & \cdots & g_{i_\rho}^{j_\rho}(y) \end{vmatrix}.$$

En partant de  $\rho := \min(m, n)$ , si tous ces déterminants sont identiquement nuls (en tant que fonctions de la variable  $y$ ), on passe alors de la taille  $\rho$  à la taille juste inférieure  $\rho - 1$ , on forme tous les mineurs, on teste leur annulation identique, et on recommence. Le *rang générique*  $\rho^*$  de la matrice  $G(y)$  est alors le plus grand entier  $\rho$  tel qu'il existe au moins un tel mineur non identiquement nul, tous les mineurs d'une taille strictement supérieure étant identiquement nuls. On a  $\rho^* = 0$  si et seulement si toutes les fonctions  $g_i^j(y)$  sont nulles (cas inintéressant), et sinon, on a en toute généralité :  $1 \leq \rho^* \leq \min(m, n)$ . Enfin, si l'on introduit le lieu :

$$D^* := \left\{ y \in \mathbb{C}^q : \Delta_{i_1, \dots, i_{\rho^*}}^{j_1, \dots, j_{\rho^*}}(y) = 0, \forall i_1, \dots, i_{\rho^*}, \forall j_1, \dots, j_{\rho^*} \right\}$$

des points  $y$  en lesquels tous les mineurs de taille  $\rho^* \times \rho^*$  s'annulent, alors ce lieu  $D^*$  est un sous-ensemble analytique *propre* — en particulier fermé et de complémentaire  $U \setminus D^*$  ouvert et dense — qui a par définition la propriété qu'en tout point  $y \in U \setminus D^*$ , au moins un mineur de taille  $\rho^* \times \rho^*$  ne s'annule pas, et comme tous les mineurs de taille strictement supérieure s'annulent identiquement par construction, on en déduit la propriété remarquable : *en tout point  $y \in U \setminus D^*$ , le rang de la matrice  $G(y)$  est maximal, égal à son rang générique  $\rho^*$* . Cas particulier : lorsqu'on a une matrice carrée de déterminant non identiquement nul, i.e.  $\rho^* = m = n$ , cette matrice est inversible en tout point  $y \in U \setminus D^*$ .

théorèmes de classification, autorisent un certain nombre de telles relocalisations, souvent sans aucune mention de la part de Engel et Lie, un tel *acte de pensée* étant considéré comme justifié à l'avance par la nécessité d'*étudier en premier lieu les objets génériques*, eux-mêmes déjà extrêmement riches et diversifiés.

Toutefois, lorsque nous traduirons et ré-énoncerons au Chapitre 5 les principaux (et magistraux) théorèmes de classification qui, dans le Tome III, précèdent les solutions complexes qu'Engel et Lie apportent au problème de Riemann-Helmholtz, nous rappellerons explicitement, précisément et rigoureusement toutes les hypothèses de généralité qui sont requises pour la validité des résultats, afin qu'il ne subsiste aucune ambiguïté d'interprétation pour le lecteur contemporain.

**Ne nommer aucun domaine d'existence :** Sans introduire de dénomination ou de notation spécifique, Engel et Lie écrivent ordinairement *le* voisinage [der *Umgebung*] d'un point (ou au sens absolu), de la même manière que l'on parle *du* voisinage d'une maison, ou *des* environs d'une ville, tandis que la topologie contemporaine conceptualise *un* voisinage (habituellement « petit »), parmi une infinité de voisinages existants. Contrairement à ce que la mythologie formaliste du 20<sup>ème</sup> siècle aime à faire accroire depuis les controverses entre les géomètres de Leipzig et l'école de Berlin, Engel et Lie ont toujours mis en évidence, lorsque c'était nécessaire, la nature locale des concepts de la théorie des groupes de transformations. Nous illustrerons notamment cette constatation en étudiant les tentatives que Lie a entreprises pour économiser l'axiome d'existence des éléments inverses dans sa théorie des groupes continus de transformations (§ 4.3). Certes, il est vrai que les résultats de Lie, gagneraient en précision technique à être énoncés en spécifiant tous les domaines d'existence, mais il est plausible que Engel et Lie ait rapidement réalisé que le fait de ne pas donner de nom aux voisinages, et d'éviter de la sorte tout symbolisme essentiellement superflu, était le moyen le plus efficace pour conduire à leur terme des théorèmes de classification de grande envergure.

En conséquence, nous adopterons le style (économique) de pensée de Engel et Lie, et nous présumerons, sans pour autant effectuer des rappels fréquents, que :

- tous les objets mathématiques sont analytiques ;
- les relocalisations génériques sont librement autorisées ;
- les ensembles ouverts sont souvent petits, rarement nommés, non vides, et toujours *connexes*.

## Chapitre 3 :

### Théorèmes fondamentaux sur les groupes de transformations

**3.1. Paramètres essentiels.** Comme exemple d'application de ces trois principes généraux qui gouvernent la pensée de Lie, montrons comment on peut s'assurer que tous les paramètres dans une collection d'équations de transformation sont effectivement présents ; si tel n'est pas le cas, montrons comment on peut ramener ces équations à d'autres équations de transformations équivalentes qui comportent un nombre inférieur de paramètres. Ce problème à résoudre obéit à une exigence incontournable d'économie. Supprimer à l'avance tous les paramètres superflus lorsqu'il en existe permettra certainement d'éviter d'avoir à traiter des cas parasites dans l'énoncé des théorèmes principaux de la théorie.

On supposera pour fixer les idées que les variables  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  sont complexes et que les paramètres  $a = (a_1, \dots, a_r)$  sont eux aussi complexes, étant entendu que la théorie fondamentale est inchangée<sup>1</sup> lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}^r$ , ou même lorsque<sup>2</sup>  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $a \in \mathbb{R}^r$ .

Dans des équations de transformations quelconques  $x' = f(x; a)$ , toutes les variables  $(x_1, \dots, x_n)$  sont par hypothèse présentes, puisque  $x \mapsto f_a(x)$  est un difféomorphisme local pour tout  $a$ . Mais aucune supposition, excepté la finitude, n'a été faite sur les paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$ .

L'idée principale consiste à développer les fonctions  $f_i$  des équations de transformation :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

---

<sup>1</sup> Lorsqu'ils ne précisent pas le domaine de variation des quantités numériques, Engel et Lie sous-entendent qu'elles sont complexes. Pour les théorèmes de classification sur  $\mathbb{R}$  qui prolongent et qui utilisent les théorèmes de classification sur  $\mathbb{C}$ , les deux auteurs précisent alors explicitement que variables et paramètres sont tous deux réels.

<sup>2</sup> Ce cas intermédiaire n'est en général pas étudié par Engel et Lie, mais il le sera par Élie Cartan.

en série entière par rapport à  $x - x_0$  dans un voisinage connexe (non nommé) d'un point fixé  $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ , ce qui nous donne :

$$f_i(x; a) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{F}_\alpha^i(a) (x - x_0)^\alpha;$$

ici, pour tout multiindice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , nous avons noté de manière abrégée le monôme :

$$(x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_{10})^{\alpha_1} \cdots (x_n - x_{n0})^{\alpha_n}.$$

Comme coefficients des (multi-)puissances  $(x - x_0)^\alpha$  dans une telle série entière, il apparaît un nombre infini de certaines fonctions analytiques  $\mathcal{F}_\alpha^i = \mathcal{F}_\alpha^i(a)$  des paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$  qui sont définies dans un domaine fixe de  $\mathbb{C}^r$ . Alors nous prétendons que les paramètres  $a_k$  qui sont éventuellement superflus peuvent être détectés en étudiant le rang générique de l'*application infinie des coefficients* :

$$F_\infty : \quad \mathbb{C}^r \ni a \longmapsto \left( \mathcal{F}_\alpha^i(a) \right)_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq i \leq n}} \in \mathbb{C}^\infty,$$

c'est-à-dire, d'après la définition même du rang (générique) d'une application, en étudiant le rang générique<sup>3</sup>  $\rho_\infty$  de sa matrice jacobienne :

$$\text{Jac } F_\infty(a) = \left( \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha^i}{\partial a_j}(a) \right)_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}},$$

qui est considérée ici comme une matrice ayant  $r$  lignes indexées par l'entier  $j$ , et possédant une infinité de colonnes, indexées simultanément par le multiindice  $\alpha$  et par l'entier  $i$ .

À première vue, ces considérations techniques peuvent paraître complexes, mais il n'en est rien, puisqu'il est au contraire tout à fait naturel que la manière dont les fonctions  $f_i(x; a)$  dépendent réellement des paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$  doive être déchiffrée sur l'ensemble des fonctions-coefficients  $\mathcal{F}_\alpha^i(a_1, \dots, a_r)$ .

Si par exemple il existe un paramètre, disons  $a_1$ , tel qu'aucune fonction  $f_i(x; a)$  n'en dépend, d'où il découle que tous les coefficients  $\mathcal{F}_\alpha^i(a)$  sont indépendants de  $a_1$ , alors cette application  $F_\infty$  a un rang qui est trivialement  $\leq r - 1$ , parce que la première ligne de sa matrice jacobienne  $\text{Jac } F_\infty(a)$  est alors identiquement nulle, et puisque le rang

<sup>3</sup> Pour une définition, voir la note p. 81, dont les considérations se généralisent sans modification au cas où il y a une infinité de colonnes. Techniquement,  $\rho_\infty$  est défini comme le plus grand entier  $\rho \leq \min(r, \infty)$  tel qu'il existe au moins un mineur de taille  $\rho \times \rho$  dans cette matrice jacobienne  $\left( \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha^i}{\partial a_j}(a) \right)_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$  (de taille  $r \times \infty$ ) qui ne s'annule pas identiquement en tant que fonction de  $a$ . Alors tous les mineurs de taille  $(\rho_\infty + 1) \times (\rho_\infty + 1)$  s'annulent identiquement.

générique d'une matrice est en toute circonstance inférieur au nombre de ses lignes.

En toute généralité, si  $\rho_\infty$  désigne le rang générique de  $\text{Jac } F_\infty$  et si on définit le sous-ensemble  $D_\infty$  des zéros communs à tous ses mineurs de taille  $\rho_\infty \times \rho_\infty$  :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_1}^{i_1}}{\partial a_{j_1}}(a) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_1}^{i_1}}{\partial a_{j_{\rho_\infty}}}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_{\rho_\infty}}^{i_{\rho_\infty}}}{\partial a_{j_1}}(a) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_{\rho_\infty}}^{i_{\rho_\infty}}}{\partial a_{j_{\rho_\infty}}}(a) \end{vmatrix}$$

alors  $D_\infty$  est un sous-ensemble analytique propre de l'espace des paramètres  $a$ , et pour tout paramètre  $a_0$  qui n'appartient pas à ce sous-ensemble de paramètres « exceptionnels », on peut tout d'abord *relocaliser les considérations* dans un petit voisinage convenable<sup>4</sup> de  $a_0$ , et ensuite, grâce à une application du théorème du rang constant, on peut trouver un difféomorphisme approprié de l'espace des paramètres  $a \mapsto \bar{a} = \bar{a}(a)$  fixant  $a_0$ , ce qui donne de nouvelles équations de transformations :

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; a_1(\bar{a}), \dots, a_r(\bar{a})) \\ &=: \bar{f}_i(x_1, \dots, x_n; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) \end{aligned} \quad (i=1 \dots n),$$

de manière à ce que les nouveaux coefficients  $\bar{\mathcal{F}}_\alpha^i(\bar{a})$  obtenus en développant les nouvelles fonctions  $\bar{f}_i$  en série entière par rapport à  $(x - x_0)$  deviennent *absolument indépendants des  $r - \rho_\infty$  derniers paramètres*  $\bar{a}_{\rho_\infty+1}, \dots, \bar{a}_r$ , qui sont ainsi devenus visiblement superflus. Sans démonstration (voir [110]), formulons l'énoncé rigoureux de réduction.

**Théorème.** *Localement au voisinage de tout paramètre générique  $a_0$  en lequel l'application infinie des coefficients  $a \mapsto F_\infty(a)$  est de rang maximal, constant, et égal à son rang générique  $\rho_\infty$ , il existe à la fois un changement local de paramètres  $a \mapsto (b_1(a), \dots, b_{\rho_\infty}(a)) =: (b_1, \dots, b_{\rho_\infty})$  qui fait baisser le nombre des paramètres de  $r$  à  $\rho_\infty$ , et des nouvelles équations de transformations :*

$$x'_i = g_i(x; b_1, \dots, b_{\rho_\infty}) \quad (i=1 \dots n)$$

<sup>4</sup> Ici et dans la ce qui va suivre, ce qui peut être dit au voisinage des paramètres exceptionnels qui appartiennent à  $D_\infty$  requerrait des outils sophistiqués de la théorie des singularités qui sont au-delà de la portée du présent travail.

dépendant de seulement  $\rho_\infty$  paramètres qui redonnent par substitution les anciennes équations de transformations :

$$g_i(x; b(a)) \equiv f_i(x; a) \quad (i=1 \dots n).$$

**Définition.** Les paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$  d'équations de transformations données  $x'_i = f_i(x, a)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont dits *essentiels* si, après développement en série entière  $f_i(x, a) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{F}_\alpha^i(a) (x - x_0)^\alpha$  autour d'un point  $x_0$ , le rang générique  $\rho_\infty$  de l'application infinie des coefficients  $F_\infty : a \mapsto (\mathcal{F}_\alpha^i(a))_{\alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq i \leq n}$  est maximal possible, égal au nombre  $r$  des paramètres, à savoir :  $\rho_\infty = r$ .

Dans ce cas, Engel et Lie disent des équations de transformations qu'elles comportent  $r$ -termes [ $r$ -gliedrig]. Grâce à ce théorème, on peut toujours — pourvu que l'on admette le principe de relocalisation libre en un point générique<sup>5</sup> — supposer sans aucune perte de généralité que les paramètres de toutes les équations de transformations sont *essentiels*. Du point de vue de la philosophie des mathématiques, le paramétrique peut être et doit être ainsi définitivement réduit à sa qualité essentielle. Par conséquent, dans ce qui va suivre, les paramètres seront toujours supposés essentiels.

Pour terminer sur l'essentialité des paramètres, voici encore un critère effectif qui sera utilisé plus loin de manière incidente, mais que nous énoncerons sans fournir de démonstration (voir [110]) afin de ne pas retarder la présentation des concepts centraux.

**Théorème.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Dans les équations de transformations :*

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{F}_\alpha^i(a) (x - x_0)^\alpha \quad (i=1 \dots n),$$

*les paramètres  $a_1, \dots, a_r$  ne sont pas essentiels.*

(ii) *(Par définition) Le rang générique  $\rho_\infty$  de la matrice jacobienne infinie :*

$$\text{Jac } F_\infty(a) = \left( \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha^i}{\partial a_j}(a) \right)_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$$

<sup>5</sup> Sans admettre ce principe, la théorie des singularités devrait être convoquée. Néanmoins, lorsque les équations de  $x'_i = f_i(x; a)$  constituent un groupe continu fini local de transformations au sens qui est défini dans le § 3.2 ci-dessous, on vérifie techniquement (cf. [110]) qu'aucune relocalisation n'est nécessaire pour éliminer les paramètres superflus, la raison « philosophique » étant que tout groupe agit transitivement sur lui-même, ce qui force les rangs (génériques) à être *constants*.

est strictement inférieur à  $r$ .

(iii) Localement dans un voisinage de tout  $(x_0, a_0)$ , il existe un champ de vecteurs non identiquement nul sur l'espace des paramètres :

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^n \tau_k(a) \frac{\partial}{\partial a_k},$$

dont les coefficients  $\tau_k(a)$  sont analytiques dans un voisinage de  $a_0$ , qui annihile toutes les fonctions  $f_i(x; a)$  :

$$0 \equiv \mathcal{T} f_i = \sum_{k=1}^n \tau_k \frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{k=1}^r \tau_k(a) \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha^i}{\partial a_k}(a) (x-x_0)^\alpha \quad (i=1 \dots n).$$

Lorsque l'on sait déjà (cf. le premier théorème) que les  $r - \rho_\infty$  derniers paramètres  $(a_{\rho_\infty+1}, \dots, a_r)$  sont purement absents de toutes les fonctions  $f_i$ , cette dernière condition (iii) exprime tout simplement le fait évident que les fonctions  $f_i$  sont annulées identiquement par  $\partial/\partial a_{\rho_\infty+1}, \dots, \partial/\partial a_r$ .

Plus généralement, si  $\rho_\infty$  désigne le rang générique de l'application infinie des coefficients :

$$F_\infty : a \longmapsto \left( \mathcal{F}_\alpha^i(a) \right)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{1 \leq i \leq n},$$

et si  $\rho_\infty \leq r-1$ , alors on démontre que localement dans un voisinage de tout  $(x_0, a_0)$ , il existe exactement  $r - \rho_\infty$  champs de vecteurs analytiques (mais pas plus) :

$$\mathcal{T}_\mu = \sum_{k=1}^n \tau_{\mu k}(a) \frac{\partial}{\partial a_k} \quad (\mu=1 \dots r-\rho_\infty),$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent

$$\text{Vect}(\mathcal{T}_1|_a, \dots, \mathcal{T}_{r-\rho_\infty}|_a)$$

est égale à  $r - \rho_\infty$  en tout paramètre  $a$  en lequel le rang de  $F_\infty$  est maximal égal à  $\rho_\infty$  ;

- chacune de ces dérivations  $\mathcal{T}_\mu$  annihile identiquement toutes les fonctions  $f_i(x; a)$  :

$$0 \equiv \mathcal{T}_\mu f_i = \sum_{k=1}^r \tau_{\mu k}(a) \frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x; a) \quad (i=1 \dots n; \mu=1 \dots r-\rho_\infty).$$

**3.2. Concept de groupe de Lie local.** Nous restituons ici les définitions fondamentales et les théorèmes, sans insister sur l'aspect purement

technique qui exige, en toute rigueur, de préciser quand et comment l'on doit rapetisser les ouverts dans lesquels les objets sont définis. Dans les premières pages de la *Theorie der Transformationsgruppen*, Engel et Lie exposent le principe général des voisinages emboîtés, avant de choisir de se dispenser de les nommer afin d'alléger la présentation.

En dimension  $n \geq 1$  arbitraire, un *groupe continu fini de transformations* sur  $\mathbb{C}^n$  est une famille de transformations ponctuelles analytiques paramétrée par un nombre fini  $r$  de paramètres :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

qui satisfait les trois propriétés suivantes.

*Loi de composition* : À chaque fois qu'elle est bien définie, la succession  $x' = f(x; a)$  et  $x'' = f(x'; b)$  de deux telles transformations, à savoir :

$$x'' = f(f(x; a); b) = f(x; c)$$

s'identifie toujours à une transformation de la *même* famille, pour un certain nouveau paramètre :

$$c = \mathbf{m}(a, b)$$

qui est défini de manière précise et unique par une certaine application analytique locale  $\mathbf{m} : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ , laquelle, de son propre côté, hérite automatiquement de la propriété d'associativité qu'ont les difféomorphismes par composition :

$$\mathbf{m}(\mathbf{m}(a, b), c) = \mathbf{m}(a, \mathbf{m}(b, c)).$$

*Existence d'un élément identité* : Il existe un paramètre spécial  $e = (e_1, \dots, e_r)$  tel que  $f(x; e) \equiv x$  se réduit à l'application identique.

*Loi de multiplication de groupe sous-jacente* : L'application analytique  $(a, b) \mapsto \mathbf{m}(a, b)$ , qui peut aussi être écrite de manière alternative et plus brève en utilisant un symbole de type multiplication :  $(a, b) \mapsto a \cdot b$ , est une *loi de groupe* continue, au sens où :

- Pour tout  $a$ , on doit avoir :  $a \cdot e = e \cdot a = a$ , une propriété qui découle en fait de la loi de composition :

$$f(x; a \cdot e) = f(f(x; a); e) = f(x; a) = f(f(x; e); a) = f(x; e \cdot a),$$

grâce à l'unicité postulée à l'instant de  $c = a \cdot b$ .

- De même, l'associativité héritée  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  doit valoir.

- *Existence d'éléments inverses* : Enfin, comme dernier axiome qui ne s'avère pas être conséquence élémentaire de la loi de multiplication de groupe, il doit exister un difféomorphisme local analytique



$\mathbf{i} : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$  défini dans un voisinage de  $e$  avec  $\mathbf{i}(e) = e$  tel que :

$$a \cdot \mathbf{i}(a) = \mathbf{i}(a) \cdot a = e,$$

à savoir :  $\mathbf{i}(a)$  représente l'inverse de  $a$  pour la structure de groupe, et de plus,  $a \mapsto \mathbf{i}(a)$  est une application analytique, nécessairement un difféomorphisme local au voisinage de  $e$ . En particulier, si l'on réécrit maintenant que la composition<sup>6</sup> :

$$f(f(x; a); b) = f(x; a \cdot b)$$

est exécutée par la multiplication de groupe entre les paramètres, on en déduit formellement que :

$$f(f(x; a); \mathbf{i}(a)) \equiv f(x; a \cdot \mathbf{i}(a)) \equiv x \equiv f(x; \mathbf{i}(a) \cdot a) \equiv f(f(x; \mathbf{i}(a)); a),$$

ce qui montre que  $x \mapsto f_{\mathbf{i}(a)}(x)$  est le difféomorphisme inverse de  $x \mapsto f_a(x)$ .

Il sera utile pour la suite de mémoriser le fait que dans la terminologie de Lie, un « *groupe continu fini de transformations* » signifie précisément une action analytique locale effective<sup>7</sup>  $x' = f(x; a)$ , sur une variété de dimension finie  $n$ , d'un groupe de Lie analytique local de dimension  $r$ . Lie n'insiste pas en général sur l'hypothèse sous-entendue d'analyticité, mais il utilise à la place le mot « *continu* », afin de marquer le contraste entre sa propre théorie et la théorie de Galois discrète des groupes de substitutions des racines d'une équation algébrique<sup>8</sup>.

Ce que nous appelons aujourd'hui un *groupe de Lie local*, à savoir un espace  $\mathbb{C}^r$  (ou  $\mathbb{R}^r$ ) localisé autour d'un certain point  $e$  et muni d'une « loi de multiplication de groupe » analytique locale  $(a, b) \mapsto \mathbf{m}(a, b) = a \cdot b$  et d'une application « élément inverse »  $a \mapsto \mathbf{i}(a)$ , est appelé par Engel et Lie « *groupe des paramètres*<sup>9</sup> d'un groupe de transformations ».

<sup>6</sup> Dans la suite, pour tout  $a$  fixé, le difféomorphisme local  $x \mapsto f(x; a)$  sera occasionnellement écrit  $x \mapsto f_a(x)$ .

<sup>7</sup> Est effective ([125]) une action locale de groupe de Lie local telle que pour tout paramètre  $a$  distinct du paramètre identité, le difféomorphisme local  $x \mapsto f_a(x)$  ne se réduit pas à l'identité. On démontre aisément qu'une action analytique de groupe de Lie est effective si et seulement si les paramètres de la famille de transformations qu'elle définit sont essentiels.

<sup>8</sup> Voir [68] pour une excellente étude historique.

<sup>9</sup> Les pages 401–429 du volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen* ([40]) sont consacrées à leur étude générale.

**Possibilité de préciser rigoureusement les hypothèses de lieu.** Sans remettre en cause les trois principes de pensée qui seront appliqués constamment par la suite, signalons que l'on peut aisément formuler des hypothèses précises et rigoureuses quant aux domaines d'existence d'un *groupe de Lie local*.

Ici, on doit observer que l'on a fixé le comportement des fonctions  $f_i(x; a)$  seulement à l'intérieur des régions [Bereich]  $(x)$  et  $(a)$ .

Par conséquent, nous avons la permission de substituer l'expression  $x'_\nu = f_\nu(x, a)$  dans les équations  $x''_i = f_i(x', b)$  seulement lorsque le système de valeurs [Werthsystem]  $x'_1, \dots, x'_n$  se trouve dans la région  $(x)$ . C'est pourquoi nous sommes forcé d'ajouter, aux hypothèses remplies jusqu'à maintenant par les régions  $(x)$  et  $(a)$ , la supposition suivante : il doit être possible d'indiquer, à l'intérieur des régions  $(x)$  et  $(a)$ , des sous-régions respectives  $((x))$  et  $((a))$  d'une nature telle que les  $x'_i$  restent toujours dans la région  $(x)$  lorsque les  $x_i$  se meuvent [laufen] arbitrairement dans  $((x))$  et quand les  $a_k$  se meuvent arbitrairement dans  $((a))$  ; nous exprimons cela brièvement de la manière suivante : la région  $x' = f((x))((a))$  doit tomber [hineinfallen] entièrement dans la région  $(x)$ .

D'après ces conventions [Festsetzungen], si on choisit  $x_1, \dots, x_n$  dans la région  $((x))$  et  $a_1, \dots, a_r$  dans la région  $((a))$ , on peut réellement effectuer la substitution  $x'_k = f_k(x, a)$  dans l'expression  $f_i(x'_1, \dots, x'_n, b_1, \dots, b_n)$  ; c'est-à-dire, lorsque que  $x_1^0, \dots, x_n^0$  désigne un système de valeurs arbitraire dans la région  $((x))$ , l'expression :

$$f_i(f_1(x, a), \dots, f_n(x, a), b_1, \dots, b_n)$$

peut être développée, dans le voisinage du système de valeurs  $x_k^0$ , comme une série entière ordinaire en  $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$  ; les coefficients de cette série entière sont des fonctions de  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n$  et ils se comportent régulièrement [verhalten sich regulär], lorsque les  $a_k$  sont arbitraires dans  $((a))$  et les  $b_k$  arbitraires dans  $(a)$ . [40], pp. 15–16.

Reformulons ces conditions avec une optique purement locale. Si  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  sont les coordonnées complexes considérées, on choisira la norme :

$$|x| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

où  $|w| = \sqrt{w\bar{w}}$  désigne le module d'un nombre complexe  $w \in \mathbb{C}$ . Pour des « rayons » variés  $\rho > 0$ , on considère alors les ouverts spécifiques centrés en l'origine, appelés aujourd'hui *polydisques* :

$$\Delta_\rho^n := \{x \in \mathbb{C}^n : |x| < \rho\}.$$

Par ailleurs, on munit aussi l'espace des paramètres  $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^r$  de la norme similaire :

$$|a| := \max_{1 \leq k \leq r} |a_k|,$$

et pour des réels strictement positifs  $\sigma > 0$  variés, on introduit les ouverts :

$$\square_\sigma^r := \{a \in \mathbb{C}^r : |a| < \sigma\}.$$

Voici alors comment l'on peut formuler les axiomes de groupe de Lie en localisant toutes les considérations autour de l'élément identité. Eu égard au caractère purement local qui est visé, les fonctions  $f_i(x; a)$  seront supposées définies lorsque  $|x| < \rho_1$

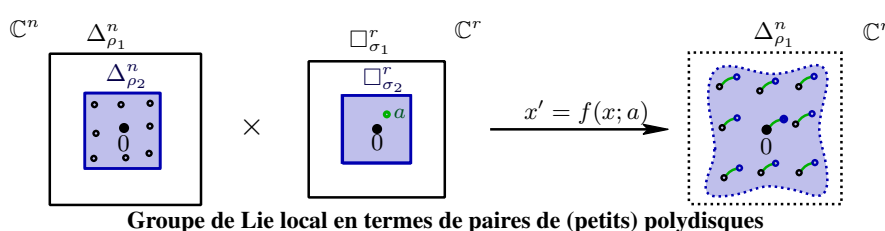
et lorsque  $|a| < \sigma_1$ , pour un certain  $\rho_1 > 0$  et pour un certain  $\sigma_1 > 0$ , tous deux « petits ». L'élément identité  $e \in \mathbb{C}^r$  correspondra à l'origine  $0 \in \mathbb{C}^r$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$f_i(x_1, \dots, x_n : 0, \dots, 0) \equiv x_i \quad (i=1 \dots n).$$

Afin que la composition de deux transformations successives  $x' = f(x; a)$  et  $x'' = f(x'; b)$  soit bien définie, nous rapetissons  $\rho_1$  en un certain  $\rho_2$  suffisamment petit avec  $0 < \rho_2 < \rho_1$  et nous rapetissons  $\sigma_1$  en un certain  $\sigma_2$  suffisamment petit avec  $0 < \sigma_2 < \sigma_1$  de telle sorte que l'on ait :

$$|f(x; a)| < \rho_1 \quad \text{pour tout } |x| < \rho_2 \text{ et tout } |a| < \sigma_2,$$

ce qui est possible par continuité grâce à la condition  $f(x; 0) \equiv x$ .



**Loi de composition :** Pour tout  $x \in \Delta_{\rho_2}^n$ , et tous  $a, b \in \square_{\sigma_2}^r$ , une composition arbitraire :

$$(1) \quad x'' = f(f(x; a); b) = f(x; c) = f(x; \mathbf{m}(a, b))$$

s'identifie toujours à un élément  $f(x; c)$  de la même famille, pour un paramètre unique  $c = \mathbf{m}(a, b)$  donné par une application analytique locale (multiplication de groupe) :

$$\mathbf{m} : \square_{\sigma_1}^n \times \square_{\sigma_1}^n \longrightarrow \mathbb{C}^r$$

qui satisfait  $\mathbf{m}(\square_{\sigma_2}^r \times \square_{\sigma_2}^r) \subset \square_{\sigma_1}^r$  et  $\mathbf{m}(a, e) \equiv \mathbf{m}(e, a) \equiv a$ .

Si  $a, b, c \in \square_{\sigma_3}^n$  avec  $0 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$  suffisamment petit pour que trois compositions successives soient bien définies, l'associativité de la composition entre difféomorphismes garantit alors que :

$$f(x; \mathbf{m}(\mathbf{m}(a, b), c)) = f(f(f(x; a); b); c) = f(x; \mathbf{m}(a, \mathbf{m}(b, c))),$$

d'où découle, grâce à l'unicité postulée de  $c = \mathbf{m}(a, b)$ , l'associativité de la loi de groupe :  $\mathbf{m}(\mathbf{m}(a, b), c) = \mathbf{m}(a, \mathbf{m}(b, c))$  pour de telles valeurs (petites) de  $a, b, c$ .

**Existence d'éléments inverses :** Il existe une application analytique locale :

$$\mathbf{i} : \square_{\sigma_1}^r \longrightarrow \mathbb{C}^r$$

satisfaisant  $\mathbf{i}(e) = e$ , c'est-à-dire  $\mathbf{i}(0) = 0$ , telle que pour tout  $a \in \square_{\sigma_2}^r$  :

$$e = \mathbf{m}(a, \mathbf{i}(a)) = \mathbf{m}(\mathbf{i}(a), a)$$

$$\text{d'où de surcroît : } x = f(f(x; a); \mathbf{i}(a)) = f(f(x; \mathbf{i}(a)); a),$$

pour tout  $x \in \Delta_{\rho_2}^n$ . Comme convenu, nous passerons sous silence dans la suite la mention rigoureuse (qui serait inélégante et lourde) des ouverts d'existence.

### 3.3. Principe de raison suffisante et axiome d'inverse. Un difféomorphisme analytique local quelconque d'une variété de dimension $n$ peut

être considéré comme effectuant une *permutation* (différentiable) entre tous les points considérés, car en particulier, un difféomorphisme, c'est une bijection. Ainsi, bien que les difféomorphismes agissent sur un ensemble de cardinal infini (non dénombrable), ils sont les *analogues continus* des *permutations discontinues* d'un ensemble fini. En fait, dans les années 1873 à 1880, l'idée fixe de Lie était d'ériger, dans le domaine des *continua*  $n$ -dimensionnels, une théorie qui corresponde à la théorie de Galois des substitutions des racines d'une équation algébrique et qui lui soit en tout point analogue.

Comme dans les paragraphes qui précèdent, soit donc :

$$x' = f(x; a_1, \dots, a_r) =: f_a(x)$$

une famille de difféomorphismes locaux analytiques paramétrée par un nombre fini  $r$  de paramètres essentiels. Pour Lie, le seul axiome de groupe vraiment significatif est celui qui demande qu'une telle famille soit *fermée par composition*, à savoir que l'on a toujours :

$$f_a(f_b(x)) \equiv f_c(x),$$

pour un certain  $c$  qui dépend de  $a$  et de  $b$ , toujours avec la restriction de localité assurant qu'une telle composition ait un sens. En s'inspirant de sa connaissance du *Traité des substitutions* de Jordan, Lie s'est demandé s'il était possible d'*économiser* les deux autres axiomes standard de la structure de groupe : l'axiome d'existence d'un élément identité, et l'axiome d'existence d'un inverse pour tout élément du groupe.

**Assertion.** ([81]) *Soit  $H$  un sous-ensemble quelconque d'un groupe abstrait  $G$  dont le cardinal est fini :  $\text{Card } H < \infty$ , et qui est fermé par composition :*

$$h_1 h_2 \in H \quad \text{toutes les fois que} \quad h_1, h_2 \in H.$$

*Alors  $H$  contient l'élément identité  $e$  de  $G$  et tout élément  $h \in H$  possède un inverse dans  $H$ , de telle sorte que  $H$  lui-même est un vrai sous-groupe de  $G$ .*

*Preuve.* En effet, soit  $h \in H$  arbitraire. La suite infinie  $h, h^2, h^3, \dots, h^k, \dots$  d'éléments de l'ensemble fini  $H$  doit nécessairement devenir périodique :  $h^a = h^{a+n}$  pour un certain  $a \geq 1$  et pour un certain  $n \geq 1$ , d'où  $e = h^n$ , donc  $e \in H$  et  $h^{n-1}$  est l'inverse de  $h$ .  $\square$

Dans ses travaux pionniers des années 1873 à 1880 et aussi dans la *Theorie der Transformationsgruppen* qu'Engel a rédigée sous sa direction entre 1884 et 1893, Lie est parvenu à transférer *tous* les

concepts de la théorie des groupes de substitutions (Galois, Serret, Jordan) du discontinu vers le continu : *loi de groupe, actions de groupe, sous-groupes, sous-groupes normaux, groupe quotient, classification à conjugaison près, groupe adjoint, représentation adjointe, formes normales, (in)transitivité, (im)primitivité, prolongement holoédrique, prolongement méridienne, asystaticité, etc.* Le principe de raison suffisante suggère alors naturellement qu'au fondement même de la théorie générale, l'*élimination des deux axiomes* concernant l'élément identité et l'existence d'inverses soit *aussi possible* dans l'univers des groupes continus finis de transformations. Pendant plus de dix années, Lie a en effet été convaincu qu'une assertion purement similaire à celle énoncée ci-dessus devait être vraie dans le domaine du continu, avec  $G = \text{Diff}_n$  le pseudo-groupe (infini, continu) des difféomorphismes locaux de  $\mathbb{C}^n$  (ou de  $\mathbb{R}^n$ ) et en prenant pour  $H \subset \text{Diff}_n$  une collection finiment paramétrée d'équations de transformations  $x' = f(x; a)$  qui est stable par composition.

Citons un extrait du premier mémoire systématique de Lie, paru en 1880 aux *Mathematische Annalen*.

Comme on le sait, on montre dans la théorie des substitutions que les permutations d'un groupe de substitutions peuvent être ordonnées en paires de permutations inverses l'une de l'autre. Mais comme la différence entre un groupe de substitutions et un groupe de transformations réside seulement dans le fait que le premier contient un ensemble fini, et le second un ensemble infini d'opérations, il est naturel de conjecturer que les transformations d'un groupe de transformations puissent aussi être ordonnées par paires de transformations inverses l'une de l'autre. Dans des travaux antérieurs, je suis parvenu à la conclusion que tel devrait être le cas. Mais comme au cours de mes investigations en question, certaines hypothèses *implicites* se sont introduites au sujet des fonctions qui apparaissent, je pense alors qu'il est nécessaire d'*ajouter expressément l'exigence que les transformations du groupe puissent être ordonnées par paires de transformations inverses l'une de l'autre*. En tout cas, je conjecture que cette exigence est une condition nécessaire de ma définition originale du concept [*Begriff*] de groupe de transformations. Toutefois, il m'a été impossible de démontrer cela en général. [98], p. 444–445.

Cependant, en 1884, dans sa toute première année de travail de rédaction en collaboration, Engel proposa un contre-exemple à cette conjecture de Lie. Considérons en effet la famille d'équations de transformations :

$$x' = \zeta x,$$

où  $x, x' \in \mathbb{C}$  sont les coordonnées de l'espace-source et de l'espace-image, et où le paramètre  $\zeta \in \mathbb{C}$  est restreint à  $|\zeta| < 1$ . Évidemment, cette famille est fermée par composition<sup>10</sup>, à savoir : lorsque  $x' = \zeta_1 x$  et lorsque  $x'' = \zeta_2 x'$ , la composition donne  $x'' = \zeta_2 x' = \zeta_2 \zeta_1 x$ , et elle appartient en effet à la famille en question, puisque  $|\zeta_2 \zeta_1| < 1$  découle de  $|\zeta_1|, |\zeta_2| < 1$ . Par contre, ni l'élément identité, ni l'inverse de toute transformation n'appartiennent à la famille ainsi définie.

Comme on l'aura noté, cette proposition de contre-exemple n'est en fait pas réellement convaincante. En effet, la condition  $|\zeta| < 1$  est ici visiblement artificielle, puisque la famille se prolonge en fait trivialement comme groupe complet des dilatations  $(x' = \zeta x)_{\zeta \in \mathbb{C}}$  de la droite complexe. L'idée de Engel était d'en appeler à une application holomorphe univalente  $\omega : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  du disque unité  $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  qui possède le cercle unité  $\{|\zeta| = 1\}$  comme coupure, à savoir :  $\omega$  ne peut être prolongée holomorphiquement au-delà d'aucun point  $\zeta_0 \in \partial\Delta = \{|\zeta| = 1\}$  du bord du disque unité. L'application  $\omega$  utilisée (sans référence bibliographique) par Engel est la suivante ([40], p. 164). Si  $k \geq 1$  est un entier quelconque, soit  $od_k$  le nombre de diviseurs impairs de  $k$ , y compris 1 et  $k$  (lorsque  $k$  est impair).

<sup>10</sup> Sans présupposer l'existence d'un élément identité, la condition de stabilité par composition qu'Engel et Lie ont dégagée ([40], p. 14) s'énonce comme suit, lorsque  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $a \in \mathbb{C}^r$  sont à valeurs complexes. Il existe deux paires de domaines  $\mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$  et  $\mathcal{A}^1 \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{C}^r$  dans l'espace des variables  $x$  et dans l'espace des paramètres  $a$  tels que pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , l'application  $x \mapsto f(x; a)$  est un difféomorphisme de  $\mathcal{X}$  sur son image, tels que de plus, pour tout  $a^1 \in \mathcal{A}^1$  fixé,  $f(\mathcal{X}^1 \times \{a^1\}) \subset \mathcal{X}$ , de telle sorte que pour tout  $a^1 \in \mathcal{A}^1$  et pour tout  $b \in \mathcal{A}$ , l'application composée  $x \mapsto f(f(x; a^1); b)$  est bien définie et établit un difféomorphe sur son image. De plus, deux conditions significatives sont supposées.

- Il existe une application analytique  $\varphi = \varphi(a, b)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^m$  définie dans  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  avec  $\varphi(\mathcal{A}^1 \times \mathcal{A}^1) \subset \mathcal{A}$  telle que :

$$f(f(x; a); b) \equiv f(x; \varphi(a, b)) \quad \text{pour tous } x \in \mathcal{X}^1, a \in \mathcal{A}^1, b \in \mathcal{A}^1.$$

- Il existe une application analytique  $\chi = \chi(a, c)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^m$  définie pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $c \in \mathcal{A}$  avec  $\chi(\mathcal{A}^1 \times \mathcal{A}^1) \subset \mathcal{A}$  qui résout  $b$  en termes de  $(a, c)$  dans l'équation  $c = \varphi(a, b)$ , à savoir :

$$c \equiv \varphi(a, \chi(a, c)) \quad \text{pour tous } a \in \mathcal{A}^1, c \in \mathcal{A}^1.$$

C'est avec ces hypothèses précises que Lie pensait déduire : 1) la présence d'un élément identité  $e \in \mathcal{A}$  ; et : 2) l'existence d'un difféomorphisme analytique local  $a \mapsto \iota(a)$  défini près de  $e$  et fixant  $e$ , tel que  $f(x; \iota(a))$  est la transformation inverse de  $f(x; a)$ .

**Assertion.** *La série infinie :*

$$\omega(\zeta) := \sum_{\nu \geq 1} \frac{\zeta^\nu}{1 - \zeta^{2\nu}} = \sum_{\nu \geq 1} (\zeta^\nu + \zeta^{3\nu} + \zeta^{5\nu} + \zeta^{7\nu} + \dots) = \sum_{k \geq 1} \text{od}_k \zeta^k$$

converge absolument dans tout disque  $\Delta_\rho = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \rho\}$  de rayon  $\rho < 1$  et y définit une application holomorphe univalente  $\Delta \rightarrow \mathbb{C}$  du disque unité  $\Delta = \{|\zeta| < 1\}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  qui ne se prolonge holomorphiquement au-delà d'aucun point  $\zeta_0 \in \partial\Delta := \{|\zeta| = 1\}$ .

En fait, à la place de cette série explicite, on pourrait utiliser aussi n'importe quelle autre application de type uniformisante de Riemann<sup>11</sup>  $\zeta \mapsto \omega(\zeta) =: \lambda$  qui établit un biholomorphisme du disque unité  $\Delta$  sur un domaine simplement connexe  $\Lambda := \omega(\Delta)$  dont le bord est une courbe de Jordan nulle part localement analytique réelle<sup>12</sup>. Désignons alors par  $\lambda \mapsto \chi(\lambda) =: \zeta$  l'inverse d'une telle application, et considérons la famille d'équations de transformations :

$$(x' = \chi(\lambda) x)_{\lambda \in \Lambda}.$$

Par construction,  $|\chi(\lambda)| < 1$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Toute composition de  $x' = \chi(\lambda_1) x$  et de  $x'' = \chi(\lambda_2) x'$  est de la forme  $x'' = \chi(\lambda) x$ , avec le paramètre défini de manière unique  $\lambda := \omega(\chi(\lambda_1) \chi(\lambda_2))$ , donc l'axiome de composition de groupe est satisfait. Cependant, il n'y a à nouveau pas d'élément identité, et à nouveau, aucune transformation ne possède un inverse. Et de plus crucialement (et pour terminer), il n'existe aucun prolongement de cette famille à un domaine plus grand  $\tilde{\Lambda} \supset \Lambda$  qui soit accompagné d'un prolongement holomorphe  $\tilde{\chi}$  de  $\chi$  à  $\tilde{\Lambda}$  de telle sorte que  $\tilde{\chi}(\tilde{\Lambda})$  contienne un voisinage de  $\{1\}$  (afin d'atteindre l'élément identité), et même *a fortiori*, il n'existe aucun prolongement

<sup>11</sup> Le théorème de Riemann énonce que pour tout ouvert connexe et simplement connexe  $\Lambda$  de  $\mathbb{C}$  dont le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  contient au moins un point, il existe une application biholomorphe — c'est-à-dire holomorphe, bijective et d'inverse holomorphe —  $\chi : \Lambda \rightarrow \Delta$  de  $\Lambda$  sur le disque unité  $\Delta \subset \mathbb{C}$ , appelée *uniformisante de Riemann*. Le théorème réflexion de Schwarz stipule qu'en tout point  $\lambda_0 \in \partial\Lambda$  du bord de  $\Lambda$  autour duquel  $\partial\Lambda$  est un petit morceau de courbe analytique réelle, l'uniformisante  $\chi$  se prolonge holomorphiquement dans un voisinage de  $\lambda_0$ . Réciproquement, si  $\chi$  se prolonge holomorphiquement au-delà d'un point du bord de  $\Lambda$ , ce bord est alors nécessairement analytique réel au voisinage de ce point.

<sup>12</sup> On peut même considérer un domaine dont le bord est une courbe de Jordan continue nulle part différentiable, voire dont le bord est un ensemble fractal, comme par exemple le flocon de Von Koch ; on trouvera une présentation concise et lumineuse de la théorie de Carathéodoy sur le prolongement au bord des uniformisantes de Riemann dans le Chapitre 17 de [112].

holomorphe tel de  $\chi$  à un voisinage de  $\overline{\Delta}$  (afin d'obtenir les inverses des transformations  $x' = \chi(\lambda) x$  avec  $\lambda \in \Lambda$  proche de  $\partial\Lambda$ ).

Dans le volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen*, cet exemple apparaît seulement au Chapitre 9, pp. 163–165, et il est écrit en petits caractères. Constatation frappante : pour des raisons de pureté et de systématisme dans la pensée, la structure des neuf premiers chapitres est organisée afin de faire autant que possible l'économie de l'existence d'un élément identité et de transformations inverses l'une de l'autre par paires. Ce choix théorique complexifie considérablement la présentation de la théorie fondamentale, pourtant censée être relativement facile d'accès afin de toucher un public assez large de mathématiciens. Mais il est bien connu que la meilleure qualité dans l'exposition des premiers éléments d'un ouvrage et que les meilleurs choix stratégiques quant à son organisation thématique, ne peuvent être atteints, paradoxalement, qu'à la fin du processus de mise en forme dans son ensemble. Impossible, donc, de demander au jeune et novice Friedrich Engel (alors âgé de 24 ans) de faire prévaloir un point de vue d'accessibilité et de simplicité dans la présentation. Au contraire, l'objectif affirmé de son maître Sophus Lie était d'atteindre la plus grande généralité, de s'élever le plus haut possible dans un tel traité.

Et malgré le contre-exemple du jeune Engel que nous venons de détailler, Lie était quand même persuadé que l'analogie profonde de sa théorie des groupes continus avec la théorie des groupes finis de substitutions n'était pas, dans sa racine métaphysique profonde, réellement remise en cause. Ainsi, toutes les fois que cela est possible du point de vue abstrait de Lie, les énoncés des neuf premiers chapitres de la *Theorie der Transformationsgruppen* n'utilisent ni l'existence d'un élément identité, ni l'existence de transformations inverses l'une de l'autre par paires. Engel et Lie étudient seulement les familles continues finies d'équations de transformations  $x'_i = f_i(x; a_1, \dots, a_r)$ ,  $i = 1, \dots, n$  qui sont fermées par composition au sens de la note p. 94, sans hypothèse supplémentaire : grand degré d'abstraction et de généralité. En fait, à partir de cette seule condition de fermeture par composition, Engel et Lie déduisent que les équations finies  $x'_i = f_i(x; a)$  satisfont certaines *équations différentielles fondamentales*, stipulées dans le Théorème p. 104 ci-dessous (Théorème 3 p. 33 dans [40]). C'est alors l'existence de telles équations différentielles qu'ils prennent systématiquement comme hypothèse principale, à la place de la fermeture par composition, toujours sans élément identité et sans transformations inverses.



Le Théorème 26 est énoncé à la page 163 de [40] (voir p. 153), et il est démontré tout juste avant que n'apparaisse le contre-exemple de Engel. Ce théorème raffiné et subtil confirme la croyance métaphysique de Lie, montre sa persévérance intellectuelle, et prouve à nouveau sa remarquable force de conceptualisation. En résumé, il s'énonce comme suit<sup>13</sup>.

Soit  $x'_i = f_i(x; a_1, \dots, a_r)$ ,  $i = 1, \dots, n$  une collection de transformations fermée par compositions locales. D'après le théorème énoncé p. 104 ci-dessous, il existe un système d'équations différentielles fondamentales de la forme :

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r).$$

qui est satisfait identiquement par les fonctions  $f_i(x, a)$ , où les  $\psi_{kj}$  sont certaines fonctions analytiques des paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$ . Si l'on introduit alors les  $r$  transformations infinitésimales (voir le § 3.4 ci-dessous) qui sont définies par :

$$\sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} =: X_k(f) \quad (k=1 \dots r),$$

et si l'on forme les équations finies :

$$\begin{aligned} x'_i &= \exp(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r)(x) \\ &=: g_i(x; \lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad (i=1 \dots n) \end{aligned}$$

du groupe à  $r$  paramètres qui est engendré par ces  $r$  transformations infinitésimales, alors ce groupe contient l'élément identité  $g(x; 0)$  et ses transformations sont ordonnées par paires inverses l'une de l'autre :  $g(x; -\lambda) = g(x; \lambda)^{-1}$ . Enfin, le Théorème 26 en question (p. 153 ci-dessous) énonce que dans ces équations finies  $x'_i = g_i(x; \lambda)$ , il est possible d'introduire de *nouveaux* paramètres locaux  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  à la place de  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de telle sorte que les équations de transformations qui en résultent :

$$\begin{aligned} x'_i &= g_i(x; \lambda_1(\bar{a}), \dots, \lambda_r(\bar{a})) \\ &=: \bar{f}_i(x_1, \dots, x_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) \quad (i=1 \dots n) \end{aligned}$$

<sup>13</sup> En première approche, ce passage doit être lu en admettant quelques notions qui ne seront présentées que dans les paragraphes qui suivent.

représentent une famille de  $\infty^r$  transformations qui embrasse, *après un prolongement analytique éventuel*, toutes les  $\infty^r$  transformations initiales :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r).$$

Ainsi Lie réalise-t-il et confirme-t-il son idée d'épuration axiomatique. En répondant à Engel que l'on doit s'autoriser à changer éventuellement de paramètres<sup>14</sup>, on peut toujours élargir le domaine initial d'existence pour capturer l'identité et les transformations inverses. À la contre-exemplification contrariante répond donc la dialectique complexifiante de vérités supérieures qui doivent être quêtées sans relâche.

Afin de poursuivre et de rendre plus compréhensible cet énoncé, il nous faut à présent exposer : 1) les transformations infinitésimales (§ 3.4) ; 2) les équations différentielles fondamentales (§ 3.5) ; 3) la reconstitution des équations finies du groupe à partir d'une collection de transformations infinitésimales indépendantes (§ 3.6) ; 4) le théorème de Clebsch-Lie-Frobenius sur les systèmes complets et indépendants d'équations aux dérivées partielles (§ 3.7).

**3.4. Introduction des transformations infinitésimales.** Soit  $\varepsilon$  une quantité infiniment petite au sens de Leibniz, ou une quantité arbitrairement petite soumise au formalisme rigoureux de Weierstrass. Pour chaque  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$  fixé à l'avance, considérons le point :

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x; e_1, \dots, e_k + \varepsilon, \dots, e_n) \\ &= x_i + \frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x; e) \cdot \varepsilon + \dots \quad (i=1 \dots n) \end{aligned}$$

qui est déplacé infinitésimalement en partant du point initial  $x = f(x; e)$  en ajoutant l'incrément infime  $\varepsilon$  seulement à la  $k$ -ième coordonnée  $e_k$  du paramètre identité  $e$ . Grâce à un développement de Taylor à l'ordre 1, on peut interpréter ce mouvement spatial infinitésimal en introduisant, pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ , le champ de vecteurs (ainsi qu'une notation raccourcie appropriée pour désigner ses coefficients) :

$$X_k^e := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x; e) \frac{\partial}{\partial x_i} := \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

<sup>14</sup> En changeant de paramètre dans la famille  $x' = \chi(\lambda)x$ , on retrouve évidemment le groupe complet des dilatations  $x' = \zeta x$ .

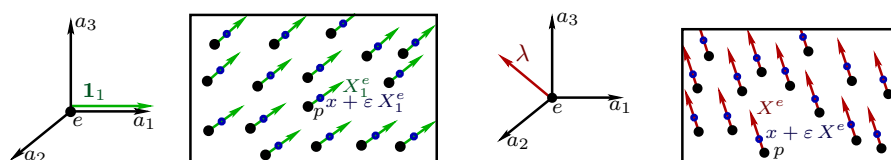
écrit ici sous la forme d'un opérateur de dérivation d'ordre un. On peut aussi le considérer comme une famille de vecteurs colonnes :

$$\tau \left( \frac{\partial f_1}{\partial a_k}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial a_k} \right) \Big|_x = \tau (\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}) \Big|_x$$

basés aux points  $x$ , où  $\tau(\cdot)$  désigne l'opérateur de transposition des matrices, qui transforme bien sûr les lignes horizontales en lignes verticales. Alors on peut réécrire ce mouvement infime sous la forme  $x' = x + \varepsilon X_k^e + \dots$ , ou bien encore, de manière équivalente :

$$x'_i = x_i + \varepsilon \xi_{ki}(x) + \dots \quad (i=1 \dots n),$$

où les termes supprimés “ $+\dots$ ” sont bien entendu des  $O(\varepsilon^2)$  uniformes par rapport à  $x$ , de telle sorte que d'un point de vue géométrique,  $x'$  est « poussé » infinitésimalement à partir de  $x$  d'une longueur  $\varepsilon$  le long du vecteur  $X_k^e \Big|_x$ , comme l'illustre la partie gauche de notre figure (avec  $k = 1$ ).



**Déplacement infinitésimal  $x' = x + \varepsilon X^e$  de tous les points**

Plus généralement, toujours à partir du paramètre identité  $e$ , on peut ajouter à  $e$  un incrément infinitésimal arbitraire :

$$(e_1 + \varepsilon \lambda_1, \dots, e_k + \varepsilon \lambda_k, \dots, e_r + \varepsilon \lambda_r),$$

où  $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \Big|_e$  est un vecteur tangent constant basé en  $e$  dans l'espace des paramètres. Alors grâce à la linéarité de l'application tangente, c'est-à-dire grâce à la règle de dérivation composée en coordonnées, il en découle que :

$$\begin{aligned} f_i(x; e + \varepsilon \lambda) &= x_i + \sum_{k=1}^n \varepsilon \lambda_k \cdot \frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x; e) + \dots \\ &= x_i + \varepsilon \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \xi_{ki}(x) + \dots, \end{aligned}$$

de telle sorte que tous les points  $x' = x + \varepsilon X + \dots$  sont simultanément et infinitésimalement déplacés le long du champ de vecteurs :

$$X := \lambda_1 X_1^e + \dots + \lambda_r X_r^e$$

qui est la combinaison linéaire générale des  $r$  précédents champs de vecteurs basiques  $X_k^e$ ,  $k = 1, \dots, r$ .

Occasionnellement, Engel et Lie écrivent qu'un tel champ de vecteurs  $X$  appartient au groupe  $x' = f(x; a)$ , pour signifier que  $X$  vient accompagné du mouvement infinitésimal  $x' = x + \varepsilon X$  qu'il est supposé exécuter (les points de suspension sont censés être supprimés dans l'intuition). En accord avec cet acte de pensée synthétique, Lie appelle  $X$  une *transformation infinitésimale*, considérant en effet que  $x' = x + \varepsilon X$  est juste un cas particulier de  $x' = f(x, a)$ . Une autre raison fondamentale et très profonde, pour laquelle Lie dit que  $X$  appartient au groupe  $x' = f(x; a)$  est qu'il a démontré que les groupes continus finis de transformations locales sont en correspondance biunivoque avec les espaces vectoriels purement linéaires :

$$\text{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, X_2, \dots, X_r),$$

de transformations infinitésimales, qui héritent en fait aussi, directement à partir de la loi de multiplication de groupe, d'une structure *algébrique* additionnelle, comme nous allons maintenant le rappeler. Quelques préparatifs (§§ 3.5, 3.6 et 3.7) sont nécessaires.

Tout d'abord (§ 3.5), il faut *infinitésimaliser* — c'est-à-dire différentier — la loi de composition de groupe, réorganiser les équations obtenues, et interpréter géométriquement leur signification.

Ensuite (§ 3.6), il faut traduire dans la théorie des groupes les théorèmes classiques sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles ordinaires d'ordre un. Ces systèmes correspondent à l'intégration d'un, et d'un seul champ de vecteurs. Une dernière pièce préliminaire est donc nécessaire (§ 3.7) : le théorème de Clebsch-Frobenius, qui correspond à l'intégration de *plusieurs* champs de vecteurs soumis à une certaine condition de compatibilité.

**3.5. Équations différentielles fondamentales.** Partons de la loi de composition de groupe, que nous réécrivons comme suit :

$$x'' = f(f(x; a); b) = f(x; a \cdot b) =: f(x; c).$$

Ici,  $c := a \cdot b$  dépend de  $a$  et  $b$ , mais à la place de  $a$  et  $b$ , nous allons considérer  $a$  et  $c$  comme paramètres indépendants. Ainsi, en remplaçant  $b = a^{-1} \cdot c =: b(a, c)$ , les équations :

$$f_i(f(x; a); b(a, c)) \equiv f_i(x; c) \quad (i=1 \dots n)$$

sont satisfaites identiquement pour tout  $x$ , tout  $a$  et tout  $c$ . Ensuite, pour  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$  fixé, différentions ces identités par rapport à  $a_k$ , en

notant de manière abrégée  $f'_i \equiv f_i(x'; b)$  et  $x'_j \equiv f_j(x; a)$ , ce qui nous donne :

$$\frac{\partial f'_i}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial a_k} + \dots + \frac{\partial f'_i}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial a_k} + \frac{\partial f'_i}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \dots + \frac{\partial f'_i}{\partial b_r} \frac{\partial b_r}{\partial a_k} \equiv 0 \quad (i=1 \dots n).$$

Ici bien sûr à nouveau, l'argument de  $f'_i$  est  $(f(x, a); b(a, c))$ , l'argument des  $x'_l$  est  $(x; a)$  et l'argument des  $b_j$  est  $(a, c)$ . Grâce à  $x''(x'; e) \equiv x'$ , la matrice  $\frac{\partial f'_i}{\partial x'_k}(f(x; e); b(e, e))$  est l'identité  $I_{n \times n}$ . Par conséquent, en appliquant la règle de Cramer<sup>15</sup>, pour tout  $k$  fixé, nous pouvons résoudre les  $n$  équations linéaires précédentes par rapport aux  $n$  inconnues  $\frac{\partial x'_1}{\partial a_k}, \dots, \frac{\partial x'_n}{\partial a_k}$ , et nous obtenons des expressions de la forme :

$$(2) \quad \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_k}(x; a) = \Xi_{1\nu}(x', b) \frac{\partial b_1}{\partial a_k}(a, c) + \dots + \Xi_{r\nu}(x', b) \frac{\partial b_r}{\partial a_k}(a, c)$$

$(\nu=1 \dots n; k=1 \dots r),$

pour certaines fonctions analytiques  $\Xi_{j\nu}(x', b)$  qui sont indépendantes de  $k$ .

D'autre part, afin de pouvoir substituer la dérivée partielle  $\frac{\partial b_j}{\partial a_k}$  par une expression adéquate, différencions par rapport à  $a_k$  les équations suivantes, qui sont satisfaites identiquement :

$$c_\mu \equiv \mathbf{m}_\mu(a, b(a, c)) \quad (\mu=1 \dots r).$$

De cette manière-là, nous obtenons :

$$0 \equiv \frac{\partial \mathbf{m}_\mu}{\partial a_k} + \sum_{\pi=1}^r \frac{\partial \mathbf{m}_\mu}{\partial b_\pi} \frac{\partial b_\pi}{\partial a_k} \quad (\mu=1 \dots r).$$

Mais puisque la matrice  $\frac{\partial \mathbf{m}_\mu}{\partial b_\pi}$  se réduit à la matrice identité  $I_{r \times r}$  pour<sup>16</sup>  $(a, b(a, c))|_{(a,c)=(e,e)} = (e, e)$ , la règle de Cramer, à nouveau, nous permet de résoudre ce système par rapport aux  $r$  inconnues  $\frac{\partial b_\pi}{\partial a_k}$ , et nous obtenons ainsi des expressions de la forme :

$$\frac{\partial b_\pi}{\partial a_k}(a, c) = \Psi_{k\pi}(a, c),$$

avec certaines fonctions  $\Psi_{k\pi}$ , qui sont définies dans un domaine éventuellement plus petit. En posant  $(a, c) = (e, e)$  dans le même système

<sup>15</sup> — et en rapetissant aussi si nécessaire les domaines d'existence, mais sans introduire de dénomination spéciale —

<sup>16</sup> — seulement parce que  $\mathbf{m}(e, b) \equiv b$  —

avant de le résoudre, nous obtenons en fait (noter le signe « moins ») :

$$\left( \frac{\partial b_\pi}{\partial a_k}(e, e) \right)_{\substack{1 \leq \pi \leq r \\ 1 \leq k \leq r}} = -I_{r \times r},$$

d'où  $\Psi_{k\pi}(e, e) = -\delta_k^\pi$ , où le symbole  $\delta_k^\pi$  vaut 1 si  $k = \pi$  et 0 sinon.

Nous pouvons donc maintenant insérer dans (2) la valeur obtenue  $\Psi_{k\pi}$  pour  $\frac{\partial b_\pi}{\partial a_k}$ , ce qui nous donne des équations aux dérivées partielles qui sont absolument cruciales dans toute la théorie de Lie :

$$(2') \quad \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_k}(x; a) = \sum_{\pi=1}^r \Psi_{k\pi}(a, b) \cdot \Xi_{\pi\nu}(x', b) \quad (\nu = 1 \dots n, k = 1 \dots r)$$

*Ces équations sont de la plus haute importance [äusserst wichtig], comme nous allons le voir plus tard. [40], p. 29.*

Ici, nous avons remplacé  $c$  par  $c = c(a, b) = a \cdot b$ , d'où  $b(a, c(a, b)) \equiv b$ , et nous avons reconsidéré  $(a, b)$  comme variables indépendantes.

Maintenant, en posant  $b := e$  dans ces équations (2'), les dérivées partielles par rapport aux paramètres  $a_k$  des transformations  $x'_i = x'_i(x; a)$  s'expriment par des équations différentielles :

$$(2'') \quad \boxed{\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}(x; a) = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{ji}(x'(x; a))} \quad (i = 1 \dots n, k = 1 \dots r),$$

qui les font apparaître comme *combinaisons linéaires*, avec certains coefficients  $\psi_{kj}(a) := \Psi_{kj}(a, e)$  qui dépendent seulement de  $a$  des quantités  $\xi_{ji}(x') := \Xi_{ji}(x', b)|_{b=e}$ . Mais nous connaissons en fait déjà ces fonctions  $\xi_{ji}(x')$ .

En effet, si nous posons  $a = e$  dans ces équations, alors grâce à  $\psi_{kj}(e) = -\delta_{kj}^j$ , nous obtenons immédiatement :

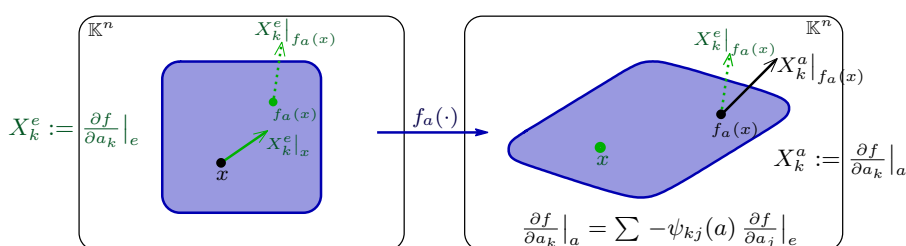
$$\xi_{ki}(x) = \xi_{ki}(x'(x; e)) = -\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}(x; e),$$

d'où les  $\xi_{ki}(x)$  coïncident, modulo un signe « moins » uniforme, avec les coefficients des  $r$  transformations infinitésimales que nous avons déjà introduites p. 98, et que nous avons considérées comme des opérateurs de dérivation donnant la direction d'un mouvement infinitésimal de

tous les points de l'espace :

$$(3) \quad \begin{aligned} X_k^e|_x &= \frac{\partial f_1}{\partial a_k}(x; e) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial a_k}(x; e) \frac{\partial}{\partial x_n} \\ &=: -\xi_{k1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - \xi_{kn}(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (k=1 \dots r). \end{aligned}$$

Maintenant enfin, après avoir reproduit à l'aveugle ces calculs arides d'élimination différentielle dûs à Lie, nous pouvons dévoiler encore plus précisément l'interprétation géométrique adéquate dont sont riches les équations différentielles (2'') doublement encadrées.



Signification géométrique des équations différentielles fondamentales

Plutôt que de différentier par rapport à  $a_k$  au point spécial  $(x; e)$ , nous pouvons, par souci de généralité, différentier en un point quelconque  $(x; a)$ , ce qui nous donne alors les champs de vecteurs :

$$X_k^a|_{f_a(x)} := \frac{\partial f_1}{\partial a_k}(x; a) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial a_k}(x; a) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (k=1 \dots r),$$

et alors les équations différentielles fondamentales expriment que ces  $r$  nouvelles transformations infinitésimales :

$$X_k^a|_{f_a(x)} = -\psi_{k1}(a) X_1^e|_{f_a(x)} - \dots - \psi_{kr}(a) X_r^e|_{f_a(x)}$$

sont des combinaisons linéaires à coefficients qui ne dépendent que des paramètres de groupe  $(a_1, \dots, a_r)$ , des  $r$  transformations infinitésimales  $X_1^e, \dots, X_r^e$  calculées au paramètre-identité  $e$ , et reconsidérées au point  $f_a(x)$  issu de  $x$  qui est « poussé » par la transformation  $f_a(\cdot)$ . Le diagramme illustre géométriquement cette interprétation.

Enfin, puisque la matrice  $\psi(a)$  possède un inverse  $\tilde{\psi}(a)$  qui est analytique dans un voisinage de  $e$ , les équations différentielles fondamentales peuvent aussi être écrites sous la forme réciproque, parfois utile :

$$(4) \quad \xi_{ji}(x'(x; a)) = \sum_{k=1}^r \tilde{\psi}_{jk}(a) \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial a_k}(x; a). \quad (i=1 \dots n; j=1 \dots r).$$

Nous pouvons donc maintenant énoncer le tout premier théorème fondamental de la théorie de Lie.

**Théorème.** ([40], pp. 33–34) *Si les  $n$  équations de transformations :*

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

*dont les paramètres  $a_1, \dots, a_r$  sont tous essentiels représentent un groupe continu fini local de transformations<sup>17</sup>, alors  $x'_1, \dots, x'_n$ , considérées comme fonctions de  $a_1, \dots, a_r, x_1, \dots, x_n$  satisfont certaines équations différentielles de la forme spécifique :*

$$(5) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a_1, \dots, a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r),$$

*où la matrice  $\psi_{kj}(a)$  de fonctions analytiques définie au voisinage de l'identité  $e$  satisfait  $\psi_{kj}(e) = -\delta_k^j$ , et où les fonctions  $\xi_{ki}(x)$ , égales à  $-\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}(x; e)$ , coïncident, modulo un signe « moins » uniforme, avec les coefficients des  $r$  transformations infinitésimales basiques :*

$$X_k^e|_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x; e) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r).$$

*De plus, il est impossible de trouver  $r$  quantités constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  non toutes nulles telles que les  $n$  expressions :*

$$\lambda_1 \xi_{1i}(x') + \dots + \lambda_r \xi_{ri}(x') \quad (i=1 \dots n)$$

*s'annulent simultanément.*

Cette dernière propriété signifie évidemment que les  $r$  transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$  sont *linéairement indépendantes*<sup>18</sup> et elle découle du fait que les paramètres sont tous essentiels<sup>19</sup>. Après avoir

<sup>17</sup> Ici, nous avons admis l'existence d'un élément identité et nous avons supposé que les transformations peuvent être ordonnées par paires de transformations inverses l'une de l'autre. Mais Engel et Lie déduisent l'existence d'équations différentielles du type (5) sous la seule hypothèse que la famille  $x' = f(x; a)$  soit fermée par composition, au sens explicite dans la note p. 94, voir aussi le § 3.9 ci-dessous.

<sup>18</sup> — sur  $\mathbb{C}$  ou sur  $\mathbb{R}$ , suivant que  $a \in \mathbb{C}^r$  ou  $a \in \mathbb{R}^r$  —

<sup>19</sup> Si les paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$  ne sont pas essentiels, d'après le théorème p. 86, le rang générique  $\rho_\infty$  de l'application infinie  $F_\infty$  des coefficients est  $\leq r - 1$ . Mais lorsque les équations de transformations constituent un *groupe* continu fini, on peut établir (voir [110]) qu'en fait, le *rang* (tout court) de  $F_\infty$  est égal à  $\rho_\infty$  au paramètre identité  $e$ , et donc aussi par voie de conséquence, égal à  $\rho_\infty$  dans un voisinage de  $e$ . Il existe donc au moins un champ de vecteurs  $\mathcal{T} = \sum_{k=1}^n \tau_k(a) \frac{\partial}{\partial a_k}$  non nul en  $e$  à coefficients analytiques tel que :  $0 \equiv \mathcal{T} f_i(x; a) = \sum_{k=1}^r \tau_k(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k}(x; a)$  pour tout



formé les transformations infinitésimales  $X_k := \frac{\partial f}{\partial a_k}(x; e)$ , on peut donc tester de manière directe, effective et finitaire l'essentialité des paramètres, en examinant seulement<sup>20</sup> s'il existe des combinaisons linéaires à coefficients *constants* entre les colonnes de la matrice  $\frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x; e)$ .

**Définition.** On dira que  $r$  champs de vecteurs quelconques (qui ne proviennent pas forcément d'un groupe de transformations) à coefficients analytiques  $X_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $k = 1, \dots, r$ , sont *indépendants* s'ils sont *linéairement indépendants*, à savoir, s'il n'existe pas de constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  non toutes nulles telles que  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r \equiv 0$ .

Ainsi un groupe dont les paramètres sont essentiels donne-t-il naissance à une collection de transformations infinitésimales *indépendantes*.

**Question.** Réciproquement, peut-on reconstituer le groupe de transformations  $x' = f(x; a_1, \dots, a_r)$  à partir des  $r$  transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$  qui donnent toutes les directions de mouvement infinitésimal possible, lorsqu'on fait subir un incrément infinitésimal  $(e_1, \dots, e_k + \varepsilon, \dots, e_n)$  à la  $k$ -ième coordonnée du paramètre-identité ?

Principe de retour en arrière de la genèse : on sait bien que la théorie de l'intégration permet de reconstituer le fini à partir de l'infinitésimal. Cette question en soulève d'autres. Comment intégrer un système

---

$i = 1, \dots, n$ . En remplaçant maintenant chacune des dérivées partielles  $\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}$  par sa valeur déduite des équations différentielles fondamentales (5), on obtient :

$$0 \equiv \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \tau_k(a) \psi_{kj}(a) \xi_{ji}(x'(x; a)) \quad (i = 1 \dots n).$$

Enfin, en posant  $a = e$  dans ces équations, en rappelant  $\psi_{kj}(e) = -\delta_k^j$ , et en introduisant les constantes  $\lambda_j := \sum_{k=1}^r \tau_k(e) \psi_{kj}(e) = -\tau_j(e)$  qui ne sont pas toutes nulles par hypothèse, on en déduit des équations :

$$0 \equiv \lambda_1 \xi_{1i}(x) + \dots + \lambda_r \xi_{ri}(x) \quad (i = 1 \dots n)$$

qui montrent que les champs de vecteurs  $X_k$  ne sont pas linéairement indépendants.

<sup>20</sup> C'est donc un exemple d'irréversible-synthétique : pour un groupe de transformations, on contourne ainsi l'infinité potentiellement imparcourable de toutes les vérifications qui seraient *a priori* nécessaires en toute généralité afin de connaître le rang générique *exact* de la matrice jacobienne  $\text{Jac } F_\infty$ , dont les colonnes sont en nombre *infini*. La généralité initiale du concept d'essentialité des paramètres se transforme en un critère concret, calculable et effectif.

de champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_r$  ? Retrouve-t-on toujours une famille de transformations fermée par composition ?

Lorsque  $r \geq 2$ , la « non-canonlicité » des  $r$  transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$  se révèle immédiatement. En effet, dès qu'on effectue un changement de paramètres  $a \mapsto b = b(a)$  fixant l'identité<sup>21</sup>, ce qui transforme  $f(x; a)$  en  $g(x; b) := f(x; a(b))$ , les  $r$  transformations infinitésimales  $Y_k := \frac{\partial g}{\partial b_k}(x; e)$  calculées de la même manière dans le nouvel espace des paramètres deviennent certaines combinaisons<sup>22</sup> linéaires à coefficients constants des précédentes transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$ . De telles combinaisons linéaires interviennent aussi nécessairement lorsqu'on calcule les transformations infinitésimales  $X_k$  non pas en l'identité  $e$ , mais en un paramètre  $a$  quelconque. Ainsi ces deux observations montrent clairement que la structure linéaire est centrale.

**3.6. Champs de vecteurs et groupes à un paramètre.** Pour commencer, étudions tout d'abord la question posée à l'instant dans le cas d'une seule transformation, c'est-à-dire lorsque  $r = 1$ . Dans la théorie de Lie s'exprime une affirmation d'équivalence ontologique qui a de nombreuses implications et qui demande des explications :

*transformation infinitésimale  $\equiv$  champ de vecteurs quelconque*

En effet et pour commencer, rappelons que tout champ de vecteurs :

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

n'est pas seulement un opérateur de dérivation, il vient aussi accompagné de son *flot* — dont nous admettrons l'existence, voir [88, 154, 92, 125] — noté :

$$(x; t) \mapsto \exp(tX)(x).$$

Ce flot est défini géométriquement en suivant la courbe intégrale de  $X$  issue d'un point  $x$  jusqu'au « temps »  $t$ , ou bien, de manière équivalente et d'un point de vue analytique, en intégrant le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (i=1 \dots n)$$

<sup>21</sup> On note alors  $b \mapsto a = b(a)$  le changement inverse de paramètres.

<sup>22</sup> La règle de dérivation des fonctions composées donne en effet immédiatement :  $\frac{\partial g_i}{\partial b_k}(x; e) = \sum_{l=1}^r \frac{\partial f_l}{\partial a_l}(x; e) \frac{\partial a_l}{\partial b_k}(e)$ .

avec la condition initiale  $x_i(0) = x_i$ , la valeur au temps  $t$  de la solution étant justement  $\exp(tX)(x)$ . Or le flot est un groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux :

$$\exp(t_2X)(\exp(t_1X)(x)) = \exp((t_1 + t_2)(X))(x),$$

l'identité correspondant au paramètre  $t = 0$  et l'inverse de  $x \mapsto \exp(tX)(x)$  étant tout simplement  $x \mapsto \exp(-tX)(x)$ .

Soit donc maintenant  $x'_i = f_i(x; a)$  un groupe continu de transformations (au sens de Lie) à *un seul* paramètre  $a \in \mathbb{C}$  (ou bien  $a \in \mathbb{R}$ ) pour lequel la transformation identique correspond au paramètre  $a = 0$ . Les équations différentielles fondamentales (5) ci-dessus :

$$\frac{dx'_i}{da} = \psi(a) \cdot \xi_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1 \dots n)$$

consistent alors en un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre paramétrées par  $a$ . Mais en introduisant le nouveau « paramètre-temps » défini par :

$$t = t(a) := \int_0^a \psi(\tilde{a}) d\tilde{a},$$

on peut transférer immédiatement ces équations différentielles fondamentales vers un système de  $n$  équations différentielles ordinaires dont tous les seconds membres deviennent *indépendants du temps* :

$$(1) \quad \frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1 \dots n).$$

L'intégration revient par conséquent à calculer le *flot* du champ de vecteurs :

$$X' := \sum_{i=1}^n \xi_i(x') \frac{\partial}{\partial x'_i},$$

vu dans l'espace des  $(x'_1, \dots, x'_n)$ . Avec les mêmes lettres  $f_i$ , nous écrivons  $f_i(x; t)$  à la place de  $f_i(x; a(t))$  en supposant que ce changement de paramètre a déjà été exécuté. Alors en fait, l'unique solution du système (1) avec la condition initiale  $x'_i(x; 0) = x_i$  n'est autre que  $x'_i = f_i(x; t)$  : le flot était donné et connu depuis le début. De plus, l'unicité du flot et le fait que les coefficients  $\xi_i$  sont indépendants de  $t$  impliquent tous deux que la loi de composition de groupe correspond alors juste à l'addition des paramètres « temporels » :

$$(2) \quad f_i(f(x; t_1); t_2) \equiv f_i(x; t_1 + t_2) \quad (i=1 \dots n).$$

En fait, on peut redresser localement<sup>23</sup> le champ  $X'$  en le champ très simple  $\frac{\partial}{\partial y'_1}$  dans un certain nouveau système de coordonnées  $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ , et alors le fait que les paramètres temporels s'additionnent devient évident.

**Théorème.** *Tout groupe continu à un paramètre :*

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; t) \quad (i=1 \dots n)$$

est localement équivalent, à travers un changement approprié de variables  $x \mapsto y = y(x)$ , à un groupe de translations :

$$y'_1 = y_1 + t, \quad y'_2 = y_2, \quad \dots, \quad y'_n = y_n.$$

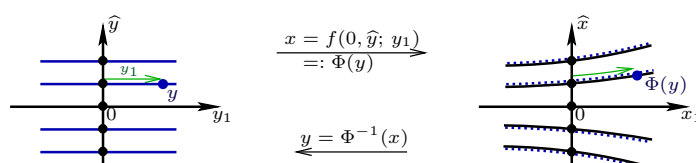


Fig. : Redressement d'un flot au moyen d'un difféomorphisme

*Preuve.* On peut supposer depuis le début que les coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  ont été choisies et adaptées de telle sorte que  $\xi_1(0) = 1$  et que  $\xi_2(0) = \dots = \xi_n(0) = 0$ . Dans un espace auxiliaire  $y_1, \dots, y_n$  représenté sur la gauche de la figure, considérons tous les points  $\hat{y} := (0, y_2, \dots, y_n)$  proches de l'origine qui se trouvent sur l'hyperplan de coordonnées complémentaires de l'axe des  $y_1$ , et introduisons le difféomorphisme :

$$y \mapsto x = x(y) := f(0, \hat{y}; y_1) =: \Phi(y),$$

défini en suivant le flot  $f(y; t)$  jusqu'à un temps  $t = y_1$  en partant de tous ces points possibles  $\hat{y}$  dans l'hyperplan en question. Cette application est effectivement un difféomorphisme local fixant l'origine, grâce à  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(0) = \frac{\partial f_1}{\partial t}(0) = \xi_1(0) = 1$ , grâce à  $\frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1}(0) = \frac{\partial f_k}{\partial t}(0) = \xi_k(0) = 0$  et grâce à  $\Phi_k(0, \hat{y}) \equiv \hat{y}_k$  for  $k = 2, \dots, n$ . Nous affirmons maintenant que le flot (courbé) qui est représenté dans la partie droite de la figure a ainsi été redressé à gauche pour devenir juste une translation uniforme dirigée par l'axe des  $y_1$ . En effet<sup>24</sup>, si l'on suppose à l'avance que le

<sup>23</sup> Rappelons que le principe de relocalisation sous-entend que l'on se replace en un point *générique* où le champ  $X$  ne s'annule pas (sinon il est identiquement nul, cas inintéressant).

<sup>24</sup> À travers le difféomorphisme local  $y \mapsto x = \Phi(y)$ , le flot  $x' = f(x; t)$  se transforme naturellement par substitution en le flot bien déterminé  $\Phi(y') = f(\Phi(y); t)$ , ou bien, de manière équivalente en le flot :  $y' = \Phi^{-1}(f(\Phi(y); t))$ .

nouveau flot est effectivement donné par  $\widehat{y}' = \widehat{y}$  et par  $y'_1 = y_1 + t$ , et si on effectue ensuite des substitutions :

$$x' = f(0, \widehat{y}'; y'_1) = f(0, \widehat{y}; y_1 + t) \stackrel{(2)}{=} f(f(0, \widehat{y}; y_1); t) = f(x; t),$$

nous retrouvons de cette manière-là le flot  $x' = f(x; t)$  qui était défini de manière unique.  $\square$

En général, dans les traités contemporains de géométrie différentielle, les flots sont étudiés sous l'hypothèse que les champs de vecteurs soient différentiables, de classe au moins  $\mathcal{C}^1$ , voire lipschitziens. Mais dans le cas où les coefficients des champs de vecteurs sont tous analytiques (hypothèse générale admise par Engel et Lie), il existe une série entière explicite et simple, appelée *série de Lie* (et étudiée entre autres par Gröbner [66]), qui redonne le flot *sans aucune intégration*, directement à partir des coefficients du champ de vecteurs  $X' = \sum_{i=1}^n \xi_i(x') \frac{\partial}{\partial x'_i}$ .

Admettons donc le résultat d'après lequel le flot (local ou global) est analytique, si les  $\xi_i(x')$  le sont<sup>25</sup>. La solution formelle  $x'(x; t)$  du système d'équations différentielles ordinaires (1) satisfaisant  $x'(x; 0) = x$  peut être recherchée en développant l'inconnue  $x'$  en série formelle par rapport à la variable temporelle  $t$ , les deux premiers termes étant évidents :

$$x'_i(x; t) = \sum_{k \geq 0} \Xi_{ik}(x) t^k = x_i + t \xi_i(x) + \dots \quad (i=1 \dots n).$$

Ainsi donc, quelles sont les fonctions-coefficients  $\Xi_{ik}(x)$  ? En différentiant (1) une première fois par rapport à  $t$ , puis en redérivant encore une fois le résultat obtenu, tout en resubstituant comme il se doit, on obtient par exemple :

$$\left[ \begin{aligned} \frac{d^2 x'_i}{dt^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x'_k} \frac{dx'_k}{dt} = X'(\xi_i) & (i=1 \dots n) \\ \frac{d^3 x'_i}{dt^3} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial X'(\xi_i)}{\partial x'_k} \frac{dx'_k}{dt} = X'(X'(\xi_i)), \end{aligned} \right.$$

<sup>25</sup> Voir [92] ; nous pourrions en fait ré-établir un tel résultat *via* des techniques de séries majorantes en partant de la formule exponentielle de Lie que nous allons donner à l'instant.

où  $X'(\xi_i)$  et  $X'(X'(\xi_i))$  sont des fonctions de  $(x'_1, \dots, x'_n)$ , et donc généralement, par une récurrence évidente :

$$\frac{d^k x'_i}{dt^k} = \underbrace{X'(\dots(X'(\xi_i))\dots)}_{k-1 \text{ fois}} = \underbrace{X'(\dots(X'(X'(x'_i)))\dots)}_{k \text{ fois}},$$

pour tout entier  $k \geq 1$ , sachant que  $X'(x'_i) = \xi_i = \xi_i(x')$  ; il sera utile de convenir que  $X'^0 x'_i = x'_i$  lorsque  $k = 0$ .

En posant maintenant  $t = 0$  dans ces équations  $\frac{d^k x'_i}{dt^k} = X'^k(x'_i)$ , nous obtenons donc l'expression recherchée des fonctions  $\Xi_{ik}(x)$  :

$$k! \Xi_{ik}(x) \equiv X'^k(x'_i)|_{t=0} = X^k(x_i),$$

où  $X := \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  est le même champ de vecteurs que  $X'$ , vu dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ . Ainsi de manière surprenante, l'intégration d'un flot dans le cas analytique revient à la sommation d'un nombre infini de termes *différentiés*.

**Proposition.** *L'unique solution  $x'(x; t)$  d'un système d'équations différentielles ordinaires :*

$$\begin{cases} \frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1, \dots, x'_n) \\ x'_i(x; 0) = x_i \end{cases} \quad (i=1 \dots n)$$

*qui est associé ou bien à un groupe de transformations à un seul paramètre via les équations différentielles fondamentales de Lie, ou bien à un champ de vecteurs quelconque  $X' = \sum_{i=1}^n \xi_i(x') \frac{\partial}{\partial x'_i}$ , est fournie par le développement en série entière convergent :*

$$(3) \quad x'_i(x; t) = x_i + t X(x_i) + \dots + \frac{t^k}{k!} X^k(x_i) + \dots \quad (i=1 \dots n),$$

*où  $X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  est le même champ que  $X'$  vu dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ , qui agit sur  $x_i$  comme dérivation  $X^k$  d'ordre  $k$  arbitraire. De plus, ce développement peut aussi être réécrit de manière appropriée au moyen d'une simple notation exponentielle :*

$$(3') \quad x'_i = \exp(t X)(x_i) = \sum_{k \geq 0} \frac{(t X)^k}{k!}(x_i) \quad (i=1 \dots n).$$

Ainsi cette proposition établit-elle l'équivalence ontologique fondamentale :

$$\boxed{\text{groupe local à un paramètre} \equiv \text{transformation infinitésimale}},$$

qui s'insère plus généralement dans l'équivalence fonctionnelle entre le différentiel infinitésimal et le local fini, tout en développant les premiers éléments d'une théorie géométrique du mouvement. Toutefois, cette équivalence ne saurait s'affirmer comme principe d'égalité absolue entre deux êtres initialement distincts qui deviendraient par là-même strictement interchangeables. Comme dans toute autre équivalence mathématique, l'ontologie est interrogation *en devenir* sur la structure et sur la constitution d'un être mathématique problématique. À travers les équivalences que l'être mathématique découvre à son propre sujet par l'analyse ou par la synthèse, l'être vise en effet à se déployer dans des espaces neufs qui soient propices à révéler sa nature intrinsèque, en supprimant toutes les formes d'arbitraire et de non-compréhension dont est entachée sa donation initiale.

À strictement parler, aucun énoncé mathématique d'équivalence entre deux concepts ou entre deux conditions spécifiques n'est réellement transparent dans une double circulation du sens. L'équivalence, en mathématiques, transcende tout concept logique ou méta-mathématique de termes formels syntaxiquement substituables.

En vérité, dans l'équivalence, il doit se manifester un différentiel-synthétique du potentiel interrogatif, comme par l'effet d'une révélation progressive qui autoriserait à *oublier* presque définitivement le membre initial de l'« équivalence » pour ne retenir que le membre final, plus rapproché, bien que peut-être encore fort éloigné, de l'essence de la chose à comprendre. Quant au choix de brisure de symétrie dans l'équivalence, c'est-à-dire quant au choix de l'initial et du final dans l'équivalence en question, c'est bien sûr le concept de transformation infinitésimale qui doit en quelque sorte *éliminer* le concept de groupe local à un paramètre, pour s'y substituer comme objet d'étude principal. Et c'est effectivement ce que Lie affirmera systématiquement dans ses travaux : grâce à l'équivalence en question, on peut *mettre entre parenthèses* l'intervention de l'analyse comme procédé d'intégration pour se concentrer seulement sur la classification des transformations infinitésimales. L'infinitésimal se substitue au fini, car il est plus simple : il est *linéaire*.

À vrai dire, si l'on accepte comme Lie les règles de la généralité comme hypothèse générale d'étude (*cf.* p. 80), le théorème de redressement montre que le concept de transformation infinitésimale individuelle est entièrement circonscrit. En effet, toute transformation infinitésimale se réduit au champ de vecteurs le plus simple possible :  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ , somme réduite à un seul terme, dérivation le long d'un seul axe de coordonnées, avec un coefficient constant égal à 1. L'infinitésimalisation

des transformations transfère la théorie des groupes vers l'algèbre, et tout d'abord, vers l'algèbre *linéaire*. On peut donc maintenant se demander quelle doit être l'équivalence entre groupe à  $r$  paramètres et système de  $r$  transformations infinitésimales mutuellement indépendantes  $X_1, \dots, X_r$ . Ici, l'Un va provoquer l'imprévu du Multiple, c'est-à-dire forcer la genèse de concepts inattendus. Mais pour l'instant, poursuivons l'étude des groupes à un seul paramètre.

Engel et Lie écrivent les champs de vecteurs  $X$  — qu'ils appellent systématiquement *transformations infinitésimales* — toujours sous la forme «  $Xf$  », non pas donc comme opérateur abstrait de dérivation, mais comme action effective sur une fonction-test toujours notée  $f = f(x_1, \dots, x_n)$ . L'action concrète de  $X$  sur  $f$  consiste bien entendu à le faire agir comme dérivation :

$$Xf = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Eu égard à l'équivalence ontologique sus-mentionnée, il est naturel de se demander maintenant (scholie) quelle est l'action d'un groupe fini à un paramètre sur les fonctions. Si donc  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction analytique arbitraire, si l'on compose  $f$  avec le flot du groupe à un paramètre :

$$f' := f(x'_1, \dots, x'_n) = f(x'_1(x; t), \dots, x'_n(x; t)),$$

et si l'on développe en série entière cette composition par rapport à  $t$  :

$$f' = (f')_{t=0} + \frac{t}{1!} \left(\frac{df'}{dt}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{d^2 f'}{dt^2}\right)_{t=0} + \dots,$$

on doit calculer les quotients différentiels  $\frac{df'}{dt}$ ,  $\frac{d^2 f'}{dt^2}$ , ..., ce qui ne pose à vrai dire aucune difficulté :

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{df'}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dx'_i}{dt} \frac{\partial f'}{\partial x'_i} = \sum_{i=1}^n \xi'_i \frac{\partial f'}{\partial x'_i} = X'(f'), \\ \frac{d^2 f'}{dt^2} = X' \left( \frac{df'}{dt} \right) = X'(X'(f')), \end{array} \right.$$

et ainsi de suite. En posant  $t = 0$ , chaque  $x'_i$  devient  $x_i$ , la fonction  $f'$  devient  $f$  et  $X'(f')$  devient  $X(f)$ , et ainsi de suite, et grâce à ces observations, on obtient le développement recherché :

(4)

$$\begin{aligned} f(x'_1, \dots, x'_n) &= f(x_1, \dots, x_n) + \frac{t}{1!} X(f) + \dots + \frac{t^k}{k!} X^k(f) + \dots \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(tX)^k}{k!} (f) = \exp(tX)(f), \end{aligned}$$



qui fait bien sûr réapparaître la symbolique exponentielle. Évidemment, par différentiation, on doit retrouver l'action infinitésimale :

$$Xf = \frac{d}{dt} (\exp(tX)(f))_{t=0}.$$

Maintenant, soit  $X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  une transformation infinitésimale qui engendre le groupe à un paramètre  $x' = \exp(tX)(x)$ . Qu'advient-il lorsque les variables  $x_1, \dots, x_n$  sont soumises à un changement de coordonnées analytiques locales ? Cette question générale est tout à fait cruciale quant à l'individuation effective. En effet, toute donation dans un système de coordonnées est entachée de quelconque et d'arbitraire. Principe métaphysique : user au maximum de la liberté que l'on a de changer le système de coordonnées afin de spécifier et de simplifier au mieux les individus géométriques.

En premier lieu, on doit donc comprendre *a priori* (et en général) de quelle façon les transformations infinitésimales arbitraires sont modifiées, simplifiées ou complexifiées lorsqu'on effectue un changement arbitraire de variables.

Soit donc  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  un changement de coordonnées analytiques locales, c'est-à-dire en faisant apparaître les indices :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = (\bar{x}_1(x), \dots, \bar{x}_n(x)).$$

Ici, en respectant la pensée de Lie, aucun symbole fonctionnel n'est introduit, mais pour les besoins occasionnels de l'exégèse moderne, on pourrait convenir d'appeler  $x \mapsto \Phi(x) = \bar{x}$  ce difféomorphisme local, avec une lettre auxiliaire  $\Phi$ . Néanmoins, le formalisme de Lie présente un avantage considérable par rapport au formalisme contemporain, et ce, pour au moins deux raisons.

- D'un point de vue symbolique, le difféomorphisme inverse :

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n) = (x_1(\bar{x}), \dots, x_n(\bar{x}))$$

s'exprime exactement comme le difféomorphisme initial, en intervertissant seulement<sup>26</sup> les rôles de  $x$  et de  $\bar{x}$ .

- Aussi bien dans les applications concrètes que dans les démonstrations des théorèmes de classification, les fonctions coordonnées-images sont toujours données *explicitement* ou *spécifiquement* en fonction des coordonnées-sources  $(x_1, \dots, x_n)$ , si bien que l'introduction de

<sup>26</sup> On se dispense ainsi d'avoir à résoudre la micro-question de présentation symbolique formelle : « est-il plus adapté de choisir la lettre  $\Phi$  ou bien la lettre  $\Phi^{-1}$  pour désigner le difféomorphisme initial ? ».

symboles fonctionnels  $\Phi_i$  serait superflue ou redondante. En fait, tout changement de coordonnées sous-entend une *procédure de remplacement automatique d'anciennes variables par de nouvelles variables*, ce que la notation  $x = x(\bar{x})$  montre de manière adéquate.

Ainsi, une fonction arbitraire  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  définie dans l'espace-source donne alors naissance, à travers le « miroir » du changement de coordonnées, à la fonction correspondante :

$$(5) \quad \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) := f(x_1(\bar{x}), \dots, x_n(\bar{x}))$$

qui est définie dans l'espace-image. Cette relation s'écrit aussi de manière symétrique :

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x).$$

Le transfert d'une dérivation arbitraire  $X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  à travers ce miroir doit alors être tel que la relation purement symétrique :

$$X(f) = \bar{X}(\bar{f}),$$

soit satisfaite pour toute fonction  $f$ , c'est-à-dire que, après remplacement à droite de  $\bar{x}$  par  $\bar{x}(x)$  et en utilisant la différentiation de (5) par rapport à  $\bar{x}_k$ , le transfert doit satisfaire :

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k(\bar{x}) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_k} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}(x)} \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k(\bar{x}(x)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}(\bar{x}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k(\bar{x}(x)) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}(\bar{x}(x)) \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Autrement dit, de manière abrégée et en supprimant le symbole de fonction-test :

$$X = \sum_{i=1}^n \bar{X}(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

En intervertissant les rôles de  $X$  et de  $\bar{X}$ , nous avons donc démontré l'énoncé suivant.

**Lemme.** *À travers un changement arbitraire de coordonnées locales :*

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = (\bar{x}_1(x), \dots, \bar{x}_n(x)),$$

un champ de vecteurs quelconque  $X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  est transféré vers :

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}.$$

De la même manière que l'on pouvait écrire l'équation  $\bar{f} = f$ , on peut maintenant écrire  $\bar{X} = X$ , étant entendu que ces deux écritures n'ont de sens que si l'on remplace partout  $\bar{x}$  par  $x$  (ou partout  $x$  par  $\bar{x}$ ).

À présent, comment sont transformés les groupes à un paramètre ? L'énoncé suivant (cf. [40, 88, 154]), que nous ne redémontrons pas, découle aisément des considérations précédentes.

**Proposition.** *Le nouveau groupe à un paramètre  $\bar{x}' = \exp(t\bar{X})(\bar{x})$  associé au nouveau champ de vecteurs  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$  peut être retrouvé à partir de l'ancien  $x' = \exp(tX)(x)$  grâce à la formule canonique :*

$$\exp(t\bar{X})(\bar{x}) = \exp(tX)(x) \Big|_{x=x(\bar{x})}.$$

En d'autres termes, l'ancien groupe à un paramètre :

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1} X(x_i) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X^2(x_i) + \dots \quad (i=1 \dots n)$$

est transféré vers le nouveau groupe à un paramètre :

$$\bar{x}'_i = \bar{x}_i + \frac{t}{1} \bar{X}(\bar{x}_i) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \bar{X}^2(\bar{x}_i) + \dots \quad (i=1 \dots n),$$

où la variable  $t$  reste la même dans les deux collections de  $n$  équations.

Après ces préparatifs, nous pouvons maintenant revenir à la question soulevée à la fin du § 3.5 : comment reconstituer les équations  $x'_i = f_i(x; a)$  d'un groupe continu fini de transformations à partir de ses transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$  ? En prenant une combinaison linéaire arbitraire  $X := \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r$  de ces transformations, après fixation des constantes  $\lambda_k$ , on peut considérer le groupe à un paramètre  $\exp(tX)(x)$  qui est engendré par  $X$ . Autrement dit, en considérant après-coup que les constantes  $\lambda_k$  peuvent aussi redevenir variables, on obtient de nouvelles équations de transformations :

$$\begin{aligned} x'_i &= \exp(t \lambda_1 X_1 + \dots + t \lambda_r X_r)(x_i) \\ &=: h_i(x; t, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \end{aligned} \quad (i=1 \dots n)$$

paramétrées non seulement par le « temps »  $t$ , mais aussi par ces constantes arbitraires  $\lambda_k$ . La réponse positive que l'on a déjà devinée

énoncera que ces équations de transformations, appelées *équations finies canoniques* du groupe par Engel et Lie, recouvrent complètement les équations originales  $x'_i = f_i(x; a)$ .

Avant de poursuivre, résumons le parcours spéculatif et soulevons des questions nouvelles. Le Multiple  $X_1, \dots, X_r$  comprend l'Un-divers  $X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r$  de transformations infinitésimales individuelles possibles. Chaque tel Un-divers jouit pleinement de l'équivalence ontologique avec le groupe à un paramètre qu'il engendre. Ainsi le groupe à un paramètre de l'Un-divers fournit-il gratuitement des équations de transformations à plusieurs paramètres. La question de savoir comment ces équations de transformations  $x'_i = h_i(x; t, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$  sont reliées aux anciennes équations se divise alors en deux questions.

- Étant donné  $r$  transformations infinitésimales linéairement indépendantes  $X_1, \dots, X_r$  qui proviennent d'un groupe continu à  $r$  paramètres essentiels  $x' = f(x; a_1, \dots, a_r)$ , comment choisir<sup>27</sup> les paramètres  $t, \lambda_1, \dots, \lambda_r$  dans les équations de transformations  $x' = \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(x)$  pour retrouver  $x' = f(x; a_1, \dots, a_r)$  ?

- Étant donné  $r$  transformations infinitésimales linéairement indépendantes quelconques  $X_1, \dots, X_r$  qui ne proviennent pas forcément d'un groupe continu fini, les équations de transformations  $x' = \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(x)$  constituent-elles un groupe continu fini ? Et si tel n'est pas le cas, sous quelles conditions, nécessaires, suffisantes, ou mieux encore : *nécessaires et suffisantes*<sup>28</sup> cette conclusion est-elle satisfaite ?

La seconde question exige la notion cruciale de crochet de Lie (§§ 3.8 et 3.9 ci-dessous), tandis que la réponse à la première peut s'en dispenser : le passage à un niveau supérieur d'abstraction dans les conditions de donation implique un renversement complet du champ synthétique.

Tout d'abord, au sujet des fonctions  $h_i(x; t, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$  introduites à l'instant, une question se pose immédiatement : les  $r + 1$  paramètres  $t$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  y sont-ils essentiels ? Certainement pas : ces  $r + 1$  paramètres se réduisent en fait à  $r$  paramètres (au maximum), puisque chaque  $\lambda_i$  apparaît multiplié par  $t$  dans  $\exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(x)$ .

<sup>27</sup> Nous venons d'annoncer que l'on retrouve les équations d'origine, mais il aurait très bien pu se produire que les équations  $x' = \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(x)$  leur soient purement étrangères.

<sup>28</sup> Nécessité et suffisance en toute circonstance : exigence riemannienne universelle.

Toutefois, en posant  $t = 1$ , Engel et Lie établissent l'essentialité des  $r$  paramètres restants  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  par une démonstration sophistiquée et ingénieuse que nous restituons, en la modernisant et avec de plus amples détails, à la fin de ce paragraphe.

**Théorème 8.** ([40], p. 65) *Si  $r$  transformations infinitésimales :*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r)$$

*sont mutuellement [linéairement] indépendantes et si, de plus,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont des paramètres arbitraires, alors la totalité [Inbegriff] des groupes<sup>29</sup> à un paramètre  $\lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f)$  forme une famille de transformations :*

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot \xi_{ki} + \sum_{k,j}^{1 \dots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} \cdot X_k(\xi_{ji}) + \dots \quad (i=1 \dots n),$$

*dans lesquelles les  $r$  paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont tous essentiels, donc une famille de  $\infty^r$  transformations différentes<sup>30</sup>.*

Fait remarquable : toute question spéculative ou rhétorique qui apparaît naturellement est traitée par Engel et Lie *au moment approprié* dans le continu temporel et mémoriel du déploiement irréversible de la théorie. S'il existe une systématique du questionnement, c'est dans les mathématiques d'inspiration riemannienne qui se sont développées pendant la deuxième moitié du 19<sup>ème</sup> siècle qu'il faut en trouver les racines, bien avant que l'axiomatique formelle du 20<sup>ème</sup> siècle ne l'enfouisse sous des strates de reconstitution *a posteriori* et *non ouvertement problématisante*.

Maintenant, examinons la première question. Pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  fixés, la transformation infinitésimale combinaison linéaire  $X := \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r$  a pour coefficients :

$$\xi_i(x) := \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_{ji}(x) \quad (i=1 \dots n).$$

<sup>29</sup> Le principe d'équivalence ontologique énoncé p. 110 s'exerce déjà implicitement ici : tout groupe à un paramètre est *identifié* par Lie à son générateur infinitésimal.

<sup>30</sup> La notation «  $\infty^r$  » désigne le nombre de paramètres *continus* (d'où le symbole d'infinité  $\infty$ ) dont dépend un objet analytique ou géométrique.

Par définition du flot  $x' = \exp(tX)(x)$ , les fonctions :

$$h_i(x; t, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(x_i)$$

satisfont le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dh_i}{dt} = \xi_i(h_1, \dots, h_n) \quad (i=1 \dots n),$$

ou bien, de manière équivalente :

$$(6) \quad \frac{dh_i}{dt} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{ji}(h_1, \dots, h_n) \quad (i=1 \dots n),$$

avec bien sûr la condition initiale  $h(x; 0, \lambda) = x$  lorsque  $t = 0$ . D'un autre côté, d'après le paragraphe qui précède le Théorème p. 104, les fonctions  $f_i$  des équations de transformations d'origine  $x'_i = f_i(x; a)$  satisfont les équations différentielles fondamentales :

$$(4) \quad \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \tilde{\psi}_{jk}(a) = \xi_{ji}(f_1, \dots, f_n) \quad (i=1 \dots n; j=1 \dots r).$$

La correspondance recherchée entre les équations de transformations initiales  $x' = f(x; a)$  du groupe et ses équations finies canoniques  $x' = h(x; t, \lambda)$  est maintenant fournie par la proposition suivante, qui résout la première question.

**Proposition.** *Si les paramètres  $a_1, \dots, a_r$  sont les uniques solutions  $a_k(t, \lambda)$  du système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre :*

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{\psi}_{jk}(a) \quad (k=1 \dots r)$$

*satisfaisant la condition initiale d'après laquelle  $a(0, \lambda) = e$  est l'élément identité, alors les équations suivantes sont identiquement satisfaites :*

$$f_i(x; a(t, \lambda)) \equiv \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(x_i) = h_i(x; t, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad (i=1 \dots n)$$

*et elles montrent comment les fonctions  $h_i$  se déduisent des fonctions  $f_i$ .*

*Preuve.* En effet, multiplions (4) ci-dessus par  $\lambda_j$  et sommons par rapport à  $j$  pour  $j$  allant de 1 jusqu'à  $r$ , ce qui nous donne :

$$\sum_{k=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{\psi}_{jk}(a) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{ji}(f_1, \dots, f_n) \quad (i=1 \dots n).$$

Grâce à l'hypothèse principale concernant les  $a_k$ , nous pouvons remplacer la seconde somme du membre de gauche par  $\frac{da_k}{dt}$ , et nous obtenons ainsi des identités :

$$\sum_{k=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} \equiv \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{ji}(f_1, \dots, f_n) \quad (i=1 \dots n)$$

dans la partie gauche desquelles nous reconnaissons une simple dérivation par rapport à  $t$  :

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{d}{dt} [f_i(x; a(t, \lambda))] \equiv \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{ji}(f_1, \dots, f_n) \quad (i=1 \dots n).$$

Mais puisque  $f(x; a(0, \lambda)) = f(x; e) = x$  est soumis à la même condition initiale que la solution  $h(x; t, \lambda)$  du système (6), lorsque  $t = 0$ , l'unicité des solutions à un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre implique immédiatement la coïncidence annoncée :  $f(x; a(t, \lambda)) \equiv h(x; t, \lambda)$ .  $\square$

*Démonstration du Théorème 8 p. 117.* Ici exceptionnellement, nous avons observé une légère incorrection technique (la seule que nous ayons pu découvrir !) dans la preuve écrite par Engel et par Lie ([40], pp. 62–65) au sujet du lien entre le rang générique de  $X_1|_x, \dots, X_r|_x$  et une borne inférieure pour le nombre des paramètres essentiels<sup>31</sup>.

L'idée géométrique principale de Lie est astucieuse et pertinente : elle consiste à introduire exactement  $r$  — le nombre des  $\lambda_k$  — copies du même espace  $x_1, \dots, x_n$  dont les coordonnées seront notées  $x_1^{(\mu)}, \dots, x_n^{(\mu)}$  pour  $\mu = 1, \dots, r$  et à considérer la famille des équations de transformations qui sont induites par les *mêmes équations de transformations* :

$$x_i^{(\mu)'} = \exp(C)(x_i^{(\mu)}) = h_i(x^{(\mu)}; \lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad (i=1 \dots n; \mu=1 \dots r)$$

dans chaque copie de l'espace, avec le paramètre « temporel »  $t = 1$ , où l'on pose pour abrégé  $h(x; \lambda) := h(x; 1, \lambda)$ . Géométriquement, on voit ainsi de quelle manière les équations de transformations initiales  $x_i' = h_i(x; \lambda_1, \dots, \lambda_r)$  agissent *simultanément* sur les  $r$ -uples de points. Si on les

<sup>31</sup> À la page 63, il est dit que si le nombre  $r$  de transformations infinitésimales indépendantes  $X_k$  est  $\leq n$ , alors la matrice  $(\xi_{ki}(x))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq r}}$  (de taille  $r \times n$ ) de leurs coefficients est de rang générique égal à  $r$ , mais cette assertion est contredite pour  $n = r = 2$  par les deux champs de vecteurs  $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$  et  $xy \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$ . Toutefois les idées et les arguments de la preuve présentée (qui ne nécessite en fait pas de telle assertion) sont parfaitement corrects.

développe en série entière par rapport aux paramètres  $\lambda_k$ , ces transformations s'écrivent :

$$(5) \quad x_i^{(\mu)'} = x_i^{(\mu)} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot \xi_{ki}^{(\mu)} + \sum_{k,j}^{1 \dots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} \cdot X_k^{(\mu)}(\xi_{ji}^{(\mu)}) + \dots$$

$(i=1 \dots n; \mu=1 \dots r),$

où nous avons bien sûr posé :  $\xi_{ki}^{(\mu)} := \xi_{ki}(x^{(\mu)})$  et  $X_k^{(\mu)} := \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x^{(\mu)}) \frac{\partial}{\partial x_i^{(\mu)}}$ . Une telle idée se révélera fructueuse dans d'autres contextes, cf. la démonstration du Théorème 24 p. 149 ci-dessous.

D'après le théorème p. 86, afin d'établir que les paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont essentiels, on doit seulement développer  $x'$  en série entière par rapport à  $x$  à l'origine :

$$x_i' = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{F}_\alpha^i(\lambda) x^\alpha \quad (i=1 \dots n),$$

et montrer que le rang générique de la matrice infinie des coefficients  $\lambda \mapsto (\mathcal{F}_\alpha^i(\lambda))_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{1 \leq i \leq n}$  est le maximal possible, égal à  $r$ . De même et immédiatement, on obtient le développement correspondant des équations de transformations dans les espaces-copies :

$$(6) \quad x_i^{(\mu)'} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{F}_\alpha^{i,(\mu)}(\lambda) (x^{(\mu)})^\alpha \quad (i=1 \dots n; \mu=1 \dots r),$$

avec, pour tout  $\mu = 1, \dots, r$ , les *mêmes* fonctions coefficients :

$$\mathcal{F}_\alpha^{i,(\mu)}(\lambda) \equiv \mathcal{F}_\alpha^i(\lambda) \quad (i=1 \dots n; \alpha \in \mathbb{N}^n; \mu=1 \dots r).$$

Il en découle que le rang générique de la matrice infinie des coefficients correspondante, qui n'est autre qu'une copie de  $r$  fois la même application  $\lambda \mapsto (\mathcal{F}_\alpha^i(\lambda))_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{1 \leq i \leq n}$ , ni ne croît, ni ne décroît.

*Ainsi, les paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  pour les équations de transformations  $x' = h(x; \lambda)$  sont essentiels si et seulement si ils sont essentiels pour les équations de transformations diagonales  $x^{(\mu)'} = h(x^{(\mu)}; \lambda)$ ,  $\mu = 1, \dots, r$ , induites sur le produit de  $r$  copies de l'espace des  $x_1, \dots, x_n$ .*

Donc il nous faut démontrer que le rang générique de la copie de  $r$  matrices infinies de coefficients  $\lambda \mapsto (\mathcal{F}_\alpha^{i,(\mu)}(\lambda))_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{1 \leq i \leq n, 1 \leq \mu \leq r}$  est égal à  $r$ . Nous allons en fait établir que le rang en  $\lambda = 0$  de cette même application est déjà égal à  $r$ , ou, de manière équivalente, que la matrice infinie *constante* :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha^{i,(\mu)}}{\partial \lambda_k} (0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq \mu \leq r \\ 1 \leq k \leq r}}$$

dont les  $r$  lignes sont indexées par les dérivées partielles, est de rang égal  $r$ .



Afin de préparer cette matrice infinie, si nous différencions les développements (5) — qui s'identifient à (6) — par rapport à  $\lambda_k$  en  $\lambda = 0$ , et si nous développons les coefficients de nos transformations infinitésimales :

$$\xi_{ki}(x^{(\mu)}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \xi_{ki\alpha} \cdot (x^{(\mu)})^\alpha \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r; \mu=1 \dots r)$$

par rapport aux puissances de  $x_1, \dots, x_n$ , nous obtenons une expression appropriée de cette matrice :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha^{i,(\mu)}}{\partial \lambda_k} (0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq \mu \leq r \\ 1 \leq k \leq r}} &\equiv \left( (\xi_{ki\alpha})_{\substack{1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq k \leq r}} \dots (\xi_{ki\alpha})_{\substack{1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq k \leq r}} \right) \\ &=: \left( T^\infty \Xi(0) \dots T^\infty \Xi(0) \right). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons dit, il suffit donc de démontrer que cette matrice est de rang  $r$ . Visiblement, cette matrice s'identifie à  $r$  copies de la même matrice infinie  $T^\infty \Xi(0)$  de tous les coefficients de Taylor en 0 de la matrice :

$$\Xi(x) := \begin{pmatrix} \xi_{11}(x) & \dots & \xi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x) & \dots & \xi_{rn}(x) \end{pmatrix}$$

des coefficients des transformations infinitésimales  $X_k$ . À présent, nous pouvons formuler un lemme auxiliaire qui va nous permettre de conclure.

**Lemme.** Soit  $n \geq 1, q \geq 1, m \geq 1$  des entiers, soit  $x \in \mathbb{C}^n$  et soit :

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1}(x) & \dots & a_{qm}(x) \end{pmatrix}$$

une matrice arbitraire  $q \times m$  de fonctions analytiques :

$$a_{ij}(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{ij\alpha} x^\alpha \quad (i=1 \dots q; j=1 \dots m)$$

qui sont toutes définies dans un voisinage fixé de l'origine dans  $\mathbb{C}^n$ , et soit la matrice constante  $q \times \infty$  de tous ses coefficients de Taylor à l'origine :

$$T^\infty A(0) := (a_{ij\alpha})_{\substack{1 \leq j \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq i \leq q}}$$

dont les  $q$  lignes sont étiquetées par l'indice  $i$ . Alors l'inégalité suivante entre rangs génériques est satisfaite :

$$\text{rang } T^\infty A(0) \geq \text{rang-générique } A(x).$$

*Preuve.* Ici, notre matrice infinie  $T^\infty A(0)$  sera considérée comme agissant par multiplication à gauche sur des vecteurs horizontaux  $u = (u_1, \dots, u_q)$ , de telle sorte que  $u \cdot T^\infty A(0)$  est une matrice  $\infty \times 1$ , c'est-à-dire un vecteur horizontal infini. De manière similaire,  $A(x)$  agira sur des vecteurs horizontaux de fonctions analytiques  $(u_1(x), \dots, u_r(x))$ .

Supposons que  $u = (u_1, \dots, u_q) \in \mathbb{C}^q$  est un vecteur quelconque dans le noyau de  $T^\infty A(0)$ , à savoir :  $0 = u \cdot T^\infty A(0)$ , c'est-à-dire avec des indices :

$$0 = u_1 \cdot a_{1j\alpha} + \dots + u_q \cdot a_{qj\alpha} \quad (j=1 \dots m; \alpha \in \mathbb{N}^n);$$

nous déduisons alors immédiatement, après avoir multiplié chaque telle équation par  $x^\alpha$  et après avoir sommé sur tous les  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  que :

$$0 \equiv u_1 \cdot a_{1j}(x) + \dots + u_q \cdot a_{qj}(x) \quad (j=1 \dots m),$$

de telle sorte que le même vecteur constant  $u = (u_1, \dots, u_q)$  satisfait aussi  $0 \equiv u \cdot A(x)$ . Il en découle que la dimension du noyau de  $T^\infty A(0)$  est inférieure ou égale à la dimension du noyau de  $A(x)$  (en un point générique  $x$ ) : ceci coïncide clairement avec l'inégalité entre rangs (génériques) écrite ci-dessus.  $\square$

Maintenant, pour tout  $q = 1, 2, \dots, r$ , nous voulons appliquer le lemme avec la matrice  $A(x)$  égale à :

$$(\Xi(x^{(1)}) \quad \Xi(x^{(2)}) \quad \dots \quad \Xi(x^{(q)})),$$

c'est-à-dire égale à :

$$\Xi_q(\tilde{x}_q) := \begin{pmatrix} \xi_{11}^{(1)} & \dots & \xi_{1n}^{(1)} & \xi_{11}^{(2)} & \dots & \xi_{1n}^{(2)} & \dots & \xi_{11}^{(q)} & \dots & \xi_{1n}^{(q)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}^{(1)} & \dots & \xi_{rn}^{(1)} & \xi_{r1}^{(2)} & \dots & \xi_{rn}^{(2)} & \dots & \xi_{r1}^{(q)} & \dots & \xi_{rn}^{(q)} \end{pmatrix},$$

où nous avons abrégé :

$$\tilde{x}_q := (x^{(1)}, \dots, x^{(q)}).$$

**Assertion.** C'est une conséquence du fait que  $X_1, X_2, \dots, X_r$  sont linéairement indépendants que pour tout  $q = 1, 2, \dots, r$ , on a :

$$\text{rang-générique} \left( \Xi(x^{(1)}) \quad \Xi(x^{(2)}) \quad \dots \quad \Xi(x^{(q)}) \right) \geq q.$$

*Preuve.* En effet, pour  $q = 1$ , il est en premier lieu clair que :

$$\text{rang-générique} \left( \Theta(x^{(1)}) \right) \geq 1,$$

puisque l'un au moins des  $\xi_{ki}(x)$  ne s'annule pas identiquement. Établissons ensuite par récurrence que, aussi longtemps qu'ils restent  $< r$ , les rangs génériques augmentent au moins d'une unité à chaque pas :

$$\text{rang-générique} \left( \Xi_{q+1}(\tilde{x}_{q+1}) \right) \geq 1 + \text{rang-générique} \left( \Xi_q(\tilde{x}_q) \right),$$

une propriété qui conclura visiblement la preuve de l'Assertion.

En effet, si au contraire les rangs génériques se stabilisaient lorsqu'on passe de  $q$  à  $q + 1$ , tout en restant demeuraient  $< r$ , alors localement au voisinage d'un point générique, fixé  $\tilde{x}_{q+1}^0$ , les deux matrices  $\Xi_{q+1}$  et  $\Xi_q$  auraient le même rang, localement constant. Par conséquent, les solutions

$(\vartheta_1(\tilde{x}_q) \cdots \vartheta_r(\tilde{x}_q))$  au système d'équations linéaires écrit sous forme matricielle :

$$0 \equiv (\vartheta_1(\tilde{x}_q) \cdots \vartheta_r(\tilde{x}_q)) \cdot \Xi_q(\tilde{x}_q),$$

lesquelles sont analytiques près de  $\tilde{x}_q^0$  — grâce à une application de la règle de Cramer et grâce à la constance du rang — seraient automatiquement solutions du système étendu :

$$0 \equiv (\vartheta_1(\tilde{x}_q) \cdots \vartheta_r(\tilde{x}_q)) \cdot (\Xi_q(\tilde{x}_q) \ \Xi(x^{(q+1)})),$$

et donc il existerait des solutions *non nulles*  $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_r)$  aux équations de dépendance linéaire :

$$0 = (\vartheta_1 \cdots \vartheta_r) \cdot \Xi(x^{(q+1)})$$

qui seraient *constantes* par rapport à la variable  $x^{(q+1)}$ , puisqu'elles dépendent seulement de  $\tilde{x}_q$ . Ceci contredirait précisément l'hypothèse que  $X_1^{(q+1)}, \dots, X_r^{(q+1)}$  sont linéairement indépendants.  $\square$

Pour terminer, nous pouvons enchaîner une série d'inégalités qui sont maintenant des conséquences évidentes du Lemme et de l'Assertion :

$$\begin{aligned} \text{rang} \left( \mathbb{T}^\infty \Xi(0) \cdots \mathbb{T}^\infty \Xi(0) \right) &= \text{rang } \mathbb{T}^\infty \Xi_r(0) \\ &\geq \text{rang-générique } \Xi_r(\tilde{x}_r) \geq r, \end{aligned}$$

et puisque tous ces rangs (génériques) sont en tout cas  $\leq r$ , nous obtenons l'estimation promise :

$$r = \text{rank} \left( \mathbb{T}^\infty \Xi(0) \cdots \mathbb{T}^\infty \Xi(0) \right),$$

ce qui achève finalement la démonstration du théorème.  $\square$

Afin de mémoriser le prolongement des transformations au produit de  $r$  copies de l'espace des  $x_1, \dots, x_n$ , formulons une proposition qui sera utilisée dans la démonstration du Théorème 24 p. 149.

**Proposition.** *Si les  $r$  transformations infinitésimales :*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

*sont linéairement indépendantes et si de plus :*

$$x_1^{(\mu)}, \dots, x_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1 \dots r)$$

*sont  $r$  systèmes distincts de  $n$  variables, et si enfin on pose pour abrégé :*

$$X_k^{(\mu)}(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1^{(\mu)}, \dots, x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}} \quad (k, \mu = 1 \dots r),$$

alors les  $r$  transformations infinitésimales :

$$W_k(f) = \sum_{\mu=1}^r X_k^{(\mu)}(f) \quad (k=1 \dots r)$$

en les  $nr$  variables  $x_i^{(\mu)}$  ne satisfont aucune relation de la forme :

$$\sum_{k=1}^n \chi_k(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}) \cdot W_k(f) \equiv 0.$$

### 3.7. Le théorème de Clebsch-Lie-Frobenius. Question préliminaire :

Quelles sont les solutions générales  $\omega$  à une équation scalaire aux dérivées partielles du premier ordre  $X\omega = 0$  associée à un champ de vecteurs  $X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  à coefficients analytiques ?

Les relocalisations au voisinage d'un point générique étant autorisées, nous pouvons supposer, après une renumérotation éventuelle des variables, que  $\xi_n$  ne s'annule pas en un point que nous choisissons comme origine d'un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ . En divisant par  $\xi_n(x)$ , il est équivalent de rechercher les fonctions  $\omega$  qui sont annihilées par l'opérateur différentiel :

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_i(x)}{\xi_n(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_n},$$

toujours noté  $X$  et qui satisfait maintenant  $X(x_n) \equiv 1$ . Rappelons que le système d'équations différentielles ordinaires qui définit les courbes intégrales de ce champ  $X$ , à savoir le système :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\xi_1(x(t))}{\xi_n(x(t))}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = \frac{\xi_{n-1}(x(t))}{\xi_n(x(t))}, \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = 1,$$

avec la condition initiale pour  $t = 0$  :

$$x_1(0) = x_1, \dots, x_{n-1}(0) = x_{n-1}, \quad x_n(0) = 0,$$

est *résoluble* ; plus précisément, il possède une unique solution  $(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(t))$  qui est analytique dans un voisinage de l'origine. En vérité, nous connaissons déjà la technique de résolution. Tout d'abord, par une intégration évidente, on a  $x_n(t) = t$  ; ensuite, les  $(n-1)$  autres fonctions  $x_k(t)$  sont données par la merveilleuse formule exponentielle (Proposition p. 110) :

$$x_k(t) = \exp(tX)(x_k) = \sum_{l \geq 0} \frac{t^l}{l!} X^l(x_k) \quad (k=1 \dots n-1).$$

Posons alors  $t := -x_n$  dans cette formule (le signe « moins » va être crucial), et définissons les  $(n - 1)$  fonctions qui seront intéressantes :

$$(1) \quad \begin{aligned} \omega_k(x_1, \dots, x_n) &:= \mathbf{x}_k(-x_n) = \exp(-x_n X)(x_k) \\ &= \sum_{l \geq 0} (-1)^l \frac{(x_n)^l}{l!} X^l(x_k) \quad (k=1 \dots n-1). \end{aligned}$$

**Proposition.** *Les  $(n - 1)$  fonctions ainsi définies  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  sont des solutions de l'équation aux dérivées partielles  $X\omega = 0$ . De plus, ces solutions sont fonctionnellement indépendantes, au sens où le rang de leur matrice jacobienne  $\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i}\right)_{\substack{1 \leq k \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq n}}$  est égal à  $n-1$  à l'origine. Enfin, pour toute autre solution  $f$  de  $Xf = 0$ , il existe une fonction analytique locale  $F = F(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$  définie au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^{n-1}$  telle que :*

$$f(x) \equiv F(\omega_1(x), \dots, \omega_{n-1}(x)).$$

*Preuve.* En effet, lorsqu'on applique  $X$  à la série ci-dessus qui définit les fonctions  $\omega_k$ , on observe que tous les termes s'annihilent grâce à une simple application élémentaire de la formule de Leibniz, développée sous la forme :

$$X[(x_n)^l X^l(x_k)] = l(x_n)^{l-1} X^l(x_k) + (x_n)^l X^{l+1}(x_k).$$

Ensuite, l'assertion d'après laquelle l'application :

$$x \longmapsto (\omega_1(x), \dots, \omega_{n-1}(x))$$

est de rang  $n - 1$  en  $x = 0$  provient tout simplement du fait que l'on a par construction :

$$\omega_k(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \equiv x_k.$$

Enfin, après redressement (voir le Théorème p. 108) de  $X$  en  $X' := \frac{\partial}{\partial x'_n}$  dans certaines nouvelles coordonnées appropriées  $(x'_1, \dots, x'_n)$ , la solution générale  $f'(x')$  de l'équation aux dérivées partielles (redressée) :

$$X'(f') = \frac{\partial f'}{\partial x'_n} = 0$$

s'avère alors trivialement être une fonction arbitraire :

$$F'(x'_1, \dots, x'_{n-1})$$

des  $(n - 1)$  premières variables  $x'_1, \dots, x'_{n-1}$ , lesquelles s'identifient, dans ce système de coordonnées, aux fonctions  $\omega'_1 \equiv x'_1, \dots, \omega'_{n-1} \equiv x'_{n-1}$  définies par la formule (1). Ceci montre que dans l'ancien système

de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ , la solution générale de  $Xf = 0$  s'écrit comme annoncé :  $f = F(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ .  $\square$

*Question* : Qu'advient-il en présence de *plusieurs* équations aux dérivées partielles ? La manière dont Engel et Lie présentent la résolution de cette question dans le Chapitre 5 de [40] est symptomatique sur le plan du *contrôle par la pensée des principes de genèse*, et nous nous proposons à présent d'en restituer la teneur.

Premier principe : examiner la dyade comme germe du Multiple pur. Par exemple, si une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  satisfait *deux* équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0,$$

alors elle satisfait naturellement aussi les deux équations différentielles du second ordre :

$$X_1(X_2(f)) = 0, \quad X_2(X_1(f)) = 0,$$

et par conséquent, aussi l'équation :

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = 0,$$

qui est obtenue en soustrayant ces deux équations. Or si l'on introduit les expressions développées de ces deux opérateurs d'ordre 1 :

$$X_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (k=1,2),$$

alors cette dernière équation ne dérive la fonction  $f$  qu'à l'ordre 1 :

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = \sum_{i=1}^n [X_1(\xi_{2i}) - X_2(\xi_{1i})] \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

puisque tous les termes qui incorporent des dérivées partielles du second ordre s'annihilent dans la soustraction. Grâce à ce procédé, on obtient alors un nouvel opérateur qui a la même structure que les deux opérateurs initiaux : *homologie de l'ontologie*. On notera alors :

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$$

cet opérateur que l'on appellera *crochet*<sup>32</sup> (de Jacobi ou de Lie) entre  $X_1$  et  $X_2$  et qui est bien sûr antisymétrique par rapport à ses deux arguments. Toute solution  $f$  de  $X_1 f = X_2 f = 0$  est alors solution de  $[X_1, X_2] f = 0$ . L'opérateur  $[X_1, X_2]$  s'ajoute alors en quelque sorte gratuitement aux équations initiales. C'est donc un deuxième principe : *engendrement du tiers par antisymétrisation de la dyade*. En résumé, on a une :

**Observation fondamentale.** *Si une fonction  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  satisfait les deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k=1, 2),$$

*alors elle satisfait aussi l'équation différentielle du premier ordre :*

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = \sum_{i=1}^n [X_1(\xi_{2i}) - X_2(\xi_{1i})] \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

*Question suscitée [dans l'arbre de scindage de l'irréversible-synthétique] :* l'opérateur  $[X_1, X_2]$  apporte-t-il, ou n'apporte-t-il pas d'information nouvelle? En admettant les principes de pensée que nous avons formulés p. 79 sq., la réponse est simple. S'il existe deux fonctions (analytiques)  $\chi_1(x)$  et  $\chi_2(x)$  telles qu'on peut réécrire (après relocalisation éventuelle) :

$$[X_1, X_2] = \chi_1 X_1 + \chi_2 X_2,$$

alors le fait que toute solution  $f$  de  $X_1 f = X_2 f = 0$  est aussi solution de  $[X_1, X_2] f = 0$  sera une conséquence triviale des hypothèses et n'apportera aucune connaissance nouvelle, puisque de  $X_1 f = X_2 f = 0$  on déduit immédiatement par des opérations algébriques *non différentielles* :

$$\chi_1 X_1 f = \chi_2 X_2 f = 0 \quad \text{puis} \quad \chi_1 X_1 f + \chi_2 X_2 f = 0.$$

<sup>32</sup> Hawkins [68] relate la réinterprétation de ce concept dans les premiers travaux de Lie sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Dans la *Theorie der Transformationsgruppen*, c'est peu fréquemment que Engel et Lie nomment le fameux « *crochet* » souvent considéré comme une étape de calcul ; en certains endroits, ils l'appellent « *combinaison* » [*Combination*] (entre deux transformations infinitésimales), ou simplement « *équation* » [*Gleichung*], et à la fin du traité, ils utilisent en général la terminologie [*Klammeroperation*], « *opération de crochet* », ou « de parenthésage ». Il est noté  $(X_1 X_2)$ , toujours avec des parenthèses simples, sans le symbole de fonction  $f$ , et sans virgule, sauf quand les deux éléments insérés sont des champs de vecteurs en coordonnées.

Au contraire, lorsque le crochet  $[X_1, X_2]$  ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire de  $X_1$  et de  $X_2$  (même après relocalisation en un point générique), l'équation  $[X_1, X_2]f = 0$  doit être considérée comme *nouvelle et nécessaire*. Ce cas se produit par exemple avec  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$  d'où  $[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial x_3}$ .

Ainsi, en partant de deux opérateurs distincts, la considération d'un troisième opérateur peut s'avérer incontournable. Autrement dit, le principe de différenciation par examen de la dyade force à envisager le multiple général.

Considérons donc maintenant *d'emblée* un nombre quelconque  $q \geq 2$  d'opérateurs d'ordre 1 à coefficients analytiques :

$$X_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots q).$$

Tout d'abord, il peut se produire qu'il existe des relations de dépendance de la forme :

$$\sum_{k=1}^q \chi_k(x) \cdot X_k \equiv 0,$$

où les  $\chi_k(x)$  sont des fonctions analytiques non toutes nulles. Après relocalisation et renumérotation éventuelle, on peut résoudre une telle équation sous la forme :  $X_q = \tau_1 X_1 + \dots + \tau_{q-1} X_{q-1}$ . Si une telle équation résolue non triviale existe, alors parmi les  $q$  équations  $X_1 f = \dots = X_{q-1} f = X_q f = 0$ , la dernière sera manifestement conséquence des  $(q-1)$  premières, et elle pourra donc d'ores et déjà être laissée de côté. Aussi est-il parfaitement légitime, lorsqu'on veut résoudre les équations  $X_k f = 0$ , de supposer qu'il n'existe pas de telle relation de dépendance. Après relocalisation éventuelle et renumérotation éventuelle des variables, cela revient, d'après un théorème d'algèbre linéaire, à admettre que les opérateurs  $X_1, \dots, X_q$  sont résolubles par rapport aux  $q$  quotients différentiels  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, q$ , autrement dit, qu'il existe une matrice  $q \times q$  de fonctions analytiques  $\varpi_{jk}(x)$ , inversible dans un ouvert relocalisé, telle que les nouveaux opérateurs  $Y_j := \sum_{k=1}^q \varpi_{jk}(x) X_k$  sont de la forme normalisée :

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{q+1 \leq i \leq n} \theta_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (j=1 \dots q).$$

Bien entendu, l'étude du système  $X_1 f = \dots = X_q f = 0$  se ramène à celle du système  $Y_1 f = \dots = Y_q f = 0$ , puisque le déterminant de la matrice  $\varpi_{jk}(x)$  ne s'annule en aucun point de l'ouvert relocalisé.



D'après l'observation fondamentale, les solutions communes possibles aux  $q$  équations  $X_1 f = \dots = X_q f = 0$  satisfont aussi toutes les équations par paires de la forme :

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0 \quad (i, k = 1 \dots q).$$

Et maintenant, deux circonstances distinctes peuvent se produire.

Premièrement, chacune des  $\frac{q(q-1)}{2}$  équations ainsi obtenues peut s'avérer être conséquence des précédentes. Tel est le cas si et seulement si, pour tout  $i \leq q$  et pour tout  $k \leq q$ , une relation de dépendance de la forme :

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \chi_{ik1}(x) X_1(f) + \dots + \chi_{ikq}(x) X_q(f)$$

est satisfaite. CLEBSCH dit alors les  $q$  équations indépendantes  $X_1(f) = \dots = X_q(f) = 0$  forment *système complet*.

Mais en général, c'est le second cas, plus délicat, qui se produit. Parmi les nouvelles équations :

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0,$$

un certain nombre, disons  $s \geq 1$ , seront indépendantes des  $q$  équations  $X_1 f = \dots = X_q f = 0$ . Ajoutons alors ces nouvelles équations aux  $q$  équations initiales, notons-les :

$$X_{q+1}(f) = 0, \dots, X_{q+s}(f) = 0,$$

et traitons maintenant le système obtenu de ces  $q + s$  équations exactement comme nous avons traité précédemment les  $q$  équations de départ. Bien entendu, la relocalisation autour d'un point générique est toujours admise. Comme on ne peut pas obtenir plus de  $n$  équations  $X_i(f) = 0$  qui sont indépendantes l'une de l'autre en un point générique, on doit aboutir, au bout d'un nombre fini d'étapes, à un système complet qui consiste en un nombre  $q \leq n$  d'équations indépendantes.

**Proposition.** ([40], p. 86) *La détermination des solutions communes de  $q$  équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre  $X_1(f) = \dots = X_q(f)$  peut toujours être ramenée, par différentiation et élimination algébrique linéaire, à l'intégration d'un système complet d'équations indépendantes.*

On peut donc supposer maintenant sans perte de généralité que le système à étudier  $X_1 f = \dots = X_q f = 0$  est complet et qu'il est formé de  $q$  équations indépendantes.

**Proposition.** ([40], pp. 86–87) *Si l'on résout un système complet et indépendant de  $q$  équations :*

$$X_1(f) = 0, \dots, X_q(f) = 0$$

*par rapport à  $q$  quotients différentiels, disons  $\frac{\partial}{\partial x_{n-q+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  après renumérotation éventuelle des variables, alors les  $q$  équations obtenues :*

$$(4) \quad Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k=1 \dots q)$$

*satisfont les relations de commutation par paires :*

$$(5) \quad Y_j(Y_k(f)) - Y_k(Y_j(f)) = 0 \quad (j, k=1 \dots q).$$

*Preuve.* En effet, observons que l'expression semi-développée :

$$Y_j(Y_k(f)) - Y_k(Y_j(f)) = \sum_{i=1}^{n-q} [Y_j(\eta_{ki}) - Y_k(\eta_{ji})] \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j, k=1 \dots q)$$

ne fait intervenir aucun des quotients différentiels  $\frac{\partial}{\partial x_{n-q+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ , puisque la dérivation  $Y_j(1)$  du coefficient constant égal à 1 de la première dérivation  $\frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}}$  de  $Y_k$  s'annule trivialement. Mais alors une relation de dépendance linéaire de la forme :

$$Y_j(Y_k(f)) - Y_k(Y_j(f)) = \sum \text{coeff} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

ne peut manifestement être possible que si tous les coefficients présents s'annulent.  $\square$

La généralisation conjointe du Théorème p. 108 et de la Proposition p. 125 à un système complet de  $q$  équations indépendantes s'énonce alors comme suit<sup>33</sup>.

**Théorème.** (CLEBSCH-LIE-FROBENIUS) *Tout système complet formé de  $q$  équations résolues :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{n-q} \eta_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k=1 \dots q)$$

*dont les coefficients  $\eta_{ki}$  sont analytiques au voisinage d'un point  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  possède  $n - q$  solutions indépendantes  $\omega_1(x), \dots, \omega_{n-q}(x)$*

<sup>33</sup> Pour la démonstration détaillée de ce théorème standard de calcul différentiel aujourd'hui dit « de Frobenius », outre [40], on pourra consulter [88, 154, 148, 157, 69], ou bien compléter les arguments en s'inspirant des raisonnements qui précèdent.

qui sont analytiques dans un certain voisinage  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  et qui, de plus, se réduisent à  $x_1, \dots, x_{n-q}$  lorsqu'on pose  $x_{n-q+1} = x_{n-q+1}^0, \dots, x_n = x_n^0$ .

De plus, pour toute autre solution  $f$  de  $X_1 f = \dots = X_q f = 0$ , il existe une fonction analytique locale  $F = F(\omega_1, \dots, \omega_{n-q})$  définie au voisinage de  $(x_1^0, \dots, x_{n-q}^0)$  dans  $\mathbb{C}^{n-q}$  telle que :

$$f(x) \equiv F(\omega_1(x), \dots, \omega_{n-q}(x)).$$

D'après Lie ([40], p. 91), ce théorème central de la théorie des systèmes complet n'avait pas été énoncé d'une manière aussi précise, ni par Jacobi, ni par Clebsch, bien qu'il soit implicitement contenu dans des mémoires de Cauchy, de Weierstrass, de Briot et Bouquet, de Kowalevsky et de Darboux consacrés à l'existence des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Frobenius ([54]) en fera la synthèse finale<sup>34</sup>.

**3.8. Constantes de structure et correspondance fondamentale.** Expliquons maintenant dans le détail comment, au Chapitre 9 de [40], Engel et Lie organisent<sup>35</sup> la présentation de ces théorèmes fondamentaux, eu égard à cette idée fixe de la théorie commençante : économiser à la fois l'axiome de l'élément identité et l'axiome des éléments inverses. Filigrane de tension métaphysique : il s'agit d'engendrer la théorie du continu en complète analogie harmonique avec la théorie discrète des groupes de substitutions.

Soit donc une famille d'équations de transformations à  $r$  paramètres essentiels :

$$(1) \quad x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n).$$

<sup>34</sup> Voir [69] pour une excellente mise en perspective historique et philosophique.

<sup>35</sup> Dans ce paragraphe 3.8, nous traduisons en l'adaptant librement la majeure partie du Chapitre 9 de [40]. Les théorèmes fondamentaux de la théorie y apparaissent déployés dans une pensée beaucoup plus systématique que ce que la postérité en a retenu. En particulier, la classification en trois *Théorèmes fondamentaux* telle qu'établie après la rédaction du premier volume, à savoir : 1) l'existence d'équations différentielles fondamentales ; 2) l'existence de constantes dans les crochets entre générateurs infinitésimaux ; 3) la reconstitution d'un groupe de Lie local à partir d'un système de constantes satisfaisant les identités algébriques naturelles correspondant à l'antisymétrie et à l'identité de Jacobi (cf. Schur, Scheffers, Cartan, Campbell, Bianchi et d'autres) simplifie l'exposition d'origine, toute entière orientée vers l'exploration spéculative des axiomes fondamentaux.

Ici, les variables  $(x_1, \dots, x_n)$  varient dans un domaine<sup>36</sup>  $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ , les paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$  varient dans un domaine  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^r$ , et l'application  $x \mapsto f_a(x) = f(x; a)$  est, pour tout  $a$ , un difféomorphisme de  $\mathcal{X}$  sur son image  $f_a(\mathcal{X})$ . Comme cela a déjà été incidemment signalé dans la note p. 94 et dans la note p. 104, il se trouve que l'existence d'équations différentielles fondamentales (cf. le Théorème p. 104) peut être dérivée de la seule condition que les transformations du groupe sont stables par composition au sens technique suivant :

$$\begin{cases} f(f(x; a); b) \equiv f(x; \varphi(a, b)) & \text{pour tous } x \in \mathcal{X}^1, a \in \mathcal{A}^1, b \in \mathcal{A}^1, \\ c \equiv \varphi(a, \chi(a, c)) & \text{pour tous } a \in \mathcal{A}^1, c \in \mathcal{A}^1, \end{cases}$$

sans supposer ni l'existence d'un élément identité, ni l'existence de transformations inverses l'une de l'autre par paires. Plus précisément, sous les hypothèses spécifiques de la note p. 94, on démontre la proposition suivante en s'inspirant des raisonnements du § 3.5.

**Proposition.** ([40], pp. 33–34) *Il existe une matrice  $(\psi_{kj}(a))_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq r}}$  de taille  $r \times r$  de fonctions qui sont holomorphes et inversibles dans  $\mathcal{A}^1$ , et il existe des fonctions  $\xi_{ji}(x)$  holomorphes dans  $\mathcal{X}$  telles que les équations différentielles :*

$$(2) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k}(x; a) = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r)$$

sont identiquement satisfaites pour tout  $x \in \mathcal{X}^1$  et tout  $a \in \mathcal{A}^1$ , après remplacement de  $x'$  par  $f(x; a)$ .

Pour le moment, nous voulons nous retenir de supposer que les équations  $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)$  doivent représenter un groupe à  $r$  termes. En ce qui concerne les équations (1), nous voulons plutôt supposer : *premièrement*, qu'elles représentent une famille de  $\infty^r$  transformations différentes, donc que les  $r$  paramètres  $a_1, \dots, a_r$  sont tous essentiels, et *deuxièmement*, qu'elles satisfont des équations différentielles de la forme spécifique (2). [40], pp. 67–68.

L'essentialité des paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$  assure alors ([40], p. 68) que :

- le déterminant des  $\psi_{kj}(a)$  ne s'annule pas identiquement ; et que :
- les  $r$  transformations infinitésimales :

$$X'_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x') \frac{\partial}{\partial x'_i} \quad (k=1 \dots r)$$

<sup>36</sup> Nous considérerons en effet ici explicitement les domaines d'existence.

sont linéairement indépendantes.

*Nouvelles hypothèses économiques.* On supposera premièrement que les équations de transformations (1), définies pour  $x \in \mathcal{X}$  et  $a \in \mathcal{A}$ , constituent une famille de difféomorphismes  $x \mapsto f_a(x) = x'$  du domaine  $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$  sur son image  $f_a(\mathcal{X}) \subset \mathbb{C}^n$  dont les paramètres  $(a_1, \dots, a_r)$  sont essentiels, et deuxièmement que cette famille satisfait des équations différentielles du type (2) ci-dessus, *en ajoutant explicitement l'hypothèse que le déterminant des  $\psi_{kj}(a)$  ne s'annule en aucun paramètre  $a \in \mathcal{A}^1$ .*

Trois moments théoriques majeurs entrent alors en scène au Chapitre 9 (Vol. I) de la *Theorie der Transformationsgruppen*.

- Premier moment : Constantes de structure.
- Deuxième moment : Réciproque intermédiaire.
- Troisième moment : Élimination des transformations auxiliaires.

Le but principal est d'établir que si  $r$  transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$  satisfont les relations par paires  $[X_k, X_j] = \sum_{s=1}^r c_{kjs} X_s$ , où les  $c_{kjs}$  sont des constantes, alors la totalité des transformations  $x' = \exp(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r)(x)$  constitue un groupe continu local de transformations à  $r$  paramètres essentiels. C'est le Théorème 24, obtenu à l'issue du troisième moment, qui va aboutir à cette conclusion.

*Énoncé technique auxiliaire.* Mais tout d'abord, le théorème suivant sera utilisé d'une manière essentielle par Lie pour établir, au cours du second moment, la fermeture par composition d'une famille d'équations de transformation construites en intégrant un système d'équations aux dérivées partielles construites dans l'espace produit des  $x$  et des  $a$ . À noter : on n'utilise ici que la connaissance des groupes à un paramètre.

**Théorème 9.** ([40], p. 72) *Si, dans les équations de transformations définies pour  $(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathcal{A}$  :*

$$(1) \quad x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n),$$

*les  $r$  paramètres  $a_1, \dots, a_r$  sont tous essentiels et si, de plus, certaines équations différentielles de la forme :*

$$(2) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a_1, \dots, a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r)$$

*sont identiquement satisfaites par  $x'_1 = f_1(x; a), \dots, x'_n = f_n(x; a)$ , où la matrice  $\psi_{kj}(a)$  est holomorphe et inversible dans un sous-domaine*

non vide  $\mathcal{A}^1 \subset \mathcal{A}$ , et où les fonctions  $\xi_{ji}(x')$  sont holomorphes dans  $\mathcal{X}$ , alors en introduisant les  $r$  transformations infinitésimales :

$$X_k := \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

l'assertion suivante est vérifiée : toute transformation  $x'_i = f_i(x; a)$  dont les paramètres  $a_1, \dots, a_r$  se trouvent dans un petit voisinage d'un paramètre quelconque fixé  $a^0 \in \mathcal{A}^1$  peut être obtenue en exécutant en premier lieu la transformation :

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1^0, \dots, a_r^0) \quad (i=1 \dots n),$$

et en second lieu, en exécutant une certaine transformation :

$$x'_i = \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(\bar{x}_i) \quad (i=1 \dots n)$$

du groupe à un paramètre qui est engendré par une combinaison linéaire appropriée des  $X_k$ , où  $t$  et les  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont des nombres complexes « petits ».

Spécialement, cet énoncé technique sera utilisé par Engel et Lie pour établir que toutes les fois que  $r$  transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$  constituent une algèbre de Lie (voir ci-dessous), la composition de deux transformations de la forme  $x' = \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)$  est à nouveau de la même forme, de telle sorte que la totalité de toutes ces transformations constitue un groupe.

*Démonstration.* Les arguments s'inspirent de ceux qui ont été développés p. 118 dans un contexte local ; ici, c'est  $a^0 \in \mathcal{A}^1$  qui remplace le paramètre identité.

D'un premier côté, fixons donc  $a^0 \in \mathcal{A}^1$  et introduisons les solutions  $a_k = a_k(t, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$  du système suivant d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{\psi}_{jk}(a) \quad (k=1 \dots r),$$

avec la condition initiale  $a_k(0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = a_k^0$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont des paramètres complexes (petits) et où, comme précédemment, l'inverse  $\tilde{\psi}_{jk}(a)$  de la matrice  $\psi_{jk}(a)$  est holomorphe dans  $\mathcal{A}_1$ .

D'un deuxième côté, introduisons le flot local :

$$\exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(\bar{x}) =: h(\bar{x}; t, \lambda)$$

d'une combinaison linéaire générale  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r$  des  $r$  transformations infinitésimales  $X_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , où  $\bar{x}$  est supposé être

dans  $\mathcal{A}^1$ . Ainsi par sa définition même, ce flot intègre les équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dh_i}{dt} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{ji}(h_1, \dots, h_n) \quad (i=1 \dots n)$$

avec la condition initiale  $h(\bar{x}; 0, \lambda) = \bar{x}$ .

D'un troisième côté, rappelons que l'on peut résoudre les  $\xi_{ji}$  dans les équations différentielles fondamentales (2) en inversant la matrice  $\tilde{\psi}$  :

$$\xi_{ji}(f_1, \dots, f_n) = \sum_{k=1}^r \tilde{\psi}_{jk}(a) \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \quad (i=1 \dots n; j=1 \dots r).$$

À  $i$  et à  $j$  fixés, multiplions ensuite par  $\lambda_j$  les deux membres de cette dernière équation, sommons pour  $j$  allant de 1 jusqu'à  $r$  et reconnaissons  $\frac{da_k}{dt}$ , que nous pouvons donc faire apparaître :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_{ji}(f_1, \dots, f_n) &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{\psi}_{jk}(a) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} [f_i(x; a(t, \lambda))] \quad (i=1 \dots n). \end{aligned}$$

Donc les  $f_i(x; a(t, \lambda))$  satisfont les *mêmes* équations différentielles que les  $h_i(\bar{x}; t, \lambda)$ , et en outre, si nous assignons à  $\bar{x}$  la valeur  $f(x; a^0)$ , les deux collections de solutions auront de surcroît la *même* condition initiale pour  $t = 0$ , à savoir :  $f(x; a^0)$ . En conclusion, cette observation que les  $f_i$  et les  $h_i$  satisfont les mêmes équations jointe à la propriété fondamentale d'unicité pour les solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires fournit l'identité de coïncidence :

$$\boxed{f(x; a(t, \lambda)) \equiv \exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(f(x; a^0))}$$

qui exprime que chaque transformation  $x' = f(x; a)$  pour  $a$  dans un voisinage de  $a^0$  s'avère être la composition de la transformation fixée  $\bar{x} = f(x; a^0)$ , suivi de la transformation du groupe à un paramètre  $\exp(t\lambda_1 X_1 + \dots + t\lambda_r X_r)(\bar{x})$  : c'est ce que l'on voulait démontrer.  $\square$

**Premier moment : Constantes de structure.** En produisant par différentiation un système d'équations soumis à la condition de Clebsch-Lie-Frobenius, la démonstration remarquable qui suit et qui semble ne

plus apparaît dans les traités contemporains va dévoiler l'existence de constantes fondamentales  $c_{kjs}$  en faisant jouer un rôle quasiment symétrique à l'espace des variables et à celui des paramètres. Dans la dipolarité du  $x$  et du  $a$ , c'est en ne se désolidarisant pas de l'action spatiale que la structure (implicite) de groupe abstrait (dans l'espace des paramètres  $a$ ) va articuler le premier aspect de l'autonomisation algébrique de sa genèse ultérieure. L'argument-clé et purement archaïque sera de fractionner tout crochet entre deux sommes de deux transformations infinitésimales strictement attachées à l'espace des  $x$  et à l'espaces des  $a$  (respectivement) :

$$[X + A, X' + A'] = [X, X'] + [A, A']$$

— identité garantie par les relations triviales :  $0 = [X, A'] = [A, X']$  qui proviennent de l'hétérogénéité l'un à l'autre des deux espaces :  $0 = \partial_{x_i}(a_k) = \partial_{a_k}(x_i)$ . La constance des constantes  $c_{kjs}$  proviendra alors d'une réalité de fait évidente et tout aussi archaïque, sachant que la condition fondamentale de Clebsch :

$$\begin{aligned} [X_k + A_k, X_j + A_j] &= \text{combinaison linéaire}_{a,x}(X_s + A_s) \\ &= [X_k, X_j] + [A_k, A_j] \\ &= \text{combinaison linéaire}_x(X_t) + \text{combinaison linéaire}_a(A_u) \end{aligned}$$

force toutes les fonctions coefficients de ces combinaisons linéaires :

$$\text{coeff}_{a,x} = \text{coeff}_x = \text{coeff}_a$$

qui dépendent *a priori* en toute généralité conjointement de  $x$  et de  $a$ , à ne dépendre en fait que de  $x$ , et aussi que de  $a$ , d'où leur constance *absolue*.

**Théorème 21.** ([40], pp. 149–150) *Si une famille de  $\infty^r$  transformations :*

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

*satisfait certaines équations différentielles de la forme spécifique :*

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a_1, \dots, a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r),$$

*et si on écrit ces équations, ce qui est toujours possible, sous la forme :*

$$\xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{k=1}^r \tilde{\psi}_{jk}(a_1, \dots, a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} \quad (i=1 \dots n; j=1 \dots r),$$



alors il existe entre les  $2r$  transformations infinitésimales :

$$X'_j(F) = \sum_{i=1}^n \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (j=1 \dots r)$$

$$A_j(F) = \sum_{\mu=1}^r \tilde{\psi}_{j\mu}(a_1, \dots, a_r) \frac{\partial F}{\partial a_\mu} \quad (j=1 \dots r)$$

des relations de la forme :

$$(3) \quad \begin{cases} X'_k(X'_j(F)) - X'_j(X'_k(F)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} X'_s(F) & (k, j=1 \dots r), \\ A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} A_s(F) & (k, j=1 \dots r), \end{cases}$$

où les  $c_{kjs}$  désignent des constantes numériques. En conséquence de cela, les  $r$  équations :

$$X'_j(F) + A_j(F) = 0 \quad (k=1 \dots r),$$

qui sont résolubles par rapport à  $\frac{\partial F}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial a_r}$ , constituent un système complet à  $r$  termes en les  $n+r$  variables  $x'_1, \dots, x'_n, a_1, \dots, a_r$  ; si l'on résout les  $n$  équations  $x'_i = f_i(x, a)$  par rapport à  $x_1, \dots, x_n$  :

$$x_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n),$$

alors  $F_1(x', a), \dots, F_n(x', a)$  sont des solutions indépendantes de ce système complet.

*Démonstration.* Pour commencer, résolvons donc les équations :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

par rapport à  $x_1, \dots, x_n$ , ce qui donne :

$$x_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n).$$

Alors on peut aisément déduire certaines équations différentielles qui sont satisfaites par  $F_1, \dots, F_n$ . Si en effet nous différencions simplement les identités :

$$F_i(f_1(x, a), \dots, f_n(x, a), a_1, \dots, a_r) \equiv x_i$$

par rapport à  $a_k$ , nous obtenons pour  $i$  fixé l'identité :

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial F_i(x', a)}{\partial x'_\nu} \frac{\partial f_\nu(x, a)}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i(x', a)}{\partial a_k} \equiv 0,$$

pourvu que l'on pose partout  $x'_\nu = f_\nu(x, a)$ . Multiplions maintenant cette identité par  $\tilde{\psi}_{jk}(a)$  et sommons le résultat obtenu pour  $k$  allant de 1 jusqu'à  $r$ ; alors en tenant compte de l'hypothèse :

$$\sum_{k=1}^r \tilde{\psi}_{jk}(a) \frac{\partial f_\nu(x, a)}{\partial a_k} \equiv \xi_{j\nu}(f_1, \dots, f_n),$$

nous obtenons les équations suivantes :

$$\sum_{\nu=1}^n \xi_{j\nu}(x'_1, \dots, x'_n) \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} + \sum_{k=1}^r \tilde{\psi}_{jk}(a_1, \dots, a_r) \frac{\partial F_i}{\partial a_k} = 0$$

$(i = 1 \dots n; j = 1 \dots r).$

D'après la manière dont ces équations ont été dérivées, elles sont satisfaites identiquement lorsqu'on y fait la substitution  $x'_\nu = f_\nu(x, a)$ . Mais puisqu'elles ne contiennent pas du tout  $x_1, \dots, x_n$ , elle doivent en fait être satisfaites identiquement, c'est-à-dire : les fonctions  $F_1, \dots, F_n$  sont toutes solutions des équations linéaires aux dérivées partielles suivantes :

$$(4) \quad \Omega_j(F) = \sum_{\nu=1}^n \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_\nu} + \sum_{\mu=1}^r \tilde{\psi}_{j\mu}(a) \frac{\partial F}{\partial a_\mu} = 0$$

$(j = 1 \dots r).$

Ces  $r$  équations contiennent  $n + r$  variables, à savoir  $x'_1, \dots, x'_n$  et  $a_1, \dots, a_r$ ; de plus, elles sont indépendantes les unes des autres, puisque le déterminant des  $\tilde{\psi}_{j\mu}(a)$  ne s'annule pas, et par conséquent, une résolution par rapport aux  $r$  quotients différentiels  $\frac{\partial F}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial a_r}$  est possible. Mais par ailleurs, les équations (4) possèdent  $n$  solutions indépendantes en commun : les fonctions  $F_1(x', a), \dots, F_n(x', a)$  dont le déterminant fonctionnel par rapport aux  $x'$  :

$$\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x'_n} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}$$

ne s'annule pas identiquement, parce que par hypothèse, les équations  $x'_i = f_i(x, a)$  représentent des transformations difféomorphes. Ainsi en définitive, les hypothèses du théorème de Clebsch-Lie-Frobenius sont satisfaites par les équations (4), c'est-à-dire : ces équations constituent un système complet à  $r$  termes.

Si nous posons maintenant :

$$\sum_{k=1}^r \tilde{\psi}_{jk}(a) \frac{\partial F}{\partial a_k} = A_j(F)$$

et si nous posons aussi :

$$\sum_{\nu=1}^n \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_\nu} = X'_j(F),$$

en accord avec les notations employées dans le § 3.6, alors les équations (4) reçoivent la forme brève :

$$\Omega_j(F) = X'_j(F) + A_j(F) = 0 \quad (j=1 \dots r).$$

Comme nous le savons, le fait que ces équations constituent un système complet revient à ce que des équations de dépendance de la forme :

$$\Omega_k(\Omega_j(F)) - \Omega_j(\Omega_k(F)) = \sum_{s=1}^r \vartheta_{kjs}(x'_1, \dots, x'_n, a_1, \dots, a_r) \cdot \Omega_s(F)$$

( $k, j=1 \dots r$ )

doivent être satisfaites identiquement, quelles que peuvent être les  $F$  comme fonctions de  $x'_1, \dots, x'_n, a_1, \dots, a_r$  : ce sont en effet des identités entre champs de vecteurs. Mais puisque ces identités peuvent aussi être écrites de manière développée comme :

$$\begin{aligned} X'_k(X'_j(F)) - X'_j(X'_k(F)) + A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) &= \\ &= \sum_{s=1}^r \vartheta_{kjs} X'_s(F) + \sum_{s=1}^r \vartheta_{kjs} A_s(F), \end{aligned}$$

nous pouvons immédiatement les diviser en deux collections d'identités :

$$(5) \quad \begin{cases} X'_k(X'_j(F)) - X'_j(X'_k(F)) = \sum_{s=1}^r \vartheta_{kjs} X'_s(F) \\ A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) = \sum_{s=1}^r \vartheta_{kjs} A_s(F), \end{cases}$$

et ici, la seconde série d'équations peut encore être à nouveau décomposée en :

$$A_k(\tilde{\psi}_{j\mu}) - A_j(\tilde{\psi}_{k\mu}) = \sum_{s=1}^r \vartheta_{kjs} \tilde{\psi}_{s\mu} \quad (k, j, \mu=1 \dots r).$$

Maintenant, comme le déterminant des  $\tilde{\psi}_{s\mu}$  ne s'annule pas identiquement, les fonctions  $\vartheta_{kjs}$  sont complètement déterminées par ces dernières conditions, et il en découle que les  $\vartheta_{kjs}$  peuvent seulement dépendre de  $a_1, \dots, a_r$ , c'est-à-dire qu'elles sont en tout cas libres de  $x'_1, \dots, x'_n$ . Mais on se convainc aussi aisément que les  $\vartheta_{kjs}$  sont aussi libres de  $a_1, \dots, a_r$  : en effet, si dans la première série d'identités (5), on considère  $F$  comme une fonction arbitraire des seules variables  $x'_1, \dots, x'_n$ , alors on obtient par différentiation par rapport à  $a_\mu$  les identités suivantes :

$$0 \equiv \sum_{s=1}^r \frac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu} X'_s(F) \quad (k, j, \mu = 1 \dots r).$$

Mais puisque  $X'_1(F), \dots, X'_r(F)$  sont des transformations infinitésimales indépendantes, et puisque de plus, les  $\frac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu}$  ne dépendent pas de  $x'_1, \dots, x'_n$ , toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu}$  s'annulent identiquement ; autrement dit, les  $\vartheta_{kjs}$  sont aussi libres de  $a_1, \dots, a_r$  : ce sont des constantes numériques, comme annoncé.  $\square$

En particulier, ce théorème peut maintenant être immédiatement appliqué à tous les groupes à  $r$  paramètres qui contiennent la transformation identité.

**Théorème 22.** ([40], p. 150) *Entre les  $r$  transformations infinitésimales :*

$$X_k := \frac{\partial f_1}{\partial a_k}(x; e) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial a_k}(x; e) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (k=1 \dots r)$$

*d'un groupe de transformations ponctuelles locales  $x' = f(x; a)$  qui contient l'élément identité  $e$ , il existe des relations par paires de la forme :*

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} X_s(f),$$

*où les  $c_{kjs} \in \mathbb{C}$  sont des constantes numériques.*

En particulier, si un groupe continu de transformations contient deux transformations infinitésimales :

$$X(f) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad Y(f) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

alors il contient aussi la transformation infinitésimale :

$$X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

*Deuxième moment : Réciproque intermédiaire.* L'objectif est, réciproquement, de démontrer qu'une paire d'algèbres de Lie de champs de vecteurs  $X'_1, \dots, X'_r$  et  $A'_1, \dots, A'_r$  permet de reconstituer les équations de transformation d'un certain groupe fini. Spécialement, il va être établi au cours de la démonstration (*voir infra*) que la famille exponentielle  $x' = \exp(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r)(x)$  est stable par composition, ce que l'on pourrait écrire informellement comme :

$$\exp \circ \exp \equiv \exp.$$

C'est la première fois qu'apparaît cette propriété de stabilité lorsque le nombre  $r$  de paramètres est  $\geq 2$ , et l'on peut se convaincre que seule la condition de fermeture par crochet est à même de garantir cette propriété.

**Théorème 23.** ([40], pp. 154–155) *Si  $r$  transformations infinitésimales indépendantes :*

$$X'_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x'_1, \dots, x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i} \quad (k=1 \dots r)$$

dans les variables  $x'_1, \dots, x'_n$  satisfont des conditions par paires de la forme :

$$X'_k(X'_j(f)) - X'_j(X'_k(f)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} X'_s(f),$$

si de plus  $r$  transformations infinitésimales :

$$A_k(f) = \sum_{\mu=1}^r \tilde{\psi}_{k\mu}(a_1, \dots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_\mu} \quad (k=1 \dots r)$$

dans un espace auxiliaire  $a_1, \dots, a_r$  satisfont les conditions analogues :

$$A_k(A_j(f)) - A_j(A_k(f)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} A_s(f)$$

avec les mêmes constantes  $c_{kjs}$ , et si enfin, le déterminant  $\sum \pm \tilde{\psi}_{11}(a) \dots \tilde{\psi}_{rr}(a)$  ne s'annule pas, alors on obtient comme suit les équations d'un groupe à  $r$  paramètres essentiels : on forme le système complet à  $r$  termes :

$$X'_k(f) + A_k(f) = 0 \quad (k=1 \dots r)$$

et l'on détermine ses solutions générales relativement à un système approprié de valeurs  $a_k = a_k^0$ . Si  $x_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n, a_1, \dots, a_r)$  sont ces solutions générales, alors les équations résolues

$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)$  représentent un groupe continu de transformations à  $r$  paramètres essentiels. Ce groupe contient la transformation identique et pour chacune de ses transformations, il contient aussi la transformation inverse ; il est engendré par les  $\infty^{r-1}$  transformations infinitésimales :

$$\lambda_1 X'_1(f) + \dots + \lambda_r X'_r(f),$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  désignent des constantes arbitraires. En introduisant des nouveaux paramètres à la place des  $a_k$ , les équations du groupe peuvent donc être rapportées à la forme :

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(x) + \sum_{k,j}^{1 \dots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} X_j(\xi_{ki}) + \dots \quad (i=1 \dots n).$$

*Démonstration.* Il est clair que le système d'équations aux dérivées partielles d'ordre un :

$$\Omega_j(F) = X'_j(F) + A_j(F) = 0 \quad (j=1 \dots r),$$

est complet, puisque les hypothèses garantissent que l'on a des relations par paires de la forme :

$$\Omega_k(\Omega_j(F)) - \Omega_j(\Omega_k(F)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} \Omega_s(F),$$

et ce système est indépendant, puisque l'hypothèse d'invertibilité de la matrice  $\tilde{\psi}_{k\mu}$  garantit que les équations  $\Omega_1(F) = 0, \dots, \Omega_r(F) = 0$  sont résolubles par rapport à  $\frac{\partial F}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial a_r}$ .

Maintenant, soit  $a_1^0, \dots, a_r^0$  un système de valeurs des  $a$  dans un voisinage duquel les fonctions  $\tilde{\psi}_{jk}(a)$  se comportent régulièrement. D'après le Théorème p. 130 de Clebsch-Lie-Frobenius, le système complet  $\Omega_j(F) = 0$  possède  $n$  solutions  $F_1(x', a), \dots, F_n(x', a)$  qui se réduisent à  $x'_1, \dots, x'_n$  (respectivement) pour  $a_k = a_k^0$ . Imaginons maintenant que ces solutions générales sont données, formons les  $n$  équations :

$$x_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n),$$

et résolvons-les par rapport à  $x'_1, \dots, x'_n$ , ce qui est toujours possible, puisque  $F_1, \dots, F_n$  sont évidemment indépendantes l'une de l'autre, pour autant que seules les variables  $x'_1, \dots, x'_n$  sont concernées. Les équations obtenues de cette manière :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

représentent alors, comme nous allons maintenant le démontrer, un groupe à  $r$  paramètres, et en fait naturellement, un groupe contenant la transformation identique, car pour  $a_k = a_k^0$ , on a  $x'_i = x_i$ .

Tout d'abord, on a identiquement :

$$(6) \quad \sum_{\nu=1}^n \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} + \sum_{\mu=1}^r \tilde{\psi}_{j\mu}(a) \frac{\partial F_i}{\partial a_\mu} = 0$$

$(i = 1 \dots n; j = 1 \dots r).$

D'un autre côté, en différentiant  $x_i = F_i(x', a)$  par rapport à  $a_\mu$ , on obtient l'équation :

$$0 = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F_i}{\partial a_\mu},$$

qui est satisfaite identiquement après la substitution  $x'_\nu = f_\nu(x, a)$ . Multiplions cette équation par  $\tilde{\psi}_{j\mu}(a)$  et sommons pour  $\mu$  allant de 1 jusqu'à  $r$ , ce qui nous donne une équation qui devient, en tenant compte de (6) :

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x'_\nu} \left( \sum_{\mu=1}^r \tilde{\psi}_{j\mu}(a) \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} - \xi_{j\nu}(x') \right) = 0$$

$(i = 1 \dots n; \mu = 1 \dots r).$

Mais comme le déterminant  $\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x'_n}$  ne s'annule pas, on peut donc en déduire les équations :

$$\sum_{\mu=1}^r \tilde{\psi}_{j\mu}(a) \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} = \xi_{j\nu}(x') \quad (j = 1 \dots r; \nu = 1, \dots, n),$$

qui forment alors un système que nous pouvons à nouveau résoudre par rapport aux  $\frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu}$ , puisque par hypothèse, le déterminant de  $\tilde{\psi}_{j\mu}(a)$  ne s'annule pas. Ainsi, nous obtenons finalement des équations différentielles de la forme<sup>37</sup> :

$$(7) \quad \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_\mu} = \sum_{j=1}^r \psi_{\mu j}(a_1, \dots, a_r) \cdot \xi_{j\nu}(x'_1, \dots, x'_n)$$

$(\nu = 1 \dots n; \mu = 1 \dots r)$

<sup>37</sup> Moment crucial : des équations différentielles fondamentales du type déjà rencontré sont à présent reconstituées, et c'est grâce à elles que la structure de groupe fermé par composition va pouvoir renaître plus bas.

qui se réduisent naturellement à des identités après la substitution :

$$x'_\nu = f_\nu(x, a).$$

À ce point, la démonstration que les équations  $x'_i = f_i(x, a)$  représentent un groupe à  $r$  paramètres essentiels ne présente pas de difficulté.

En effet, il est facile tout d'abord de voir que les équations  $x'_i = f_i(x, a)$  représentent  $\infty^r$  transformations distinctes, donc que les paramètres sont  $a_1, \dots, a_r$  sont tous essentiels. Sinon (cf. le Théorème p. 86), toutes les fonctions  $f_1(x, a), \dots, f_n(x, a)$  devraient satisfaire une équation linéaire aux dérivées partielles de la forme :

$$\sum_{k=1}^r \chi_k(a_1, \dots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0,$$

dans laquelle les  $\chi_k$  seraient libres de  $x_1, \dots, x_n$ . En vertu de (7), on obtiendrait alors :

$$\sum_{k,j}^{1 \dots r} \chi_k(a) \cdot \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{j\nu}(f_1, \dots, f_n) \equiv 0 \quad (\nu = 1 \dots n),$$

d'où, puisque  $X'_1(F), \dots, X'_r(F)$  sont des transformations infinitésimales indépendantes :

$$\sum_{k=1}^r \chi_k(a) \cdot \psi_{kj}(a) = 0 \quad (j = 1 \dots r);$$

mais d'après cela, il vient immédiatement :  $\chi_1(a) = 0, \dots, \chi_r(a) = 0$ , parce que le déterminant des  $\psi_{kj}(a)$  ne s'annule pas.

Ainsi, les équations  $x'_i = f_i(x, a)$  représentent effectivement une famille de  $\infty^r$  transformations différentes. Mais maintenant, puisque cette famille satisfait certaines équations différentielles de la forme spécifique (7), nous pouvons appliquer immédiatement le Théorème 9 p. 133. D'après ce théorème, si  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  sont des paramètres fixés, toute transformation  $x'_i = f_i(x, a)$  dont les paramètres  $a_1, \dots, a_r$  se trouvent dans un certain voisinage de  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  peut être obtenue en exécutant d'abord la transformation :

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) \quad (i = 1 \dots n),$$

et ensuite une transformation :

$$x'_i = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(\bar{x}) + \dots \quad (i = 1 \dots n)$$



d'un groupe à un paramètre  $\lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f)$ , où il est entendu que  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont des constantes appropriées. Si nous posons en particulier  $\bar{a}_k = a_k^0$ , nous obtenons  $\bar{x}_i = x_i$ , donc nous voyons que la famille des  $\infty^r$  transformations  $x'_i = f_i(x, a)$  coïncide, dans un certain voisinage de  $a_1^0, \dots, a_r^0$ , avec la famille des transformations :

$$(8) \quad x'_i = x_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(x) + \dots$$

( $i = 1 \dots n$ ).

Une fois ce point atteint, la trame archaïque de l'argumentation spéculative se résume à opérer une transsubstantiation, contagieuse et homogénéisante, des types de transformations. En effet, le Théorème 9 p. 133 montrait non pas que  $f \circ f = f$  ou que  $\exp \circ \exp = \exp$ , mais seulement qu'il y a une stabilité par composition *entre transformations d'un type hétérogène* :

$$f \circ \exp \equiv f,$$

ou encore, avec de plus amples détails, que l'on a :

$$(*) \quad \left( \begin{array}{c} \bar{x} = f(x; \bar{a}) \\ \bar{a} \text{ near } a^0 \end{array} \right) \circ \left( \begin{array}{c} x' = \exp(\lambda X)(\bar{x}) \\ \lambda \text{ near } 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{c} x' = f(x; a) \\ a \text{ near } \bar{a} \end{array} \right).$$

Mais si on applique maintenant cet énoncé au paramètre  $\bar{a} := a^0$  considéré comme initial lors de la résolution du système complet  $\Omega_1(F) = \dots = \Omega_r(f) = 0$ , alors puisque par construction ce paramètre  $a^0$  produit la transformation identique :  $\bar{x} = f(x; a^0) = x$ , il en découle que l'on obtient — si l'on pose donc  $\bar{a} = a^0$  dans (\*) — l'identité :

$$\left( \begin{array}{c} x' = \exp(\lambda X)(\bar{x}) \\ \lambda \text{ near } 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{c} x' = f(x; a) \\ a \text{ near } a^0 \end{array} \right),$$

une coïncidence d'essence que l'on peut réexprimer dans le langage archaïque comme :

$$\exp \equiv f.$$

On peut donc alors remplacer, dans l'identité de composition hétérogène  $f \circ \exp \equiv f$ , non seulement  $\exp$  par  $f$  pour obtenir une identité de composition *homogène* :  $f \circ f = f$ , mais aussi  $f$  par  $\exp$  pour obtenir une deuxième identité de composition équivalente :  $\exp \circ \exp$ , elle aussi *homogène*. Le ré-engendrement de la stabilité par composition repose, à la fin de la démonstration, sur le passage à une communauté de types.

Voici maintenant les arguments tels qu'écrits dans la langue de Engel. Si nous choisissons  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  arbitrairement dans un certain

voisinage de  $a_1^0, \dots, a_r^0$ , alors la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$  appartient toujours à la famille (8). Mais si nous exécutons tout d'abord la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$  et ensuite une transformation appropriée :  $x'_i = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(\bar{x}) + \dots$  de la famille (8), alors d'après ce qui a été dit plus haut, nous obtenons une transformation  $x'_i = f_i(x, a)$  dans laquelle  $a_1, \dots, a_r$  peut prendre toutes les valeurs dans un certain voisinage de  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ . En particulier, si nous choisissons  $a_1, \dots, a_r$  dans le voisinage de  $a_1^0, \dots, a_r^0$  mentionné plus haut, ce qui est toujours possible, alors à nouveau la transformation  $x'_i = f_i(x, a)$  appartient aussi à la famille (8). Par conséquent, nous voyons que deux transformations de la famille (8), lorsqu'elles sont exécutées l'une après l'autre, donnent à nouveau une transformation de cette famille. En définitive, cette famille — et naturellement aussi la famille  $x'_i = f_i(x, a)$  qui s'identifie à elle — forme un groupe continu de transformations à  $r$  paramètres qui contient la transformation identique et des transformations inverses l'une de l'autre par paires.  $\square$

*Troisième moment : Élimination des transformations auxiliaires.* Retour en arrière et examen du gain synthétique obtenu : à présent, il faut rebondir et s'interroger sur la possibilité d'une réciproque plus forte qui ferait l'économie d'hypothèses secondaires — au prix d'un plus grand effort de pensée.

Les hypothèses de l'important Théorème 23 peuvent être simplifiées d'une manière essentielle.

Le théorème exprime que les  $2r$  transformations infinitésimales  $X_k(f)$  et  $A_k(f)$  déterminent un certain groupe à  $r$  paramètres dans l'espace des  $x$  ; mais au même moment, il y a une représentation de ce groupe qui est absolument indépendante des  $A_k(f)$  ; en effet, d'après le théorème cité, le groupe en question s'identifie à la famille des  $\infty^{r-1}$  groupes à un paramètre  $\lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f)$ , et cette famille est déjà déterminée par les seuls  $X_k(f)$ . Cette circonstance nous conduit à conjecturer [*Dieser Umstand führt uns auf die Vermuthung*] que la famille des  $\infty^{r-1}$  groupes à un paramètre  $\lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f)$  forme toujours un groupe à  $r$  si et seulement si les transformations infinitésimales indépendantes satisfont des relations par paires de la forme :

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = [X_k, X_j] = \sum_{s=1}^r c_{kjs} X_s(f).$$

D'après le Théorème 22 p. 140, cette condition est nécessaire pour que les  $\infty^{r-1}$  groupes à un paramètre  $\sum \lambda_k X_k(f)$  forment un groupe à  $r$  paramètres. Donc notre conjecture [*unsere Vermuthung*] revient à suspecter que cette condition nécessaire soit aussi suffisante. [40], pp. 155–156.

Cette présomption serait changée en certitude si l'on pouvait, pour tout système de telles transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_r$ , réussir à produire  $r$  autres transformations infinitésimales auxiliaires

$$(9) \quad A_k(f) = \sum_{\mu=1}^r \tilde{\psi}_{k\mu}(a_1, \dots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_\mu} \quad (k=1 \dots r)$$

en des variables auxiliaires  $(a_1, \dots, a_r)$  destinées à jouer le rôle de paramètres, et qui satisfassent en outre bien sûr les relations correspondantes :

$$A_k(A_j(f)) - A_j(A_k(f)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} A_s(f),$$

sans que le déterminant  $\sum \pm \tilde{\psi}_{11} \dots \tilde{\psi}_{rr}$  ne s'annule. Ce troisième moment est lui aussi riche d'une métaphysique génétique où Lie se révèle surprenant d'inventivité.

Comme il n'est question que de l'espace des variables  $x_1, \dots, x_n$  dans les transformations infinitésimales données :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r),$$

on ne voit pas bien comment engendrer, presque *ex nihilo*, une essence paramétrique. Choisir tout simplement  $A_1 := X_1, \dots, A_r := X_r$  en y remplaçant la variable  $x$  par la variable  $a$  ne marche *certainement pas*, puisqu'il n'y a aucune raison que le nombre  $r$  de paramètres soit égal à la dimension  $n$ . À vrai dire, dès que  $r > n$ , les  $r$  transformations infinitésimales sont nécessairement linéairement *dépendantes* en tout point  $x^0$  fixé, tandis que les  $r$  transformations auxiliaires du type (9) recherchées pour pouvoir appliquer le Théorème 23 doivent être linéairement indépendantes en tout  $a^0$  fixé, puisque la matrice des  $\tilde{\psi}_{k\mu}(a)$  doit être inversible. Cette dépendance linéaire, inévitable lorsque  $r > n$ , est d'ailleurs le défaut le plus gênant de  $X_1, \dots, X_r$ .

L'idée (remarquable) de Lie consiste à considérer l'action du groupe, non pas sur les points  $x$  pris un à un dans l'espace initial, mais sur les collections d'un certain nombre  $k$  de points *en simultané*, ou, ce qui revient au même, sur les points pris un à un dans le produit de  $k$  copies de cet espace. Introduisons donc à cet effet un nombre, ici exactement égal à  $r$  pour les besoins indiqués, de copies de l'espace initial, ces copies étant chacune munies de coordonnées notées :

$$(x_1^{(\mu)}, \dots, x_n^{(\mu)}) \quad (\mu=1 \dots r).$$

Introduisons aussi les transformations infinitésimales qui sont les reflètes des  $X_k$  dans chaque espace :

$$X_k^{(\mu)}(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1^{(\mu)}, \dots, x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}},$$

et considérons les  $r$  transformations infinitésimales :

$$W_k(f) = \sum_{\mu=1}^r X_k^{(\mu)}(f).$$

D'après la Proposition p. 123 ci-dessus, ces transformations infinitésimales sont telles qu'aucune relation de la forme :

$$\sum_{k=1}^r \psi_k(x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}) \cdot W_k(f) = 0$$

n'est possible, c'est-à-dire : ces transformations infinitésimales sont indépendantes. Maintenant, puisqu'on a de plus :

$$W_k(W_j(f)) - W_j(W_k(f)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} W_s(f),$$

les  $r$  équations indépendantes l'une de l'autre :

$$W_1(f) = 0, \dots, W_r(f) = 0$$

forment un système complet à  $r$  termes en les  $rn$  variables  $x'_1, \dots, x'_n, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}$ . Ce système complet possède  $r(n-1)$  solutions indépendantes, que l'on peut appeler  $u_1, u_2, \dots, u_{rn-r}$ . Donc si l'on sélectionne  $r$  fonctions  $y_1, \dots, y_r$  des  $rn$  quantités  $x_i^{(\mu)}$  qui sont indépendantes l'une de l'autre et indépendantes de  $u_1, \dots, u_{rn-r}$ , on peut alors introduire les  $y$  et les  $u$  comme nouvelles variables indépendantes à la place des  $x_i^{(\mu)}$ . En effectuant cela, on obtient :

$$W_k(f) = \sum_{\pi=1}^r W_k(y_\pi) \frac{\partial f}{\partial y_\pi} + \sum_{\tau=1}^{rn-r} W_k(u_\tau) \frac{\partial f}{\partial u_\tau},$$

ou encore, puisque tous les  $W_k(u_\tau)$  s'annulent identiquement :

$$W_k(f) = \sum_{\pi=1}^r \omega_{k\pi}(y_1, \dots, y_r, u_1, \dots, u_{rn-r}) \frac{\partial f}{\partial y_\pi},$$

et ici, les transformations infinitésimales  $W_1(f), \dots, W_r(f)$  ne sont reliés par aucune relations de la forme :

$$\sum_{k=1}^r \varphi_k(y_1, \dots, y_r, u_1, \dots, u_{rn-r}) \cdot W_k(f) = 0.$$

Naturellement, cette propriété des  $W_k(f)$  reste aussi vraie lorsque l'on confère à  $u_\tau$  des valeurs appropriées  $u_\tau^0$ . Si on pose alors  $\omega_{k\pi}(y, u^0) = \omega_{k\pi}^0(y)$ , les  $r$  transformations infinitésimales indépendantes en les variables indépendantes  $y_1, \dots, y_r$  :

$$V_k(f) = \sum_{\pi=1}^r \omega_{k\pi}^0(y_1, \dots, y_r) \frac{\partial f}{\partial y_\pi}$$

satisfont les relations par paires :

$$V_k(V_j(f)) - V_j(V_k(f)) = \sum_{s=1}^r c_{kjs} V_s(f)$$

et de plus, elles ne sont liées par aucune relation de la forme :

$$\sum_{k=1}^r \varphi_k(y_1, \dots, y_r) \cdot V_k(f) = 0.$$

Par conséquent, les  $V_k(f)$  sont des transformations infinitésimales ayant la constitution recherchée. Ains, nous pouvons immédiatement appliquer le Théorème 23 p. 141 aux  $2r$  transformations infinitésimales  $X_1(f), \dots, X_r(f), V_1(f), \dots, V_r(f)$  et nous avons donc démontré que les  $\infty^{r-1}$  groupes à un paramètre  $\sum \lambda_k X_k(f)$  constituent un groupe à  $r$  paramètres (essentiels). En définitive, la réciproque « conjecturée » ci-dessus est vraie.

**Théorème 24.** ([40], p. 158) *Si  $r$  transformations infinitésimales indépendantes :*

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r)$$

*satisfont les relations par paires :*

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = [X_k, X_j] = \sum_{s=1}^r c_{kjs} X_s(f),$$

*où les  $c_{kjs}$  sont des constantes, alors la totalité des  $\infty^{r-1}$  groupes à un paramètre :*

$$\lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f)$$

forme un groupe continu à  $r$  paramètres, qui contient la transformation identité, et dont les transformations peuvent être ordonnées par paires inverses l'une de l'autre.

Si les équations  $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)$  représentent une famille de  $\infty^r$  transformations et si en outre, elles satisfont des équations différentielles de la forme spécifique :

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a_1, \dots, a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r),$$

alors comme nous le savons, les  $r$  transformations infinitésimales :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r)$$

sont linéairement indépendantes et de plus, d'après le Théorème 21 p. 136, elles sont reliées entre elles par des relations de la forme :

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = [X_k, X_j] = \sum_{s=1}^r c_{kjs} \cdot X_s(f).$$

Ainsi, la famille des  $\infty^{r-1}$  groupes à un paramètre :

$$\lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f)$$

forme un groupe à  $r$  paramètres contenant la transformation identité. Par conséquent, nous pouvons ré-énoncer comme suit le Théorème 9 p. 133.

**Théorème 25.** ([40], p. 160) *Si une famille de  $\infty^r$  transformations :*

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

*satisfait certaines équations différentielles de la forme :*

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a_1, \dots, a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r),$$

*et si le déterminant :*

$$\sum \pm \psi_{11}(a) \cdots \psi_{rr}(a)$$

*ne s'annule pas, alors toute transformation  $x'_i = f_i(x, a)$  dont les paramètres  $a_1, \dots, a_r$  se trouvent dans un petit voisinage d'un paramètre quelconque fixé  $a_1^0, \dots, a_r^0$  peut être obtenue en exécutant en premier*

lieu la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x, a^0)$  et en second lieu, une transformation complètement déterminée :

$$x'_i = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(\bar{x}) + \dots \quad (i=1 \dots n)$$

du groupe à  $r$  paramètres qui, sous les hypothèses supposées, est engendré par les  $r$  transformations infinitésimales indépendantes :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r).$$

Pour terminer ce paragraphe, considérons le cas où les équations  $x'_i = f_i(x, a)$ ,  $i = 1, \dots, n$  ne contiennent pas la transformation identité dans le domaine  $\mathcal{A}^1 \subset \mathcal{A}$ , en supposant bien entendu comme à la p. 132 que deux transformations :

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \\ x''_i &= f_i(x'_1, \dots, x'_n, b_1, \dots, b_r) \end{aligned}$$

exécutées l'une après l'autre, avec  $a \in \mathcal{A}^1$  et  $b \in \mathcal{A}^1$ , produisent la transformation :

$$x''_i = f_i(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_r) = f_i(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(a, b), \dots, \varphi_r(a, b)).$$

Il en découle que ces transformations satisfont des équations différentielles fondamentales de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} &= \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a_1, \dots, a_r) \cdot \xi_{ji}(x'_1, \dots, x'_n) \\ &(i=1 \dots n; k=1 \dots r), \end{aligned}$$

et l'on supposera comme auparavant que le déterminant des  $\psi_{kj}(a)$  ne s'annule en aucun  $a \in \mathcal{A}^1$ .

Dans ce qui va suivre,  $a_1^0, \dots, a_r^0$  et pareillement  $b_1^0, \dots, b_r^0$  désigneront des points déterminés (fixes) du domaine  $\mathcal{A}^1$ , et  $\varphi_k(a^0, b^0)$  sera noté  $c_k^0$ . En revanche,  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  désignera un point arbitraire du domaine  $\mathcal{A}$ , de telle sorte que les équations :

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r)$$

représenteront une transformation quelconque du groupe.

Toute transformation de la forme  $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$  peut être obtenue en exécutant d'abord la transformation  $x'_i = f_i(x, a^0)$  et ensuite une certaine seconde transformation définie comme suit. Résolvons les équations  $x'_i = f_i(x, a^0)$  par rapport à  $x_1, \dots, x_n$ , ce qui donne :

$$x_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n, a_1^0, \dots, a_r^0),$$

et introduisons ces valeurs des  $x_i$  dans  $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ . De cette manière, nous obtenons, pour les équations cherchées, une expression de la forme :

$$(10) \quad \bar{x}_i = \Phi_i(x'_1, \dots, x'_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) \quad (i=1 \dots n),$$

dans laquelle nous n'écrivons pas les  $a_k^0$ , puisque nous voulons les considérer comme des constantes numériques.

La transformation (10) est bien définie pour tous les systèmes de valeurs  $\bar{a}_k$  dans le domaine  $\mathcal{A}$  et son expression peut être prolongée analytiquement (au sens de Weierstraß) à ce domaine entier  $\mathcal{A}$  ; cela découle en effet des hypothèses que nous avons effectuées au sujet de la nature des fonctions  $f_i$  et  $F_i$ .

Nous affirmons maintenant que pour certaines valeurs des paramètres  $\bar{a}_k$ , les transformations de la famille  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  appartiennent au groupe initialement donné  $x'_i = f_i(x, a)$ , alors que par contraste, pour certaines autres valeurs des  $\bar{a}_k$ , elles appartiennent au groupe  $X_1 f, \dots, X_r f$  qui contient la transformation identité.

Établissons la première partie de cette assertion. Nous savons que les deux transformations :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1^0, \dots, a_r^0), \quad \bar{x}_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n, b_1, \dots, b_r)$$

exécutées l'une après l'autre produisent la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x, c)$ , où  $c_k = \varphi_k(a^0, b)$  ; ici, nous pouvons donner à  $b_1, \dots, b_r$  tout système de valeurs dans le domaine  $\mathcal{A}^1$ , tandis que le système de valeurs  $c_1, \dots, c_r$  appartient au domaine  $\mathcal{A}$ , dans un certain voisinage de  $c_1^0, \dots, c_r^0$ . Mais d'après ce qui a été dit précédemment, la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x, c)$  est aussi obtenue en exécutant les deux transformations :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1^0, \dots, a_r^0), \quad \bar{x}_i = \Phi_i(x'_1, \dots, x'_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r)$$

l'une après l'autre, et en choisissant  $\bar{a}_k = c_k$ . Par conséquent, après la substitution  $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ , la transformation  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  est identique à la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x', b)$ , c'est-à-dire : *toutes les transformations  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  dont les paramètres  $\bar{a}_k$  se trouvent dans un certain voisinage de  $c_1^0, \dots, c_r^0$  qui est défini via l'équation  $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ , appartiennent au groupe donné  $x'_i = f_i(x, a)$ .*

Afin d'établir la seconde partie de notre assertion, rappelons le Théorème 25. Si  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  se trouvent dans un certain voisinage de  $a_1^0, \dots, a_r^0$ , alors en vertu de ce théorème, la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$  peut être obtenue en exécutant d'abord la transformation :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1^0, \dots, a_r^0)$$

et ensuite une transformation complètement déterminée :

$$(11) \quad \bar{x}_i = x'_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(x') + \dots$$



du groupe à  $r$  paramètres qui est engendré par les  $r$  transformations infinitésimales indépendantes :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r).$$

D'après la preuve du Théorème 9 p. 133, nous savons de plus que l'on trouve la transformation (11) en question en choisissant d'une manière appropriée  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  comme fonctions indépendantes de  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  et en déterminant inversement  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  comme fonction de  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ . Mais d'un autre côté, nous obtenons aussi la transformation  $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$  en exécutant d'abord la transformation  $x'_i = f_i(x, a^0)$ , puis la transformation  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ . Par conséquent, la transformation  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  appartient au groupe engendré par  $X_1 f, \dots, X_r f$  dès que le système de valeurs  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  se trouve dans un certain voisinage de  $a_1^0, \dots, a_r^0$ . Pour l'exprimer différemment : les équations  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  sont transformées en les équations (11) lorsque  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  est remplacé par les fonctions mentionnées de  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Ceci prouve la deuxième partie de notre assertion.

Ainsi, les équations de transformation  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  possèdent la propriété importante suivante : si à la place de  $\bar{a}_k$ , on introduit les nouveaux paramètres  $b_1, \dots, b_r$  au moyen des équations  $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ , alors pour un certain domaine des variables, les équations  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  prennent la forme  $\bar{x}_i = f_i(x', b)$ ; d'un autre côté, si on introduit les nouveaux paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  à la place de  $\bar{a}_k$ , alors pour un certain domaine, les équations  $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$  se convertissent en :

$$x_i = x'_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(x') + \dots \quad (i=1 \dots n)$$

Voilà donc en définitive une caractéristique importante du groupe initialement donné  $x'_i = f_i(x, a)$  : quand on introduit dans les équations  $x'_i = f_i(x, a)$  les nouveaux paramètres  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  à la place des  $a_k$  au moyen de  $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, a)$ , alors on obtient un système d'équations de transformations  $x'_i = \Phi_i(x, \bar{a})$  qui représentent, lorsqu'on les prolonge analytiquement, une famille de transformations à laquelle appartiennent toutes les transformations d'un certain groupe à  $r$  paramètres contenant la transformations identité.

Nous pouvons exprimer cela comme suit.

**Théorème 26.** ([40], p. 163) *Tout groupe  $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)$  à  $r$  paramètres qui n'est pas engendré par  $r$  transformations infinitésimales indépendantes dérive d'un groupe contenant  $r$  transformations infinitésimales indépendantes de la manière suivante : former tout d'abord les équations différentielles :*

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^r \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \quad (i=1 \dots n; k=1 \dots r),$$

qui sont satisfaites par les équations  $x'_i = f_i(x, a)$ , puis poser :

$$\sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_k(f) \quad (k=1 \dots r)$$

et former ensuite les équations finies :

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki}(x) + \dots \quad (i=1 \dots n)$$

du groupe à  $r$  paramètres contenant la transformation identité qui est engendré par les  $r$  transformations infinitésimales indépendantes  $X_1 f, \dots, X_r f$ . Avec ces données, il est alors possible, dans ces équations finies, d'introduire des nouveaux paramètres  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  à la place de  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de manière à ce que les équations de transformations qui en résultent :

$$x'_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) \quad (i=1 \dots n)$$

représentent une famille de  $\infty^r$  transformations qui embrasse, après prolongement analytique, toutes les  $\infty^r$  transformations :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

du groupe.

À l'issue de ce premier trajet fondamental que clôt la fin du Chapitre 9 de la *Theorie der Transformationsgruppen*, les Théorème 22 et 24 vont permettre dans la suite à Engel et à Lie d'identifier systématiquement tout groupe continu de transformations :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1 \dots n)$$

à une collection de transformations infinitésimales linéairement indépendantes :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i=1 \dots n)$$

dont les coefficients  $\xi_{ki}(x)$  sont analytiques (réels ou complexes) et qui est linéairement fermée par crochets :

$$[X_j, X_k] = \sum_{s=1}^r c_{j,k}^s X_s \quad (j, k=1 \dots r),$$

où les  $c_{j,k}^s$  sont des constantes. Une telle identification<sup>38</sup> d'un groupe à des générateurs infinitésimaux n'a pas seulement un caractère d'interchangeabilité ontologique, elle *métamorphose* aussi l'être d'un groupe

<sup>38</sup> Tous les énoncés précédents sont clairement et explicitement locaux, et ce serait se méprendre sur la portée rigoureuse de la théorie de Lie que de

local arbitraire en linéarisant ses caractéristiques fondamentales. Avec ces théorèmes fondamentaux, non seulement le différentiel supplante le fini, mais encore : on s'apprête à algébriser définitivement la genèse. Un point de seuil, en effet, est atteint, c'est un point de non retour : la connaissance mathématique initialement indécise et problématique peut à présent se décider à réenvisager l'objet « groupe continu » — maintenant moins opaque — sous un angle absolument neuf : celui des transformations infinitésimales, plus riches de virtualités et de manipulations possibles. La genèse synthétique du concept de groupe continu de transformations a donc ceci d'« irréversible » que ses caractéristiques initiales sont destinées à s'effacer devant l'approfondissement incessant de leur compréhension.

Sur le plan algébrique, les deux seules contraintes qui s'exercent sur une collection de transformations infinitésimales sont l'antisymétrie du crochet :

$$\sum_{s=1}^r c_{j,k}^s X_s = [X_j, X_k] = -[X_k, X_j] = \sum_{s=1}^r -c_{k,j}^s X_s$$

qui se lit simplement :

$$0 = c_{j,k}^s + c_{k,j}^s,$$

et les identités de type Jacobi ; ces dernières sont satisfaites automatiquement entre triplets de champs de vecteurs et elles s'écrivent ici pour tous  $j, k, l = 1, \dots, r$  :

$$\begin{aligned} 0 &= [X_j, [X_k, X_l]] + [X_l, [X_j, X_k]] + [X_k, [X_l, X_j]] \\ &= [X_j, \sum_{s=1}^r c_{k,l}^s X_s] + [X_l, \sum_{s=1}^r c_{j,k}^s X_s] + [X_k, \sum_{s=1}^r c_{l,j}^s X_s] \\ &= \sum_{t=1}^r X_t \sum_{s=1}^r [c_{k,l}^s c_{j,s}^t + c_{j,k}^s c_{l,s}^t + c_{l,j}^s c_{k,s}^t], \end{aligned}$$

ce qui équivaut aux relations quadratiques :

$$0 = \sum_{s=1}^r [c_{k,l}^s c_{j,s}^t + c_{j,k}^s c_{l,s}^t + c_{l,j}^s c_{k,s}^t].$$

**3.9. Le problème de la classification des groupes de transformations.** Pour Lie, la question dominante dans la théorie qu'il a érigée était de *classifier, à équivalence près, tous les groupes de transformations possibles, localement, génériquement* :

**Classification des groupes continus finis locaux  
de transformations analytiques**

et surtout pour l'espace réel à trois dimension, le seul qui possède un sens « physique ». Du point de vue des équations de transformations finies, il est bien entendu naturel de déclarer que deux groupes de transformations :

$$x' = f(x; a) \quad \text{et} \quad y' = g(y; b)$$

qui agissent sur des espaces respectifs  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  de la même dimension  $n \geq 1$  avec le même nombre  $r \geq 1$  de paramètres essentiels  $a_1, \dots, a_r$  et  $b_1, \dots, b_r$  sont *équivalents*<sup>39</sup> [*ähnlich*] s'il existe à la fois un changement de paramètres  $b = \beta(a)$  et un changement de coordonnées  $y = \tau(x)$  dans l'espace-source qui s'effectue simultanément aussi dans l'espace-image :  $y' = \tau(x')$ , de telle sorte que, après substitutions adéquates, on a la relation :

$$x' = \tau^{-1}(y') = \tau^{-1}(g(y; b)) = \tau^{-1}(g(\tau(x); \beta(a))) \equiv f(x; a),$$

la dernière égalité étant identiquement satisfaite pour tout  $x$  et tout  $a$ .

Mais grâce aux théorèmes fondamentaux, ce problème de classification revient en fait à classifier les algèbres de Lie locales finies de champs de vecteurs et leurs sous-algèbres, à changement de coordonnées près :

**Classification des algèbres de Lie  
de champs de vecteurs analytiques locaux  
en dimensions 1, 2 et 3 et au voisinage de points génériques**

Au niveau infinitésimal, il est bien entendu naturel de déclarer que deux algèbres de Lie de champs de vecteurs analytiques locaux  $X_1, \dots, X_r$  et  $Y_1, \dots, Y_r$  de la même dimension  $r$  sur deux espaces de coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  de la même dimension  $n$  sont (localement) *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme  $x \mapsto y = y(x)$  qui envoie chaque  $X_k$  sur une combinaison linéaire  $\lambda_{k1} Y_1 + \dots + \lambda_{kr} Y_r$  des  $Y_l$  à coefficients constants  $\lambda_{kl}$ .

Ainsi, le problème de classification revient-il à trouver des formes normales les plus simples possibles pour les algèbres de Lie de transformations infinitésimales. Plus précisément, il s'agit d'entreprendre l'étude suivante.

<sup>39</sup> L'adjectif « semblable » appartenant trop au langage non-conceptuel, [*ähnlich*] sera traduit par « équivalent », en référence à la *méthode d'équivalence* que Élie Cartan a développée à la suite de Lie pour une pluralité de structures géométriques qu'il a interprétées en termes de systèmes différentiels extérieurs ([24, 87, 156, 56, 125]).

• Déterminer [*bestimmen*] toutes les algèbres de Lie de dimension finie  $r$  de champs de vecteurs analytiques complexes locaux :

$$X_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots r)$$

définies dans un certain ouvert initial  $U \subset \mathbb{C}^n$  ; il est permis de relocaliser les considérations un nombre fini de fois à un sous-domaine plus petit dès qu'une opération mathématique nécessite qu'un certain objet soit nondégénéré, ou qu'une certaine fonction soit non nulle<sup>40</sup>.

• Rapporter chaque tel système  $X_1, \dots, X_r$  à une forme normale la plus simple possible, *e.g.* assurer que la plupart des coefficients sont nuls, monomiaux, égaux à des fonctions élémentaires, ou qu'ils dépendent d'un nombre de variables qui est strictement inférieur à  $n$ .

• Distinguer précisément tous les systèmes possibles de champs de vecteurs en introduisant des *concepts* géométriques ou algébriques indépendants des coordonnées afin de ranger tous les groupes dans des catégories et dans des sous-catégories qui soient précisément et quasi-instantanément *discernables par la pensée*.

Les problèmes de classification : un groupe de taille importante et d'une complexité invisible agit de manière quasiment incontrôlable sur une catégorie d'objets. L'objet quelconque flotte alors, transporté passivement par les ambiguïtés de sa donation initiale. La saisie vraie en tant que telle ne peut qu'exprimer fondamentalement la mobilité unique qui est consubstantielle à l'objet qu'elle vise : le transport possible d'un être mathématique par une transformation  $f$  quelconque :

$$f_*(\text{être mathématique}) = \text{le même être vu autrement,}$$

transport qui préserve la nature abstraite générale de l'être en spécifiant seulement les modes généraux par lesquels il se voit déterminé, re-déterminé, et déterminé à nouveau. Identité, symétrie et transitivité : par un acte de pensée réduit à sa plus simple expression, l'homogénéité ontologique du symbole de transformation :

$$f_*(f_*(\cdot)) = (ff)_*(\cdot) = f_*(\cdot),$$

garantit la permanence de cet être, de tous ces êtres.

<sup>40</sup> En admettant les relocalisations libres, on évite notamment de se confronter au difficile problème de trouver des formes normales pour un *unique* champ de vecteur analytique  $X$  au voisinage d'un point où tous ses coefficients s'annulent, une question toujours non résolue et probablement non résoluble en toute généralité, même en dimension  $n = 2$ . Au contraire, d'après le théorème de redressement local p. 108 toute transformation infinitésimale non identiquement nulle relocalisée en un point générique est localement équivalente à une unique forme normale :  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ .

Mais le subjectif pour soi de la pensée perceptive accentue les exigences de la saisie. Le subjectif biologique du perceptif biologique structure en effet fortement la nature désirée de toute saisie par la pensée. Le champ mathématique doit se restructurer en accord avec une demande impérieuse d'immédiateté. Il s'agit de capturer, en un même moment d'intuition globale, tous les objets possibles dans leur individualité propre, clairement et distinctement, avec la même netteté que l'œil embrasse dans son champ visuel toutes les frontières qui coexistent entre centaines de régions de couleur. Reproduire le perceptif dans le champ mathématique, c'est désirer reproduire l'immédiateté immanente à soi du champ biologique de la conscience. Le perceptif cherche à s'inscrire dans la pensée, et la pensée cherche à s'inscrire dans le perceptif : double circulation étrangère à soi du soi de l'être qui pense et qui perçoit, au contact d'une mathématique qui ne pense pas par elle-même et ne perçoit rien ni en elle-même, ni par elle-même.

## **Partie III :**

### **Traduction française commentée et annotée**

Sophus LIE, unter Mitwirkung von Friedrich ENGEL  
*Theorie der Transformationsgruppen*  
Dritter und letzter Abschnitt, Abtheilung V

#### Chapitres

Division 5 : Recherche sur les fondements de la géométrie .....	159.
Chap. 20 : Détermination des groupes de $R_3$ relativement auxquels les paires de points possèdent un, et un seul invariant, tandis que $s > 2$ points n'ont pas d'invariant essentiel .....	166.
Chap. 21 : Critique des recherches helmholtziennes .....	220.
Chap. 22 : Première solution du problème de Riemann-Helmholtz .....	260.
Chap. 23 : Deuxième solution du problème de Riemann-Helmholtz .....	289.

### Division 5

#### **Recherches sur les fondements de la Géométrie**

Euclide a développé la Géométrie « purement géométrique » en partant d'un certain nombre d'axiomes simples et de notions fondamentales élémentaires, sans utiliser aucun outil analytique. Aussi admirable que soit son système déductif, celui-ci laisse encore cependant quelque peu à désirer, lorsque l'on considère la façon dont sont employés les éléments fondamentaux.

Premièrement, on ne saisit pas si le système euclidien d'axiomes et de notions fondamentales est réellement complet. Il est en effet maintenant généralement admis qu'au cours de ses développements, Euclide a introduit des hypothèses tacites qu'il aurait dû formuler comme axiomes. Par exemple, l'introduction du concept d'espace à deux dimensions<sup>1</sup> repose chez Euclide sur un véritable axiome qu'il n'a pas explicité.

Deuxièmement, on peut s'imaginer que certains des axiomes euclidiens sont superflus, c'est-à-dire qu'ils pourraient être démontrés à partir des définitions et axiomes précédents.

---

<sup>1</sup> Précisément : « espace de type surface », *Flächenraum*.

Mais au fond, il est beaucoup plus important de s'assurer avant tout qu'on possède un système complet et suffisant d'axiomes et de notions fondamentales, plutôt que de se demander si certains axiomes sont éventuellement superflus. Tout de même, la question de savoir jusqu'à quel point le système euclidien d'axiomes doit être enrichi ou complété reste en attente, sans même parler de réalisation définitive. Cependant, on s'est préoccupé avec d'autant plus de zèle de la deuxième question, que les recherches récentes sur les fondements de la Géométrie ont seulement été incitées à étudier la question de la démontrabilité ou de la non-démontrabilité du onzième axiome d'Euclide : le postulat des parallèles.

Après que plusieurs mathématiciens, notamment Legendre, ont effectué de nombreuses tentatives infructueuses pour démontrer l'axiome des parallèles, Lobatchevskiï (1829) tout d'abord et peu après Bólyai (1832) ont réussi à exposer indirectement la non-démontrabilité de l'axiome des parallèles, à savoir, en laissant une géométrie se construire, dans laquelle l'axiome des parallèles n'est pas du tout utilisé. D'après des lettres anciennes de Gauss, qui ne furent à vrai dire publiées que très tardivement, il ressort que Gauss était déjà parvenu depuis longtemps à des résultats similaires.

Aujourd'hui, on doit véritablement s'étonner que les mathématiciens aient dû s'éclairer sur la nécessité de l'axiome des parallèles seulement par un tel détour, alors qu'un seul coup d'œil sur la surface d'une sphère aurait pu leur montrer qu'une géométrie libre de contradiction est aussi possible sans l'axiome des parallèles, une géométrie qui satisfait en tout cas les axiomes introduits précédemment par Euclide, à l'intérieur d'un domaine choisi convenablement.

Lobatchevskiï et Bólyai ont entièrement développé leur géométrie à la manière d'Euclide, *i.e.* de façon purement géométrique. Riemann fut le premier à employer des instruments analytiques, afin d'en tirer des éclaircissements sur les fondements de la Géométrie. Malheureusement, nous ne possédons de sa main aucune présentation détaillée de ses recherches, et nous devons nous en remettre aux explications fort succinctes et souvent difficiles à comprendre que contient sa soutenance d'habilitation de 1854.

Riemann place au tout début de ses recherches la proposition d'après laquelle l'espace est une variété numérique, partant que les points de l'espace peuvent être repérés par des coordonnées. Ensuite,



il demande quelles propriétés doivent être attribuées à cette variété numérique pour qu'elle représente la géométrie euclidienne, ou bien une autre géométrie semblable. La réponse à cette question est manifestement un problème purement analytique, qui peut être résolu en tant que tel.

Cependant, la véritable signification de la proposition d'après laquelle l'espace est une variété numérique ne ressort pas du travail de Riemann. Riemann cherche à démontrer cette proposition, mais sa démonstration ne peut pas être prise au sérieux. Si l'on veut véritablement démontrer que l'espace est une variété numérique, on devra, à n'en pas douter, postuler auparavant un nombre non négligeable d'axiomes, ce dont il semble que Riemann n'ait pas été conscient. Il faut cependant prendre en considération le fait que par l'introduction des variétés numériques, il importait à Riemann de donner une version purement analytique du problème, et il faut faire observer que les hypothèses justifiant la possibilité d'introduire au commencement les variétés numériques n'étaient pour lui qu'accessoires.

Ajoutons à cela que son étude constituait une soutenance orale [*Probevorlesung*], et qu'elle n'était pas destinée à l'impression; s'il avait voulu lui-même la publier, il l'aurait sûrement écrite d'une tout autre manière.

Du reste, l'introduction du concept de variété numérique dans les recherches sur les fondements de la Géométrie ne possède en rien un caractère arbitraire, mais s'inscrit objectivement dans l'essence des choses. En effet, en ce qui concerne l'édification de la Géométrie, il faut distinguer plusieurs niveaux. L'un d'entre eux est indépendant aussi bien de l'axiome des parallèles, que du concept intrinsèque de surface [*Flächeninhalt*] et de celui des nombres irrationnels. Mais il y a aussi des niveaux plus élevés, entre autres, un niveau où l'on ne peut pas éluder le concept de nombre irrationnel et où on doit en tout cas introduire à titre d'axiome le fait que la droite soit une variété numérique. M. G. Cantor est le premier à avoir été confronté à la nécessité d'introduire un axiome de cette sorte, si l'on souhaite pousser l'édification de la Géométrie jusqu'à son achèvement.

Riemann fonde la géométrie des variétés numériques sur le concept de longueur d'un élément courbe [*Bogenelement*], dont découle par intégration le concept de longueur d'une ligne finie. Il demande que le carré de la longueur d'un élément courbe soit une fonction complètement homogène du second degré par rapport aux différentielles des coordonnées; en ajoutant, entre autres, l'exigence

que chaque ligne arbitraire puisse être déplacée sans modifier sa longueur, Riemann est alors parvenu à ce résultat qu'en dehors de la géométrie euclidienne, seulement deux autres géométries sont possibles. Parmi ces deux dernières, l'une s'identifie à celle qui a été réalisée par Lobatchevskiï, et l'autre correspond à la géométrie inscrite sur la surface d'une sphère.

Avant toute chose, du point de vue de l'Analyse, les recherches de Riemann sur la longueur d'un élément courbe — qu'il n'a toutefois qu'esquissées — sont du plus haut intérêt ; entre autres, elles ont vraisemblablement donné l'impulsion aux développements que Messieurs Lipschitz et Christoffel ont entrepris ultérieurement (depuis 1870) sur les expressions différentielles du second degré, Monsieur Lipschitz ayant en tout cas poursuivi au cours du développement de sa théorie l'objectif de trancher en même temps quant à la justesse des considérations de Riemann. Mais on ne peut pas nier que les assertions de Riemann ne fournissent que peu d'éclaircissements sur l'objet véritable de la recherche, *i.e.* sur les fondements de la Géométrie. Les axiomes de Riemann se réfèrent en effet tous à la longueur d'un élément courbe, donc seulement aux propriétés de l'espace dans l'infinitésimal ; si l'on veut en déduire quelque chose quant à la constitution de l'espace à l'intérieur d'une région d'extension finie, on devra d'abord effectuer une intégration. Mais puisque les axiomes qui doivent servir à l'édification d'une Géométrie purement géométrique doivent nécessairement être élémentaires, et puisque ni le concept de longueur d'un élément courbe ni celui d'intégration ne sont élémentaires, il est clair que les axiomes de Riemann sont inutilisables pour un tel objectif.

Dans son travail célèbre\* de l'année 1868, M. de Helmholtz s'est soustrait, quoique de manière inconsciente, aux insuffisances des axiomes riemanniens dont nous venons justement de discuter, notamment lorsqu'il postula certains axiomes se référant à un nombre fini de points éloignés les uns des autres, et lorsqu'il tenta d'en déduire l'axiome de Riemann sur la longueur d'un élément courbe.

M. de Helmholtz place expressément en première position l'axiome d'après lequel l'espace est une variété numérique ; ceci constitue un progrès par rapport à Riemann, bien que, à vrai dire, M. de Helmholtz s'enquière lui aussi de la portée de cet axiome lorsque, à la fin de son travail (à la page 221), il affirme que l'axiome posé par

---

\* « *Sur les faits qui se trouvent au fondement de la Géométrie* », Gött. Nachr. 1868, pp. 193–221 ; voir aussi ses œuvres scientifiques complètes, Tome II, pp. 618–639.

lui « demande d'en accepter moins que ce que l'on présuppose dans les démonstrations géométriques que l'on conduit ordinairement ». Mais cette affirmation est totalement fautive, d'autant plus que les autres axiomes helmholtziens renferment des présuppositions superflues.

Un progrès supplémentaire en comparaison avec Riemann consiste en ce que M. de Helmholtz opère directement avec la famille des mouvements de l'espace, tout en l'interprétant comme famille des transformations de la variété numérique concernée ; il exécute même *une fois* deux tels mouvements l'un après l'autre et il met à profit le fait que ces deux mouvements pris ensemble peuvent être substitués à un troisième mouvement ; il fait donc en quelque sorte usage des caractéristiques de type « groupe » que possèdent les mouvements, sans cependant connaître le concept général de groupe.

Même si le travail de Helmholtz, quant à ses hypothèses, marque un certain progrès par rapport aux recherches plus anciennes de Riemann, on ne doit cependant pas ignorer que le travail de Riemann ne lui cède en rien quant à la valeur mathématique. En effet, tandis qu'il s'est avéré que la méthode esquissée par Riemann pouvait réellement se déduire des propositions énoncées par lui, nous verrons ultérieurement que les ressources analytiques dont Monsieur de Helmholtz s'est servi ne sont pas suffisantes pour atteindre l'objectif, et qu'au cours de ses recherches, Monsieur de Helmholtz introduit *toute une série d'hypothèses incorrectes*.

Si nous embrassons les pensées communes qui se trouvent au fondement des considérations de Riemann et de M. de Helmholtz, nous pouvons dire que les deux chercheurs ont posé un problème de type nouveau, quoiqu'ils ne l'aient fait que de manière implicite, problème que nous souhaitons appeler « Problème de Riemann-Helmholtz\* », et qui peut s'énoncer brièvement comme suit : *Trouver des propriétés qui permettent de distinguer non seulement la famille des mouvements euclidiens, mais aussi les deux familles de mouvements non-euclidiens, et grâce auxquelles ces trois familles apparaîtront alors comme remarquables par rapport à toutes les autres familles de mouvements d'une variété numérique*.

---

\* Au fond, le problème provient plutôt véritablement de Riemann lui-même. Nous croyons cependant que notre appellation du problème est tout à fait légitime, car M. de Helmholtz est le premier à avoir révélé que le problème n'avait pas du tout été résolu par la théorie de Riemann. Une formulation véritable du problème n'a été fournie par aucun des deux auteurs.

Lorsqu'en 1869, Lie a communiqué à son ami F. Klein ses premières recherches sur les groupes continus, Klein a attiré très tôt l'attention de Lie sur les recherches de Riemann et de Helmholtz, en soulignant que le concept de groupe continu y jouait un rôle implicite (*cf.* le mémoire de Lie dans le tome 16 des *Math. Ann.*, p. 527). Mais c'est seulement au cours de l'année 1884 qu'à la suite des invitations renouvelées de Klein, Lie a entrepris de mettre strictement à l'épreuve les réalisations helmholtziennes et d'apporter un traitement approfondi au problème de Riemann-Helmholtz dans l'espace ordinaire à trois dimensions, au moyen de la théorie des groupes. Lie n'a rencontré à cet égard aucune difficulté, sachant qu'il avait déjà déterminé depuis longtemps tous les groupes continus finis de cet espace. Lie a tout d'abord fait connaître les résultats de cette recherche dans le *Leipziger Berichten* en 1886, sans que leur déduction soit accompagnée des calculs nécessaires. Ensuite, dans deux gros mémoires de l'année 1890, parus également dans le *Leipziger Berichten*, non seulement il formula une critique détaillée des développements helmholtziens, mais encore, ce qui constituait le but principal de tout ce travail, il apporta plusieurs nouvelles solutions au problème de Riemann-Helmholtz.

Les chapitres qui suivent constituent un remaniement et en partie des compléments aux travaux sus-mentionnés, que Lie a publiés à ce sujet.

Le Chapitre 20 contient certaines théories qui seront exposées au mieux pour elles-mêmes, avant que nous rendions compte des développements helmholtziens. Une partie des axiomes qui ont été posés par Helmholtz peut en effet s'exprimer, comme nous le verrons, de la façon suivante : la totalité des mouvements constitue un groupe, et relativement à ce groupe, deux points possèdent un et un seul invariant, tandis que tous les invariants d'un nombre de points supérieur à deux peuvent s'exprimer comme fonctions des invariants de paires de points. Afin de mesurer la portée des axiomes helmholtziens, il faut connaître à l'avance tous les groupes qui satisfont précisément à cette exigence, et puisque cette tâche, déjà importante en elle-même, qui consiste à déterminer tous ces groupes, ne peut pas être accomplie sans quelques dépenses de calcul, il semble recommandé d'entreprendre spécialement une telle détermination.

Dans le Chapitre 21, nous formulerons une critique détaillée des axiomes et des résultats exposés par Helmholtz. Ensuite, dans les Chapitres 22 et 23, nous exposerons différentes solutions du problème de

Riemann-Helmholtz, dans l'espace ordinaire et dans l'espace  $n$  fois étendu. Enfin, dans le Chapitre 24, nous discuterons et nous critiquerons quelques recherches récentes sur les fondements de la Géométrie.

Nous ne pouvons pas conclure ces remarques préliminaires sans souligner expressément que les recherches qui vont suivre n'ont pas la prétention de constituer des spéculations philosophiques sur les fondements de la Géométrie ; elles ont seulement pour objet d'apporter un traitement soigné de type « théorie des groupes » à ce problème de la théorie des groupes<sup>2</sup> que nous avons appelé *Problème de Riemann-Helmholtz*. À la fin de la présente Division V, nous évoquerons le bénéfice que la résolution de ce problème peut apporter à l'édification d'un système de Géométrie.

Même si nous n'entreprenons pas ici une telle tentative, nous souhaitons toutefois exprimer comme étant notre conviction profonde, l'opinion d'après laquelle il n'est nullement impossible de mettre sur pied un système d'axiomes géométriques qui soit suffisant et ne renferme pas de condition superflue. Malheureusement, on doit indubitablement reconnaître qu'il n'existe que très peu de recherches qui ont véritablement développé les fondements de la Géométrie.

---

<sup>2</sup> Certainement intentionnelle, la redondance est explicite : *Eine sorgfältige gruppentheoretische Behandlung des gruppentheoretischen Problems, das wir als das Riemann-Helmholtzsche Problem bezeichnet haben.*

## Chapitre 20.

### **Détermination des groupes de $R_3$ relativement auxquels les paires de points possèdent un, et un seul invariant, tandis que $s > 2$ points n'ont pas d'invariant essentiel.**

Les développements du présent chapitre se rattachent au §59 du Tome I (p. 218 sq.). À ce moment-là, nous<sup>1</sup> avons introduit le concept d'*invariant de plusieurs points* et maintenant, nous voulons déterminer tous les groupes continus finis de  $R_3$  qui satisfont certaines exigences quant aux invariants d'un nombre quelconque fini de points. Notamment, deux points doivent avoir un et un seul invariant relativement à chaque tel groupe, tandis que tous les invariants de  $s > 2$  points doivent toujours pouvoir s'exprimer comme fonctions des invariants des paires de points qui sont comprises dans ces  $s$  points. Si, en concordance avec le Tome I, p. 219, nous disons qu'un invariant de  $s$  points est *essentiel* s'il ne peut pas être exprimé au moyen des invariants d'un sous-système de  $s - 1$  (voire moins) points, alors nous pouvons énoncer notre problème (qui se trouve déjà exprimé dans le titre du chapitre) de la manière suivante :

*Déterminer tous les groupes continus finis de  $R_3$  relativement auxquels deux points possèdent un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de points supérieur à deux n'a jamais d'invariant essentiel.*

Nous allons d'abord résoudre ce problème sans tenir compte de la condition de réalité. Par conséquent, nous allons chercher en premier lieu tous les groupes de transformations complexes qui possèdent la propriété indiquée, et plus tard seulement, nous résoudrons aussi le problème pour les groupes de transformations réels\*.

Nous nous sommes déjà expliqués p. 397 sq. sur les raisons qui nous ont poussés à placer ce chapitre en position préliminaire, avant de

---

<sup>1</sup> Ambiguïté éventuelle, ici, sur le « nous », qui pourrait aussi bien renvoyer à un impersonnel mathématique qu'au duo de rédacteurs formé par Engel et Lie.

\* En 1886, Lie a déjà esquissé dans le *Leipziger Berichten*, p. 337 sq., les résultats qui alimentent le présent chapitre ; début 1890, il en a donné des démonstrations détaillées (ib., pp. 355–418). Ce qui suit est un remaniement de cette dernière étude.

passer aux recherches proprement dites sur les fondements de la Géométrie.

### § 85.

#### Propriétés caractéristiques des groupes recherchés.

Soit :

$$X_k f = \xi_k(x, y, z) p + \eta_k(x, y, z) q + \zeta_k(x, y, z) r \quad (k=1 \dots m)$$

un groupe<sup>1</sup> à  $m$  paramètres<sup>2</sup> possédant la constitution exigée. Si ensuite :

$$(1) \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad \dots \dots; \quad x_s, y_s, z_s$$

sont  $s$  points arbitraires<sup>3</sup> de  $R_3$  et si nous posons :

$$\xi_k(x_\nu, y_\nu, z_\nu) p_\nu + \eta_k(x_\nu, y_\nu, z_\nu) q_\nu + \zeta_k(x_\nu, y_\nu, z_\nu) r_\nu = X_k^{(\nu)} f,$$

alors premièrement, les  $m$  équations linéaires aux dérivées partielles :

$$(2) \quad X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f = 0 \quad (k=1 \dots m)$$

en les six variables :  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  doivent posséder en commun une et une seule solution<sup>4</sup> :

$$(3) \quad J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2);$$

et deuxièmement, lorsque  $s > 2$ , toutes les solutions communes des  $m$  équations :

$$(4) \quad X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + \dots + X_k^{(s)} f = 0 \quad (k=1 \dots m)$$

<sup>1</sup> Tout groupe de transformations fini et continu est systématiquement identifié par Lie à un système de générateurs infinitésimaux clos par crochets.

<sup>2</sup> Le texte allemand imprimé comporte ici l'une des très rares coquilles de tout le traité (Tomes I, II et III), Engel et Lie ayant noté par réflexe  $r$  au lieu de  $m$  ce nombre de paramètres (nous rectifions), comme ils ont l'habitude de le faire lorsqu'ils envisagent un groupe continu général, mais dans ce chapitre, la lettre  $r$  n'est plus autorisée, car elle entrerait en confusion avec la troisième transformation infinitésimale de l'espace, traditionnellement notée  $r = \frac{\partial f}{\partial z}$ .

<sup>3</sup> Ici,  $R_3$  désigne l'espace à trois dimensions, en fait complexe : c'est  $\mathbb{C}^3$ , et non  $\mathbb{R}^3$ . Engel et Lie travaillent toujours d'abord sur  $\mathbb{C}$  (sans le préciser), puis sur  $\mathbb{R}$  (en le précisant), mais ils notent à nouveau  $R_3$  (ou  $R_n$ ) l'espace réel.

<sup>4</sup> Plus précisément, la solution générale du système (2) est nécessairement une fonction arbitraire de l'unique invariant  $J$ , de la forme  $\Phi(J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2))$ , où  $\Phi$  est une fonction arbitraire. En permutant les variables  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$ , les équations (2) restent inchangées, donc  $J(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$  est aussi une solution de (2), mais *non essentielle*, puisqu'elle est de la forme  $\Phi(J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2))$ .

en les  $3s$  variables  $x_k, y_k, z_k$  doivent se laisser exprimer au moyen des  $\frac{s(s-1)}{1 \cdot 2}$  fonctions<sup>5</sup> :

$$(5) \quad J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x_\mu, y_\mu, z_\mu) \quad (\lambda = 1 \dots s-1; \mu = \lambda + 1 \dots s).$$

Avant toute chose, il faut remarquer que chaque groupe possédant la constitution exigée<sup>6</sup> doit être transitif. En effet, si le groupe :  $X_1 f \dots X_m f$  était intransitif, les équations :

$$X_k f = 0 \quad (k = 1 \dots m)$$

auraient déjà en tout cas une solution commune, et les équations (2) possèderaient alors au minimum deux solutions communes indépendantes<sup>7</sup>, en contradiction avec notre exigence.

Afin de trouver encore d'autres propriétés des groupes recherchés, rappelons que les<sup>8</sup>  $m$  transformations infinitésimales :

$$(6) \quad X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + \dots + X_k^{(s)} f \quad (k = 1 \dots m)$$

produisent un groupe à  $m$  paramètres en les  $3s$  variables (1), lequel indique comment le système des  $s$  points (1) de  $R_3$  est transformé par le groupe :  $X_1 f \dots X_m f$ . En outre, nous avons l'intention de supposer que les  $s$  points (1) soient non seulement chacun en position générale vis-à-vis du groupe :  $X_1 f \dots X_m f$ , mais encore soient *mutuellement* en position générale<sup>9</sup>, de telle sorte que le système des valeurs (1) soit en position générale vis-à-vis du groupe (6).

Sous ces hypothèses, on peut facilement embrasser d'un coup d'œil [ÜBERSEHEN] quelles sont toutes les positions nouvelles que le système des  $s$  points (1) peut prendre à travers les transformations du groupe (6); en effet, d'après le Tome I, p. 216, la mobilité générale de ces systèmes de points n'est limitée par aucune autre condition<sup>10</sup> que la

<sup>5</sup> Ici,  $1 \leq \lambda < \mu \leq s$ , car les autres fonctions sont des invariants non essentiels.

<sup>6</sup> Pour l'instant, les groupes sont inconnus. Le Théorèmes 37 (sur  $\mathbb{R}$ ) p. 215 fournira la liste des onze groupes réels répondant au problème posé.

<sup>7</sup> Si  $\varphi(x, y, z)$  est une solution non constante du système  $X_1 f = \dots = X_m f = 0$ , alors  $\varphi(x_1, y_1, z_1)$  et  $\varphi(x_2, y_2, z_2)$  sont deux solutions indépendantes de (2).

<sup>8</sup> Seconde inadvertance du texte imprimé, que nous rectifions à nouveau, mais qui ne se reproduira plus.

<sup>9</sup> Être mutuellement en position générale, pour un système de  $s$  points  $p_1, \dots, p_s$  de  $R_3$  signifie simplement que le point produit  $(p_1, \dots, p_s)$  dans  $R_{3s}$  soit en position générale.

<sup>10</sup> À l'endroit cité, il a été établi qu'à un groupe quelconque de transformations  $X_1 f, \dots, X_m f$  à  $m$  paramètres agissant sur un espace  $(x_1, \dots, x_n)$  de dimension  $n$  quelconque est toujours attaché, localement au voisinage d'un point général, un nombre déterminé  $n - q$  (éventuellement nul) de fonctions indépendantes



condition que chaque invariant du groupe doit conserver la même valeur numérique pour toutes les positions du système de points. Si nous notons alors  $x'_k, y'_k, z'_k$  la position que prend le point  $x_k, y_k, z_k$  après une transformation quelconque du groupe :  $X_1 f \dots X_m f$  et si nous nous rappelons que tous les invariants du groupe (6) doivent pouvoir être exprimés au moyen des invariants (5), nous reconnaissons par conséquent que les  $s$  points (1) peuvent se transformer<sup>11</sup> en tous les points<sup>12</sup> :  $x'_k, y'_k, z'_k$  ( $k = 1 \dots s$ ) qui satisfont les équations :

$$(7) \quad \begin{cases} J(x'_\lambda, y'_\lambda, z'_\lambda; x'_\mu, y'_\mu, z'_\mu) = J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x_\mu, y_\mu, z_\mu) \\ (\lambda = 1 \dots s-1; \mu = \lambda+1 \dots s), \end{cases}$$

et qui sont procurés de telle sorte que le système de valeurs :

$$(1') \quad x'_1, y'_1, z'_1; x'_2, y'_2, z'_2; \dots; x'_s, y'_s, z'_s$$

reste dans un certain voisinage du système de valeurs (1).

Si nous fixons<sup>13</sup> maintenant les  $s-1$  premiers points (1) :

$$x'_k = x_k, \quad y'_k = y_k, \quad z'_k = z_k \quad (k=1 \dots s-1),$$

alors les conditions (7) pour lesquelles  $\lambda$  et  $\mu$  sont tous deux  $< s$  sont satisfaites automatiquement, et il ne reste plus que les  $s-1$  conditions :

$$(8) \quad \begin{cases} J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x'_s, y'_s, z'_s) = J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x_s, y_s, z_s) \\ (\lambda=1, 2 \dots s-1), \end{cases}$$

$\Omega_1(x), \dots, \Omega_{n-q}(x)$  découpant l'espace en le feuilletage :

$$\Omega_1(x) = \text{const}_1, \quad \dots, \quad \Omega_{n-q}(x) = \text{const}_{n-q}$$

qui reste stable par l'action du groupe. Alors l'action du groupe est localement transitive en famille sur les feuilles  $\Omega_k(x) = \text{const}_k, k = 1, \dots, n-q$ . De plus, l'exigence helmholtzienne reformulée abstraitement par Lie demande que les positions  $(x'_1, \dots, x'_n)$  que peut prendre  $(x_1, \dots, x_n)$  par l'action du groupe soient entièrement déterminées par les fonctions invariantes  $J$ , lesquelles satisfont  $J(x'_1, \dots, x'_n) = J(x_1, \dots, x_n)$  pour toute transformation finie  $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$  du groupe recherché.

<sup>11</sup> Les  $s$  points  $p_1, \dots, p_s$  mutuellement en position générale de coordonnées  $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda), \lambda = 1, \dots, s$ , sont transformés par le groupe (inconnu, que l'on recherche) en des points  $(x'_\lambda, y'_\lambda, z'_\lambda)$  de telle sorte qu'une « pseudodistance » soit conservée :  $J(p'_\lambda, p'_\mu) = J(p_\lambda, p_\mu)$ , et c'est cette seule hypothèse qui va « faire naître » les 11 groupes possibles collectés dans le Théorème 37, p. 215.

<sup>12</sup> Les points sont représentés par leurs coordonnées qui sont des systèmes de valeurs.

<sup>13</sup> Fixer un ou plusieurs points signifie considérer le sous-groupe consistant seulement en les transformations ponctuelles qui fixent ce ou ces points.

c'est-à-dire : après fixation de ces  $s - 1$  points-là, le point  $x_s, y_s, z_s$  peut encore se transformer en tous les points  $x'_s, y'_s, z'_s$  qui satisfont les équations (8) et qui se trouvent dans un voisinage donné de  $x_s, y_s, z_s$ . Mais puisque le groupe :  $X_1 f \dots X_m f$  est fini, lorsqu'on fixe un nombre suffisant de points qui sont mutuellement en position générale, il doit finalement se produire le cas que tous les points restent généralement au repos ; par conséquent, les équations (8) doivent être constituées de telle sorte que, lorsque  $s$  est suffisamment grand, plus aucune famille continue de systèmes de valeurs  $x'_s, y'_s, z'_s$  ne les satisfait, et qu'on peut en tirer les équations :

$$(9) \quad x'_s = x_s, \quad y'_s = y_s, \quad z'_s = z_s.$$

D'après le Tome I, p. 490, ce cas se produit<sup>14</sup> au plus tard lorsque  $s = m + 1$ , mais nous verrons cependant que sous les hypothèses posées ici, ce cas se produit déjà pour un nombre inférieur<sup>15</sup> à  $m + 1$ .

Si nous fixons seulement un point en position générale, par exemple  $x_1, y_1, z_1$ , alors chaque autre point  $x_2, y_2, z_2$  en position générale peut encore être transformé en les  $\infty^2$  points<sup>16</sup>  $x'_2, y'_2, z'_2$  qui satisfont l'équation :

$$J(x_1, y_1, z_1; x'_2, y'_2, z'_2) = J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2).$$

Et maintenant, comme notre groupe :  $X_1 f \dots X_m f$  est transitif, après fixation d'un point en position générale, les paramètres du groupe sont soumis exactement à trois conditions ; par conséquent le point  $x_2, y_2, z_2$  ne peut évidemment occuper encore  $\infty^2$  positions que s'il reste encore au minimum deux paramètres arbitraires ; donc notre groupe possède au moins cinq paramètres.

<sup>14</sup> Voici l'argument. Soit  $G$  un groupe de transformations fini et continu comportant  $m$  paramètres (essentiels) qui agit sur  $R_n$ . Il existe au moins un point  $p_1$  en position générale qui n'est pas fixé par  $G$ . Le sous-groupe (d'isotropie)  $G_1 \subset G$  des transformations qui laissent  $p_1$  au repos a donc  $m_1 \leq m - 1$  paramètres. Si  $m_1 \geq 1$ , il existe au moins un point  $p_2$  en position générale qui n'est pas fixé par  $G_1$ . Le sous-groupe  $G_2 \subset G_1$  des transformations fixant  $p_2$  possède  $m_2 \leq m_1 - 1 \leq m - 2$  paramètres, etc.

<sup>15</sup> Les développements ultérieurs montreront que cela se produit en fait déjà pour  $s < 4$ , meilleure inégalité que  $s < 7 = m + 1$  lorsque  $m = 6$ .

<sup>16</sup> Le symbole courant «  $\infty^k$  » dénote le nombre  $k$  de paramètres (réels ou complexes) dont un objet géométrique (ou analytique) dépend effectivement. Chaque paramètre, susceptible de parcourir une infinité de valeurs continues, compte pour une et une seule puissance du symbole «  $\infty$  ».

Il est clair qu'après fixation du point :  $x_1, y_1, z_1$ , les  $\infty^3$  points de l'espace peuvent se disposer sur les  $\infty^1$  surfaces invariantes :

$$(10) \quad J(x_1, y_1, z_1; x, y, z) = \text{const.}$$

Relativement au groupe à six paramètres des mouvements euclidiens, qui satisfait évidemment toutes les conditions posées à la page 166, ces  $\infty^1$  surfaces-là ne sont autres que les  $\infty^1$  sphères (10) centrées au point :  $x_1, y_1, z_1$ . Afin de pouvoir nous exprimer brièvement, nous voulons donc appeler simplement *pseudosphères centrées au point  $x_1, y_1, z_1$  relatives au groupe* :  $X_1 f \dots X_m f$  les  $\infty^1$  surfaces (10). Ensuite, nous pouvons aussi dire : si un point  $x_1, y_1, z_1$  qui est en position générale vis-à-vis du groupe :  $X_1 f \dots X_m f$  est fixé, alors chaque autre point en position générale peut se mouvoir sur la pseudosphère centrée en  $x_1, y_1, z_1$  passant par lui. La totalité [Inbegriff] de toutes les pseudosphères existantes forme naturellement une famille de surfaces invariantes par le groupe<sup>17</sup> :  $X_1 f \dots X_m f$ . On peut encore mentionner aussi que les  $\infty^1$  pseudosphères (10) peuvent être définies par une équation de Pfaff intégrable de la forme :

$$(11) \quad \alpha(x_1, y_1, z_1; x, y, z) dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

qui est obtenue par différentiation<sup>18</sup> de (10), et dans laquelle  $x_1, y_1, z_1$  jouent le rôle de constantes.

À présent, imaginons-nous que deux points :  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  sont fixés ; alors, comme nous le savons<sup>19</sup>, tout autre troisième point :  $x_3, y_3, z_3$  en position générale peut encore occuper toutes les positions :  $x'_3, y'_3, z'_3$  qui satisfont les deux équations :

$$(12) \quad \begin{cases} J(x_1, y_1, z_1; x'_3, y'_3, z'_3) = J(x_1, y_1, z_1; x_3, y_3, z_3) \\ J(x_2, y_2, z_2; x'_3, y'_3, z'_3) = J(x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3), \end{cases}$$

et qui se trouvent dans un certain voisinage de  $x_3, y_3, z_3$ , donc ce point peut encore occuper au moins  $\infty^1$  positions. Maintenant, comme par fixation des deux points, les paramètres du groupe sont soumis à cinq

<sup>17</sup> En effet, chaque transformation finie du groupe conserve la pseudodistance  $J$ , donc envoie chaque pseudosphère centrée en un point sur la pseudosphère de même pseudorayon qui est centrée au point image. Par conséquent, l'ensemble de toutes les pseudosphères se transforme en lui-même.

<sup>18</sup> — par rapport aux trois variables  $x, y, z$  —

<sup>19</sup> — d'après les équations (7) et (1') —

conditions, il en découle que le nombre de paramètres du groupe ne peut en tout cas pas être inférieur à six<sup>20</sup>.

Si les deux équations (12) n'étaient pas indépendantes l'une de l'autre relativement à  $x'_3, y'_3, z'_3$ , la seconde équation serait alors une conséquence de la première, et il en découlerait évidemment que toutes les  $s - 1$  équations (8) seraient aussi des conséquences de la première d'entre elles, aussi grand que l'on choisisse  $s$ ; on ne pourrait donc pas choisir  $s$  assez grand pour que les équations (9) soient tirées des équations (8), ou, ce qui revient au même, il en découlerait, même si  $s$  était assez grand, que tous les invariants de  $s$  points ne pourraient pas se laisser exprimer au moyen des invariants des paires de points, en contradiction avec ce qui a été dit ci-dessus. Par conséquent, nous pouvons conclure que les équations (12), relativement à  $x'_3, y'_3, z'_3$ , sont indépendantes l'une par rapport à l'autre et que le point  $x_3, y_3, z_3$  peut seulement occuper encore  $\infty^1$  positions après fixation de  $x_1, y_1, z_1$  et de  $x_2, y_2, z_2$ . En d'autres termes, les  $\infty^1$  pseudosphères de centre :  $x_2, y_2, z_2$  doivent couper les  $\infty^1$  pseudosphères de centre :  $x_1, y_1, z_1$  en les  $\infty^2$  courbes qui sont déterminées par les deux équations :

$$(13) \quad \begin{cases} J(x_1, y_1, z_1; x, y, z) = \text{const.} \\ J(x_2, y_2, z_2; x, y, z) = \text{const.}, \end{cases}$$

ou par le système simultané :

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha(x_1, y_1, z_1; x, y, z) dx + \beta dy + \gamma dz = 0 \\ \alpha(x_2, y_2, z_2; x, y, z) dx + \beta dy + \gamma dz = 0. \end{cases}$$

En particulier, on obtient que les  $\infty^1$  pseudosphères de centre :  $x_1, y_1, z_1$  ne peuvent pas être indépendantes de leur centre<sup>21</sup>, et donc qu'il y a au minimum  $\infty^2$  pseudosphères différentes<sup>22</sup>

<sup>20</sup> Fixer un point de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  absorbe au moins trois paramètres du groupe, puisqu'il est supposé transitif. Le second point  $(x_2, y_2, z_2)$  se meut alors, par l'action du sous-groupe d'isotropie fixant le premier point, sur une pseudosphère de centre  $(x_1, y_1, z_1)$ , avec deux degrés de liberté, et de manière localement transitive. Fixer ensuite ce deuxième point absorbe au moins deux paramètres supplémentaires du groupe. Enfin, une mobilité comportant au moins un dernier paramètre est encore possible sur l'intersection (généralement non vide) des deux familles de pseudosphères centrées en  $(x_1, y_1, z_1)$  et en  $(x_2, y_2, z_2)$ .

<sup>21</sup> — sinon l'intersection des deux familles de surfaces (14) ne se réduirait pas à des courbes —

<sup>22</sup> Le pseudorayon, à savoir la constante dans l'équation  $J(p_1; p) = \text{const.}$ , constitue un premier paramètre (évident) pour la famille des pseudosphères. Les équations des pseudosphères ne pouvant pas être indépendantes de leur centre  $p_1$ , elles

Enfin, si nous nous imaginons que trois points distincts :  $x_k, y_k, z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sont fixés, alors chaque autre quatrième point  $x_4, y_4, z_4$  peut encore occuper toutes les positions  $x'_4, y'_4, z'_4$  dans un certain voisinage de  $x_4, y_4, z_4$  qui satisfont les trois équations :

$$(15) \quad \begin{cases} J(x_1, y_1, z_1; x'_4, y'_4, z'_4) = J(x_1, y_1, z_1; x_4, y_4, z_4) \\ J(x_2, y_2, z_2; x'_4, y'_4, z'_4) = J(x_2, y_2, z_2; x_4, y_4, z_4) \\ J(x_3, y_3, z_3; x'_4, y'_4, z'_4) = J(x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4). \end{cases}$$

Si maintenant, parmi ces trois équations, il n'y avait que deux d'entre elles qui étaient indépendantes relativement à  $x'_4, y'_4, z'_4$ , la troisième découlant par exemple des deux premières, alors parmi les  $s - 1$  équations (8), les  $s - 3$  dernières découleraient aussi toujours des deux premières, donc les équations (9) ne pourraient jamais être tirées des équations (8), si grand que soit choisi  $s$ . Par conséquent, les équations suivantes :

$$x'_4 = x_4, \quad y'_4 = y_4, \quad z'_4 = z_4$$

doivent déjà se tirer des équations (15), ce qui veut dire qu'après fixation de trois points qui sont mutuellement en position générale, tous les points de l'espace doivent rester généralement au repos\*.<sup>23</sup>

dépendent d'au moins un paramètre supplémentaire. Au total, il y a au moins deux paramètres.

\* Entre autres choses, il découle encore de là que les équations :

$$(A) \quad J(x'_k, y'_k, z'_k; x', y', z') = J(x_k, y_k, z_k; x, y, z) \quad (k = 1, 2, 3)$$

sont résolubles par rapport à  $x', y', z'$ . Si on soumet les quantités :  $x'_k, y'_k, z'_k, x_k, y_k, z_k$  aux équations :

$$J(x'_k, y'_k, z'_k; x'_j, y'_j, z'_j) = J(x_k, y_k, z_k; x_j, y_j, z_j) \\ (k, j = 1, 2, 3, \quad k < j),$$

et si on les interprète comme des paramètres, la résolution des équations (A) par rapport à  $x', y', z'$  représentera, comme on s'en convaincra facilement, le groupe le plus général de l'espace pour lequel les deux points :  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$  possèdent l'invariant :  $J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ . Ce groupe comprend évidemment le groupe :  $X_1 f \dots X_m f$ , mais il n'est pas nécessairement continu ; néanmoins, il peut se décomposer en plusieurs familles séparées de transformations continues (voir le Chap. 18 du Tome I).

Nous voulons encore mentionner que l'on obtient les équations finies du groupe :  $X_1 f \dots X_m f$  à partir des équations (A), lorsqu'on choisit la résolution en  $x', y', z'$  qui pour :  $x'_k = x_k, y'_k = y_k, z'_k = z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) se réduit aux équations :  $x' = x, y' = y, z' = z$ .

<sup>23</sup> Ici, dans les applications, pour un groupe concret dont l'invariant  $J$  est connu explicitement en termes de fonctions algébriques ou transcendentes, il est *a priori* possible, d'après ce qui vient d'être vu, de résoudre les équations (A) par rapport à

De ceci, il résulte en premier lieu que  $m$  doit être précisément égal à six. Et il suit en second lieu que les  $\infty^2$  courbes (13) ne peuvent pas toutes être contenues dans les  $\infty^1$  pseudosphères de centre  $x_3, y_3, z_3$ , mais que chacune de ces courbes n'a en général qu'un point en commun avec chacune de ces pseudosphères<sup>24</sup>, et donc que le système simultané (14) ne peut pas être indépendant de  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ . Ainsi, on a démontré que dans  $R_3$ , il n'existe pas de famille de  $\infty^2$  courbes qui est constituée de telle sorte que dans toute pseudosphère se trouvent  $\infty^1$  courbes de cette famille. Et maintenant, comme chaque famille de  $\infty^2$  courbes qui remplit complètement  $R_3$ , est représentable<sup>25</sup>, comme famille des courbes caractéristiques de Monge d'une équation linéaire aux dérivées partielles :

$$\lambda(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \mu(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \nu(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

nous pouvons aussi dire ceci : les pseudosphères ne sont pas entièrement surfaces intégrales d'une même équation linéaire aux dérivées partielles.

---

$(x', y', z')$  comme fonctions de  $(x, y, z)$  et des 18 paramètres  $x_k, y_k, z_k, x'_k, y'_k, z'_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . En général, cela peut donner une représentation des équations *finies* du groupe, à ceci près que  $18 - 6 = 9$  paramètres sont nécessairement superflus, et que les équations finies ainsi obtenues peuvent parfois représenter une famille qui ne contient pas l'identité, par exemple si les deux « repères » formés des trois points  $(x_k, y_k, z_k)$  et des trois autres points  $(x'_k, y'_k, z'_k)$  sont disposés d'une façon spéciale. Effectivement, un groupe de Lie  $G$  peut posséder plusieurs composantes connexes, par exemple le groupe des déplacements euclidiens  $E_3(\mathbb{R}) = E^+(\mathbb{R}) \cup E^-(\mathbb{R})$ , suivant que l'orientation est préservée ou inversée. Dans le Chap. 18 du Tome I, Engel et Lie élaborent une théorie générale des groupes de transformation qui se décomposent en un nombre fini de groupes connexes ; seule la composante de l'identité est engendrée, via l'exponentielle, par des transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_m$ . Cette stratégie éventuelle : trouver les invariants possibles et en déduire les groupes possibles par le théorème des fonctions implicites, ne sera pas adoptée. En fait, Lie évite généralement d'écrire les équations finies d'un groupe concret.

<sup>24</sup> L'indépendance des deux équations (13) lorsque leurs centres sont mutuellement en position générale équivaut à ce que l'intersection des pseudosphères se réduise (en général) à une courbe. Si l'on considère une troisième pseudosphère centrée en un autre point, l'intersection triple devient, grâce à (15) et au paragraphe qui suit, un simple point, ce qui revient à dire que l'intersection de cette pseudosphère avec les  $\infty^2$  courbes d'intersection entre les deux premières familles de pseudosphères, se réduit à un point.

<sup>25</sup> Localement, toute famille régulière de courbes se redresse en la famille  $\{x = \text{const.}, y = \text{const.}\}$  des droites parallèles à l'axe des  $z$ , et ces droites sont les courbes intégrales de tout champ de vecteurs de la forme  $\nu(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$  avec  $\nu \neq 0$ .

Cette propriété des pseudosphères qui vient d'être établie permet encore de déduire une propriété importante des groupes recherchés, à savoir, elle permet de démontrer que dans aucun des groupes recherchés ne peuvent se trouver deux transformations infinitésimales qui possèdent les mêmes courbes intégrales.

En effet, s'il y avait deux transformations infinitésimales du groupe :  $X_1f \dots X_6f$ , par exemple :  $X_1f$  et  $X_2f$ , qui ont exactement les mêmes courbes intégrales, il existerait une identité de la forme :

$$X_2f \equiv \varphi(x, y, z) X_1f,$$

où  $\varphi$  n'est pas une simple constante<sup>26</sup>. Si nous formons maintenant les six équations linéaires aux dérivées partielles :

$$(16) \quad X_kf + X_k^{(1)}f = 0 \quad (k=1 \dots 6)$$

dont une solution commune :

$$J(x, y, z; x_1, y_1, z_1)$$

détermine immédiatement — étant donné une constante arbitraire — les  $\infty^1$  pseudosphères de centre  $x_1, y_1, z_1$ , alors nous remarquons que dans ces six équations sont comprises les deux suivantes :

$$\begin{aligned} X_1f + X_1^{(1)}f &= 0 \\ \varphi(x, y, z) X_1f + \varphi(x_1, y_1, z_1) X_1^{(1)}f &= 0, \end{aligned}$$

d'où suivent immédiatement<sup>27</sup> les équations :

$$X_1f = 0, \quad X_1^{(1)}f = 0.$$

Et maintenant, comme la première de ces deux équations est indépendante de  $x_1, y_1, z_1$ , il se produit que sous les hypothèses posées, toutes les pseudosphères de l'espace satisfont une même équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, ce qui, comme nous venons à l'instant de le démontrer, ne peut pas être le cas<sup>28</sup>.

Par suite, nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

<sup>26</sup> Sinon, si  $X_2 = \lambda X_1$  avec  $\lambda$  constant, l'algèbre de Lie (espace vectoriel)  $X_1, X_2, \dots, X_6$  ne serait pas de dimension six. Donc la différentielle  $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$  n'est pas identiquement nulle.

<sup>27</sup> Le déterminant  $2 \times 2$  du système, égal à  $\varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x, y, z)$ , ne s'annule pas identiquement, puisque sa différentielle par rapport aux variables  $(x, y, z)$  est non nulle.

<sup>28</sup> Par exemple, une application de cette propriété sera utilisée pour traiter, au Chap. 21, le contre-exemple (23') à une assertion de Helmholtz.

**Proposition 1.** *Si un groupe de transformations ponctuelles de  $R_3$  continu et fini est constitué de telle sorte que, relativement à son action, deux points possèdent un et un seul invariant, tandis que  $s > 2$  points n'ont pas d'invariant essentiel, alors ce groupe est transitif à six paramètres et en outre, il ne comprend jamais deux transformations infinitésimales dont les courbes intégrales coïncident; de plus, la famille des pseudosphères relatives au groupe se compose au minimum de  $\infty^2$  surfaces, et il n'y a pas dans  $R_3$  de famille doublement infinie de courbes qui produisent toutes les pseudosphères existantes.*

Avant d'aller plus loin, nous voulons encore mettre sous une forme appropriée la condition d'après laquelle deux points ont un et un seul invariant, relativement à un groupe transitif :  $X_1f \dots X_6f$  à six paramètres.

Tout d'abord, il sort de la condition susnommée que les six équations linéaires aux dérivées partielles (16) possèdent une et une seule solution commune, et donc que parmi ces équations, il doit s'en trouver exactement cinq<sup>29</sup> qui sont indépendantes les unes des autres. Par ailleurs, comme le groupe :  $X_1f \dots X_6f$  est transitif, on aura par exemple que :  $X_1f, X_2f, X_3f$  ne sont liés par aucune relation linéaire homogène, tandis que :  $X_4f, X_5f, X_6f$  se laissent exprimer de manière linéaire<sup>30</sup> et homogène au moyen de :  $X_1f, X_2f, X_3f$ , à savoir :

$$(17) \quad X_{3+k}f \equiv \sum_{1 \leq j \leq 3} \varphi_{kj}(x, y, z) X_jf \quad (k=1, 2, 3).$$

<sup>29</sup> Si l'on note  $X_k = \sum_{i=1}^3 \xi_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , pour  $k = 1, \dots, 6$ , les six équations (16) d'inconnues des fonctions  $J = J(x, y, z; x_1, y_1, z_1)$  s'écrivent

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{ki}(x, y, z) \frac{\partial J}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \xi_{ki}(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial J}{\partial x_{1i}} = 0 \quad (k=1 \dots 6).$$

L'hypothèse qu'elles possèdent une seule solution équivaut à ce que le rang générique de la matrice  $6 \times 6$  :

$$\begin{pmatrix} \xi_{11}(x, y, z) & \cdots & \xi_{13}(x, y, z) & \xi_{11}(x_1, y_1, z_1) & \cdots & \xi_{13}(x_1, y_1, z_1) \\ \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\ \xi_{61}(x, y, z) & \cdots & \xi_{63}(x, y, z) & \xi_{61}(x_1, y_1, z_1) & \cdots & \xi_{63}(x_1, y_1, z_1) \end{pmatrix}$$

soit égal à cinq. La suite des raisonnements explore cette hypothèse.

<sup>30</sup> — à coefficients *non* constants, le terme « linéaire » ne possédant pas ici le sens moderne —



En tenant compte de ces identités, nous pouvons clairement remplacer les six équations (16) par les suivantes :

$$(18) \quad \begin{cases} X_k f + X_k^{(1)} f = 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq 3} \{ \varphi_{kj}(x, y, z) X_j f + \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1) X_j^{(1)} f \} = 0 \\ (k=1, 2, 3), \end{cases}$$

ou encore, par les suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} X_k f + X_k^{(1)} f = 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq 3} \{ \varphi_{kj}(x, y, z) - \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1) \} X_j f = 0 \\ (k=1, 2, 3). \end{cases}$$

Sous les hypothèses posées, parmi les six équations (19), les trois premières sont résolubles<sup>31</sup> par rapport à  $p_1, q_1, r_1$  ; en revanche, les trois dernières sont complètement libres de  $p_1, q_1, r_1$  ; comme parmi les équations (19), il doit y en avoir exactement cinq<sup>32</sup> qui sont indépendantes les unes des autres, il est nécessaire et suffisant que les trois dernières d'entre elles, que nous pouvons aussi écrire sous la forme :

$$(20) \quad X_{3+k} f - \sum_{1 \leq j \leq 3} \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1) X_j f = 0 \quad (k=1, 2, 3),$$

se réduisent précisément à deux équations indépendantes. De là, si nous prenons en considération le fait que les trois transformations infinitésimales :

$$X_{3+k} f - \sum_{1 \leq j \leq 3} \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1) X_j f, \quad (k=1, 2, 3)$$

laissent complètement invariant<sup>33</sup> le point  $x_1, y_1, z_1$  et qu'elles peuvent s'exprimer (quand ce point est un point en position générale) comme combinaisons linéaires des transformations infinitésimales du groupe :

<sup>31</sup> Le groupe étant transitif, la matrice  $(\xi_{ki}(x_1, y_1, z_1))_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq k \leq 3}}$  formée des coefficients des trois transformations infinitésimales  $X_k^{(1)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , par rapport aux champs basiques  $p_1, q_1, r_1$ , est de déterminant non nul.

<sup>32</sup> — puisque, rappelons-le, les  $m = 6$  équations (2) doivent posséder une et une seule solution commune qui constitue le seul invariant entre deux points —

<sup>33</sup> En effet, d'après (17), au point  $(x_1, y_1, z_1)$ , ces trois transformations infinitésimales s'annulent, donc les trois groupes à un paramètre qu'elles engendrent via l'exponentielle laissent fixe le point  $(x_1, y_1, z_1)$ .

$X_1 f \dots X_6 f$  fixant le point en question (voir<sup>34</sup> Tome I, p. 203, Proposition 7), nous obtenons la :

**Proposition 2.** *Soit :  $X_1 f \dots X_6 f$  un groupe à six paramètres de  $R_3$  et soit :*

$$Y_k f = \alpha_k(x, y, z) p + \beta_k(x, y, z) q + \gamma_k(x, y, z) r$$

( $k = 1, 2, 3$ )

*trois transformations infinitésimales quelconques du groupe qui laissent invariant un point en position générale. Alors, relativement au groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$ , deux points possèdent toujours un et un seul invariant lorsque, et seulement lorsque, le déterminant :*

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

<sup>34</sup> D'après cette proposition générale qui repose seulement sur des considérations d'algèbre linéaire, si  $X_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $k = 1, \dots, m$  sont  $m$  transformations infinitésimales indépendantes d'un groupe fini continu quelconque à  $m$  paramètres, et si  $q$  désigne le rang générique de la matrice  $(\xi_{ki}(x))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}$  formée de leurs coefficients, alors localement au voisinage d'un point en position générale et après renumérotation éventuelle des  $X_k$  :

- les  $q$  premières transformations infinitésimales  $X_1, \dots, X_q$  ne sont liées par aucune relation de la forme :

$$\chi_1(x_1, \dots, x_n) \cdot X_1 + \dots + \chi_q(x_1, \dots, x_n) \cdot X_q \equiv 0;$$

- les  $m - q$  transformations infinitésimales restantes  $X_{q+1}, \dots, X_m$  s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients fonctionnels de  $X_1, \dots, X_q$  :

$$X_{q+j} \equiv \sum_{k=1}^q \varphi_{jk}(x_1, \dots, x_n) \cdot X_k \quad (j = 1 \dots m - q);$$

- la sous-algèbre de Lie constituée des transformations infinitésimales qui s'annulent en un point fixé  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  est précisément de dimension  $m - q$  et elle est engendrée par les  $m - q$  transformations explicites :

$$X_{q+j} - \sum_{k=1}^q \varphi_{jk}(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot X_k \quad (j = 1 \dots m - q).$$

Appliquée ici avec  $n = 3$ ,  $m = 6$  et  $q = 3$ , cette proposition donne les  $m - q = 3$  transformations infinitésimales  $X_{3+k} - \sum_{1 \leq j \leq 3} \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1) X_j$ ,  $k = 1, 2, 3$  indépendantes s'annulant au point  $(x_1, y_1, z_1)$  et dont la matrice  $3 \times 3$  des coefficients possède un rang générique égal à 2. Cette propriété se transmet donc à tout système  $Y_1, Y_2, Y_3$  de trois transformations infinitésimales indépendantes du groupe qui s'annulent en  $(x_1, y_1, z_1)$  : c'est la Proposition 2.

*s'annule identiquement, sans que tous ses sous-déterminants d'ordre deux s'annulent*<sup>35</sup>.

En utilisant le critère qui est contenu dans cette proposition, nous pouvons maintenant déduire encore une autre propriété importante des groupes recherchés ; toutefois, cette propriété n'est possédée que par ceux de ces groupes qui sont imprimitifs.

Étant donné un groupe imprimitif à six paramètres ayant la constitution demandée, il peut donc arriver que ce groupe laisse invariante une famille de  $\infty^1$  surfaces :  $\omega(x, y, z) = \text{const.}$  Si ce cas se produit, nous pouvons toujours nous imaginer que les variables  $x, y, z$  sont choisies de telle sorte que la famille de surfaces invariantes est représentée par l'équation :  $x = \text{const.}$  ; le groupe en question est ensuite de la forme<sup>36</sup> :

$$X_k f = \xi_k(x) p + \eta_k(x, y, z) q + \zeta_k(x, y, z) r \quad (k=1 \dots 6),$$

où  $\xi_1 \dots \xi_6$  ne s'annulent de toute façon pas tous, parce que sinon, le groupe serait intransitif<sup>37</sup>.

En principe [*an und für sich*], trois cas seulement sont *a priori* imaginables : en effet, d'après<sup>38</sup> le Théorème 1, p. 6, le groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$  peut transformer les surfaces :  $x = \text{const.}$  de une, deux ou trois manières différentes [*dreigliedrig transformieren*] ; nous allons cependant démontrer ici que seul le troisième cas se produit.

Si les surfaces :  $x = \text{const.}$  se transformaient seulement d'une manière, on pourrait, d'après le théorème cité à l'instant choisir la variable  $x$  de telle manière que chaque  $\xi_k(x) p$  prenne la forme :  $a_k p$ . Si l'on avait maintenant par exemple  $a_1 \neq 0$ , on pourrait introduire comme

<sup>35</sup> Intuitivement, le sous-groupe à trois paramètres  $Y_1, Y_2, Y_3$  qui fixe un point donné déplace encore transitivement tous les autres points sur la pseudosphère à laquelle ils appartiennent. Ces pseudosphères représentent donc les seules familles de sous-variétés invariantes par l'action du sous-groupe  $Y_1, Y_2, Y_3$ , et par conséquent, puisqu'elles sont de codimension 1, d'après une propriété générale, le rang générique de la matrice  $3 \times 3$  des coefficients de  $Y_1, Y_2, Y_3$  doit être égal à  $3 - 1 = 2$ .

<sup>36</sup> Le groupe stabilise les hyperplans  $\{x = \text{const.}\}$  si et seulement si le coefficient  $\xi_k$  de  $p$  dans chaque  $X_k$  ne dépend que de  $x$ .

<sup>37</sup> Si tous les  $\xi_k(x)$  étaient identiquement nuls, la direction  $p$  manquerait.

<sup>38</sup> Ce théorème, le premier du Tome III, énonce que tout groupe de transformations continu fini de la droite des  $x$  est de dimension  $\leq 3$ , et est équivalent soit à  $\partial_x$  (groupe des translations), soit à  $\partial_x, x \partial_x$  (groupe affine), soit à  $\partial_x, x \partial_x, x^2 \partial_x$  (groupe projectif).

nouveau  $y$  et nouveau  $z$  les deux solutions indépendantes de l'équation<sup>39</sup> :  $X_1 f = 0$ , et rapporter par cette opération le groupe à la forme :

$$X_1 f = p, \quad X_k f = \eta_k(x, y, z) q + \zeta_k(x, y, z) r \\ (k=2 \dots 6).$$

Mais alors l'invariant des deux points :  $x, y, z$  et  $x_1, y_1, z_1$  serait nécessairement de la forme :  $x - x_1$ , donc les pseudosphères de centre  $x_1, y_1, z_1$  seraient représentées par :  $x - x_1 = \text{const.}$ , ou plus simplement par :  $x = \text{const.}$ , c'est-à-dire qu'il y aurait en général seulement  $\infty^1$  pseudosphères distinctes, ce qui est exclu d'après ce qui précède.

Si d'autre part les surfaces :  $x = \text{const.}$  se transformaient de deux manières différentes, nous pourrions, d'après le Théorème 1, p. 6, par un choix approprié de  $x$ , rapporter le groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$  à la forme :

$$X_1 f = p + \eta_1(x, y, z) q + \zeta_1(x, y, z) r \\ X_2 f = xp + \eta_2(x, y, z) q + \zeta_2(x, y, z) r \\ X_k f = \eta_k(x, y, z) q + \zeta_k(x, y, z) r \\ (k=3 \dots 6),$$

et par conséquent, un point  $x_1, y_1, z_1$  fixé en position générale admettrait trois transformations infinitésimales de la forme<sup>40</sup> :

$$Y_1 f = (x - x_1) p + \bar{\eta}_1 q + \bar{\zeta}_1 r \\ Y_2 f = \bar{\eta}_2 q + \bar{\zeta}_2 r \\ Y_3 f = \bar{\eta}_3 q + \bar{\zeta}_3 r,$$

<sup>39</sup> Le changement de coordonnées est alors de la forme :

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y, z), \quad \bar{z} = \bar{z}(x, y, z),$$

et il induit la transformations suivante sur les transformations infinitésimales basiques :

$$p = \bar{p} + \bar{y}_x \bar{q} + \bar{y}_x \bar{r}, \quad q = \bar{y}_y \bar{q} + \bar{z}_y \bar{r}, \quad r = \bar{y}_z \bar{q} + \bar{z}_z \bar{r},$$

ce qui ne change rien au fait que les autres transformations infinitésimales  $X_2, \dots, X_6$  n'incorporent pas  $p$  : les nouvelles transformations  $\bar{X}_2, \dots, \bar{X}_6$  n'incorporent pas  $\bar{p}$ .

<sup>40</sup> La transformation  $Y_1 := X_2 - x_1 X_1$  s'annule au point  $p_1$ . Les quatre transformations restantes  $X_3, X_4, X_5, X_6$  n'incorporant que  $q$  et  $r$ , il existe deux combinaisons linéaires indépendantes à coefficients constants  $Y_2$  et  $Y_3$  qui s'annulent aussi en  $p_1$ .

et le déterminant correspondant :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & \bar{\eta}_1 & \bar{\zeta}_1 \\ 0 & \bar{\eta}_2 & \bar{\zeta}_2 \\ 0 & \bar{\eta}_3 & \bar{\zeta}_3 \end{vmatrix} = (x - x_1) \begin{vmatrix} \bar{\eta}_2 & \bar{\zeta}_2 \\ \bar{\eta}_3 & \bar{\zeta}_3 \end{vmatrix}$$

devrait, d'après la Proposition 2, s'annuler identiquement. Mais alors les deux transformations infinitésimales  $Y_2f$  et  $Y_3f$  seraient liées par une identité de la forme :

$$Y_3f \equiv \omega(x, y, z) Y_2f$$

et possèderaient par suite des courbes intégrales en commun, ce qui est exclu d'après la Proposition 1.

Ainsi, on a démontré que les surfaces invariantes  $x = \text{const.}$  doivent être transformées par l'action d'un groupe à trois paramètres :

**Proposition 3.** *Si, relativement à un groupe à six paramètres de  $R_3$ , deux points possèdent un et un seul invariant, tandis que  $s > 2$  points n'ont pas d'invariant essentiel, alors le groupe transforme de trois manières différentes chaque famille de  $\infty^1$  surfaces qu'il laisse éventuellement invariantes.*

Nous allons maintenant déterminer tous les groupes transitifs à six paramètres de  $R_3$  qui possèdent certaines propriétés énoncées dans les Propositions 1 et 3, donc pour nous exprimer de manière plus précise : nous cherchons maintenant tous les groupes transitifs :  $X_1f \dots X_6f$  de  $R_3$  à six paramètres tels que :

premièrement deux points ont un et un seul invariant ; tels que deuxièmement deux transformations infinitésimales indépendantes n'ont jamais les mêmes courbes intégrales et tels que troisièmement chaque famille invariante éventuelle de  $\infty^1$  surfaces est transformée de trois manières différentes.

Afin de résoudre complètement le problème posé auparavant, p. 166, nous devons encore décider au final, quant à chacun des groupes qui se présentera, si  $s > 2$  points ont un invariant essentiel ou non, car alors, seuls les groupes pour lesquels  $s > 2$  points n'ont pas d'invariant essentiel seront intéressants pour nous. La décision à ce sujet sera essentiellement facilitée par la proposition suivante.

**Proposition 4.** *Si, relativement à un groupe transitif à six paramètres :  $X_1f \dots X_6f$  de  $R_3$ , deux points  $x, y, z$  et  $x_1, y_1, z_1$  possèdent un et un seul invariant :  $J(x, y, z; x_1, y_1, z_1)$ , alors  $s > 2$  points n'ont*

*aucun invariant essentiel si et seulement si : premièrement, au minimum  $\infty^2$  pseudosphères différentes appartiennent au groupe ; et deuxièmement, il n'existe pas de famille de  $\infty^2$  courbes qui sont invariantes<sup>41</sup> par le groupe et au moyen desquelles sont produites toutes les pseudosphères existantes.*

On se convainc sans difficulté de la justesse de cette proposition. En effet, la Proposition 1 p. 176 montre immédiatement que dans la Proposition 4, les conditions indiquées sont nécessaires ; qu'elles soient aussi suffisantes, on peut s'en rendre compte comme suit.

Comme deux points doivent posséder un et un seul invariant essentiel et comme il doit y avoir au minimum  $\infty^2$  pseudosphères différentes, il est clair que deux pseudosphères, dont les centres :  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  sont mutuellement en position générale, n'ont en général qu'une seule courbe en commun, et donc que les deux fonctions :

$$J(x_1, y_1, z_1; x_3, y_3, z_3), \quad J(x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3),$$

que nous voulons écrire en abrégé  $J_{1,3}$  et  $J_{2,3}$ , sont indépendantes l'une de l'autre relativement à  $x_3, y_3, z_3$ . De là il suit manifestement que les trois fonctions :  $J_{1,2}, J_{1,3}, J_{2,3}$  sont des solutions indépendantes des équations :

$$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + X_k^{(3)} f = 0 \quad (k = 1 \dots 6);$$

mais comme, sous les hypothèses posées, ces équations sont très certainement résolubles par rapport à six des neuf quotients différentiels  $p_\nu, q_\nu, r_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ), en conséquence de quoi elles n'ont que trois solutions communes indépendantes, on a donc démontré que, sous les hypothèses posées, tous les invariants de trois points se laissent exprimer au moyen des invariants des paires de points, et donc que trois points n'ont pas d'invariant essentiel.

Par ailleurs, si trois pseudosphères dont les centres :  $x_\nu, y_\nu, z_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) sont mutuellement en position générale ne s'intersectaient pas toujours en un seul point, mais possédaient toujours une courbe entière en commun, alors les pseudosphères centrées en deux points quelconques parmi ces points détermineraient une famille de  $\infty^2$  courbes qui serait constituée de telle sorte que sur chaque pseudosphère seraient disposées  $\infty^1$  courbes de la famille ; et maintenant, comme cette

<sup>41</sup> Dans la Proposition 1, les familles de  $\infty^2$  courbes exclues n'étaient pas forcément invariantes par l'action du groupe. Mais les deux énoncés sont en fait équivalents, parce que les pseudosphères elles-mêmes et les familles de leurs courbes d'intersection deux à deux sont évidemment invariantes par le groupe.

famille de courbes serait évidemment indépendante de la position de ces trois points-là, elle resterait également invariante par le groupe :  $X_1f \dots X_6f$ , puisque la famille de toutes les pseudosphères est elle-même invariante (cf. p. 171), alors que dans notre proposition, l'existence d'une telle famille de courbes invariantes est cependant expressément exclue. Ainsi, on a démontré que trois pseudosphères ayant trois centres distincts n'ont en général qu'un seul point en commun. Si l'on entend maintenant par  $x_4, y_4, z_4$  un quatrième point quelconque en position générale, les trois fonctions :  $J_{1,4}, J_{2,4}, J_{3,4}$  seront très certainement indépendantes l'une de l'autre relativement à  $x_4, y_4, z_4$ . Si de surcroît, on tient compte du fait que quatre points ont précisément six invariants indépendants relativement au groupe :  $X_1f \dots X_6f$ , et aussi du fait que :  $J_{1,2}, J_{1,3}, J_{2,3}, J_{1,4}, J_{2,4}, J_{3,4}$  constituent déjà six invariants tels, on obtient que, sous les hypothèses posées, quatre points n'ont pas non plus d'invariant essentiel. Enfin, il est désormais tout aussi immédiatement clair que  $s > 4$  points sont dépourvus d'invariant essentiel ; notre proposition est donc complètement démontrée.

Maintenant, nous allons tout d'abord déterminer tous les groupes primitifs qui possèdent les propriétés énoncées p. 181 et ensuite, nous déterminerons ceux qui sont imprimitifs.

### § 86.

#### Groupes primitifs parmi les groupes recherchés.

Parmi les groupes primitifs à six paramètres de  $R_3$ , il n'y a après tout que deux types<sup>1</sup> (voir Théorème 9, p. 139), lesquels sont représentés premièrement par le groupe :

$$(22) \quad \boxed{p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp - xr}$$

des mouvements euclidiens, et deuxièmement par le groupe projectif à six paramètres :

$$(23) \quad \boxed{\begin{array}{l} p + xU, q + yU, r + zU \\ xq - yp, yr - zq, zp - xr \end{array}}$$

de la surface du second degré :  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ , où, comme à l'accoutumée, on écrit  $U$  pour  $xp + yq + zr$ .

<sup>1</sup> La référence concerne le Théorème 9 du Volume III qui classe tous les groupes continus finis de transformations holomorphes locaux sur un espace à trois dimensions qui sont primitifs.

Comme on le sait, relativement au groupe (22), deux points possèdent un et un seul invariant, à savoir notre distance au sens usuel :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Il en va de même pour le groupe (23), et pour préciser, l'invariant en question :

$$\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + [x_1 y_2 - y_1 x_2]^2 + [y_1 z_2 - z_1 y_2]^2 + [z_1 x_2 - x_1 z_2]^2}{\{1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\}^2}$$

constitue, comme on le sait, le birapport entre  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$  et les deux points que la droite de liaison [*Verbindungslinie*] entre  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  découpent sur la surface invariante du second degré.

En outre, il est déjà connu depuis longtemps que pour ces deux groupes, les invariants de plusieurs points quelconques peuvent s'exprimer au moyen des invariants des paires de points, et donc que  $s > 2$  points n'ont pas d'invariant essentiel ; si on ne connaissait pas encore cette propriété, on pourrait la conclure immédiatement de la Proposition 4, p. 181, puisque, premièrement : pour chacun de ces deux groupes, deux points possèdent un et un seul invariant et deuxièmement : étant primitifs, ces deux groupes ne laissent invariante absolument aucune famille de  $\infty^2$  courbes.

Le cas des groupes primitifs est ainsi achevé ; nous voulons seulement mentionner encore que pour chacun des deux groupes trouvés, une équation du second degré :

$$\alpha_{11} dx^2 + \alpha_{22} dy^2 + \alpha_{33} dz^2 + 2\alpha_{12} dx dy + 2\alpha_{23} dy dz + 2\alpha_{31} dz dx,$$

dont le déterminant ne s'annule pas identiquement, reste invariante, et que les  $\infty^2$  directions passant par un point fixé en position générale sont transformées par une action à trois paramètres<sup>2</sup>.

### § 87.

#### Groupes imprimitifs parmi les groupes recherchés.

Tous les groupes concernés sont transitifs à six paramètres. Maintenant, si l'on fixe un point en position générale par rapport à l'action d'un groupe transitif à six paramètres, la variété à deux dimensions des  $\infty^2$  éléments linéaires passant par ce point sera transformée par

<sup>2</sup> Pour chacun des deux groupes (22) et (23), l'origine 0 est un point de position générale, puisqu'ils sont tous deux transitifs. Les trois transformations infinitésimales  $xq - yp$ ,  $yr - zq$  et  $zp - xr$  qu'ils possèdent en commun s'annulent en 0 et elles engendrent le groupe complet des rotations (complexes ou réelles) autour de 0, qui est évidemment transitif sur le plan projectif des  $\infty^2$  éléments linéaires passant par 0.



un groupe projectif qui comporte au plus trois paramètres. Par ailleurs, nous savons d'après l'énumération de tous les groupes projectifs du plan (p. 106 sq.) que chaque groupe projectif du plan qui ne comporte pas plus de trois paramètres, soit laisse un point invariant, soit se compose des  $\infty^3$  transformations projectives qui laissent invariante une quadrique non dégénérée. Nous pouvons conclure de là que pour les groupes transitifs de  $R_3$  à six paramètres, seulement deux cas peuvent se produire : ou bien, après fixation d'un point en position générale, il existe un élément linéaire traversant ce point qui reste en même temps fixé, ou bien il existe une quadrique non dégénérée qui est invariante et les  $\infty^2$  éléments linéaires traversant ce point se transforment de trois manières différentes.

Ce dernier cas ne peut pas se produire ici, parce que les groupes à six paramètres en question seraient alors primitifs<sup>3</sup> (cf. p. 123 sq.), et par conséquent, chaque groupe possédant la constitution ici exigée doit laisser invariant un système simultané :

$$\frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)}$$

ou, ce qui revient au même, une famille de  $\infty^2$  courbes :

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const.}$$

Si nous choisissons alors les coordonnées  $x, y, z$  de telle sorte que la famille invariante de courbes reçoive la forme :  $x = \text{const.}, y = \text{const.}$ , alors tous les groupes recherchés sont de la forme :

$$X_k f = \xi_k(x, y) p + \eta_k(x, y) q + \zeta_k(x, y, z) r$$

( $k=1 \dots 6$ ).

D'après le Tome 1, p. 307, Proposition 4, les six transformations infinitésimales réduites :

$$\bar{X}_k f = \xi_k(x, y) p + \eta_k(x, y) q \quad (k=1 \dots 6)$$

---

<sup>3</sup> Déjà étudiés et traités il y a un instant au § 86.

produisent un groupe dans l'espace des deux variables  $x, y$  qui est isomorphe-holoédrique, ou isomorphe-méroédrique<sup>4</sup>  $X_1 f \dots X_6 f$ . Nous voulons tout d'abord considérer ce groupe réduit.

Si le groupe réduit comportait moins de cinq paramètres, le groupe  $X_1 f \dots X_6 f$  comprendrait deux transformations infinitésimales de la forme :

$$\omega_1(x, y, z) r, \quad \omega_2(x, y, z) r,$$

donc il comprendrait deux transformations infinitésimales ayant les mêmes courbes intégrales, ce qui, d'après la Proposition 1, p. 176, n'est pas possible, et par conséquent, le groupe réduit :  $\bar{X}_1 f \dots \bar{X}_6 f$  doit comporter soit cinq, soit six paramètres. Ainsi, il faut seulement se demander encore quelles sont les formes différentes que le groupe réduit peut prendre.

Si le groupe :  $\bar{X}_1 f \dots \bar{X}_6 f$  dans l'espace des deux variables  $x, y$  est primitif, alors, par un choix approprié de  $x$  et de  $y$ , il peut toujours, d'après la page 71 recevoir l'une des deux formes<sup>5</sup> :

$$(24) \quad \begin{cases} p, & q, & xq, & xp - yq, & yp, & xp + yq \\ p, & q, & xq, & xp - yq, & yp. \end{cases}$$

D'un autre côté, si le groupe :  $\bar{X}_1 f \dots \bar{X}_6 f$  est imprimitif, il laisse alors invariante, lorsqu'on l'interprète comme groupe du plan  $x, y$ , au moins une famille de  $\infty^1$  courbes :  $\varphi(x, y) = \text{const.}$ , mais ensuite alors, dans l'espace des  $x, y, z$ , l'équation  $\varphi(x, y) = \text{const.}$  représente évidemment une famille de  $\infty^1$  surfaces qui reste invariante<sup>6</sup> par le groupe :

<sup>4</sup> Un espace vectoriel  $F$  de transformations infinitésimales est dit *isomorphe-holoédrique* [*holoedrisch isomorph*] à un autre espace vectoriel  $E$  de transformations infinitésimales lorsqu'il existe une application linéaire respectant les crochets (et naturelle en un certain sens) *bijective* de  $E$  dans  $F$ . Si l'application (naturelle) de  $E$  dans  $F$  est seulement surjective, mais pas bijective,  $F$  est dit *isomorphe-méroédrique* [*meroedrisch isomorph*] à  $E$ , ou *isomorphe* [*isomorph*] (tout court) à  $E$ . Ici, l'application naturelle de « projection » qui, à chaque transformation infinitésimale  $X_k$ , associe sa réduite  $\bar{X}_k$  respecte les crochets, car  $[\bar{X}_j, \bar{X}_k] = \sum_{l=1}^6 c_{jkl} \bar{X}_l$  découle en effet de de  $[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^6 c_{jkl} X_l$  (avec les mêmes constantes de structure), mais elle n'est pas forcément injective.

<sup>5</sup> La référence concerne le Théorème 6 du Volume III qui classe tous les groupes continus finis de transformations holomorphes locaux sur un espace à deux dimensions. Le premier est le groupe affine ; le second est le groupe spécial affine.

<sup>6</sup> Analytiquement, les surfaces  $\varphi(x, y) = \text{const.}$  sont invariantes par le groupe  $\bar{X}_k$ ,  $k = 1, \dots, 6$  si et seulement si  $\bar{X}_k(\varphi)$  s'exprime comme une certaine fonction  $\omega_k(\varphi)$  de la même fonction  $\varphi$ , pour tout  $k = 1, \dots, 6$ . Puisque  $\varphi$  est indépendant de  $z$ , il est alors évident qu'on a de même  $X_k(\varphi) = \bar{X}_k(\varphi) = \omega_k(\varphi)$ ,

$X_1f \dots X_6f$ . Maintenant, comme d'après la Proposition 3, p. 181 le groupe :  $X_1f \dots X_6f$  doit transformer de trois manières différentes [dreigliedrig transformiren] toute famille de  $\infty^1$  surfaces qu'il laisse invariante, il s'ensuit que le groupe réduit :  $\overline{X}_1f \dots \overline{X}_6f$ , interprété comme groupe du plan des  $x, y$ , transforme de trois manières différentes toute famille de  $\infty^1$  courbes qu'il laisse invariante. Mais parmi les groupes imprimitifs du plan à cinq ou à six paramètres, il n'y en a proportionnellement qu'un petit nombre qui satisfont à cette exigence, comme le montre le Tableau p. 71 sq.<sup>7</sup>, et pour préciser, par un choix approprié de  $x$  et de  $y$ , ceux qui ont six paramètres peuvent être rapportés à l'une des trois formes :

$$(25) \quad \begin{cases} q, xq, yq, p, xp, x^2p + xyq \\ q, xq, x^2q, p, xp + yq, x^2p + 2xyp \\ q, yq, y^2q, p, xp, x^2p, \end{cases}$$

et ceux qui ont cinq paramètres à la forme :

$$(26) \quad q, xq, p, 2xp + yq, x^2p + xyq.$$

Ainsi, nous avons trouvé toutes les formes possibles du groupe réduit :  $\overline{X}_1f \dots \overline{X}_6f$  et nous avons seulement à déterminer encore, pour chacun de ces groupes réduits, quels sont les groupes à six paramètres :  $X_1f \dots X_6f$  en les trois variables  $x, y, z$  qui produisent de tels groupes réduits. Avec cela, nous devons naturellement tenir compte du fait que le groupe :  $X_1f \dots X_6f$  ne doit pas comporter deux transformations infinitésimales ayant les mêmes courbes intégrales. Quand nous aurons déterminé les différentes formes du groupe :  $X_1f \dots X_6f$  qui satisfait cette dernière condition, nous devons finalement examiner encore, pour chacun des groupes trouvés, si deux points possèdent un invariant, et si  $s > 2$  points n'ont aucun invariant essentiel.

Nous supposerons en premier lieu que le groupe réduit :  $\overline{X}_1f \dots \overline{X}_6f$  a six<sup>8</sup> paramètres, et ensuite, nous supposerons qu'il en a cinq<sup>9</sup>.

$k = 1, \dots, 6$ . Géométriquement, la famille des surfaces réglées formées au-dessus des courbes  $\varphi(x, y) = \text{const.}$  par ajout en chaque point d'une droite parallèle à l'axe des  $z$  reste invariante par les  $X_k$ , puisqu'ils se déduisent des  $\overline{X}_k$  par simple ajout d'une transformation  $\zeta \partial_z$  parallèle à l'axe des  $z$ .

<sup>7</sup> À nouveau, il s'agit du Théorème 6.

<sup>8</sup> Il s'agit des quatre groupes réduits  $(24)_1$  et  $(25)_1, (25)_2, (25)_3$ .

<sup>9</sup> Il s'agit des deux groupes réduits  $(24)_2$  et  $(26)$ .

### A) Détermination de tous les groupes dont le groupe réduit possède six paramètres

Comme nous venons de le voir, si le groupe réduit :  $\overline{X}_1 f \dots \overline{X}_6 f$  a six paramètres, il peut être rapporté à l'une des quatre formes suivantes<sup>10</sup> :

- (I)  $p, q, xq, xp + yq, xp - yq, yp$
- (II)  $p, q, xq, xp + yq, xp - yq, x^2p + xyp$
- (III)  $p, q, xq, xp + yq, x^2q, x^2p + 2xyp$
- (IV)  $p, q, xp, yq, x^2p, y^2q$ .

Nous devons donc examiner ces quatre cas l'un après l'autre.

#### Premier cas

En premier lieu, nous recherchons tous les groupes à six paramètres dans l'espace des  $x, y, z$  qui satisfont nos exigences formulées à la page 181 et dont les groupes réduits sont de la forme (I). Chacun de ces groupes est de la forme :

$$(27) \quad \begin{cases} p + \varphi_1 r, & q + \varphi_2 r, & xq + \varphi_3 r, & xp + yq + \varphi_4 r \\ & xp - yq + \varphi_5 r, & yp + \varphi_6 r, & \end{cases}$$

où l'on entend par  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  des fonctions de  $x, y, z$ . Ainsi, nous devons maintenant déterminer les fonctions  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  de la manière la plus générale possible pour que les transformations infinitésimales (27) constituent un groupe à six paramètres qui satisfont nos exigences formulées page 181, et nous pouvons encore choisir la variable  $z$  d'une manière telle que la forme des fonctions  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  soit la plus simple possible.

On peut supposer depuis le début qu'à la place de  $z$ , on a introduit une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_1(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

qui n'est pas indépendante de  $z$  ; grâce à ce choix, la transformation infinitésimale  $p + \varphi_1 r$  prend la forme simple :  $p$ , tandis que la forme

<sup>10</sup> Pour étudier le groupe (II), qui correspond exactement à (25)<sub>1</sub>, on remplace les deux générateurs infinitésimaux  $xp$  et  $yq$  par  $xp - yq$  et  $xp + yq$ . Ces quatre générateurs du groupe réduit  $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_6$ , lorsqu'il possède six paramètres, sont réécrits dans un autre ordre, adaptés à l'avance aux calculs de réduction et de normalisation du groupe  $X_1, \dots, X_6$  qui vont suivre.

des autres transformations n'est pas essentiellement modifiée<sup>11</sup>. Nous pouvons donc supposer désormais que  $\varphi_1$  est simplement nul.

À présent, il s'ensuit<sup>12</sup> :

$$[p, q + \varphi_2 r] = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} r.$$

Mais comme notre groupe ne renferme pas de transformation infinitésimale de la forme<sup>13</sup> :  $\psi(x, y, z) r$ , le coefficient  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$  en facteur devant  $r$  doit s'annuler identiquement, c'est-à-dire que  $\varphi_2$  doit être libre de  $x$ . Si de plus nous introduisons :  $z_1 = \omega(y, z)$  comme nouvelle variable,  $p$  conserve sa forme<sup>14</sup> tandis que la seconde transformation infinitésimale devient :

$$q + \varphi_2(y, z) r = q + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \cdot r_1.$$

Si nous choisissons  $\omega$  de telle sorte que l'équation :  $\omega_y + \varphi_2 \omega_z = 0$  est satisfaite, alors les deux premières transformations infinitésimales de notre groupe reçoivent la forme :

$$p, q.$$

Afin de déterminer  $\varphi_3$ , calculons les crochets :

$$\begin{aligned} [p, xq + \varphi_3 r] &= q + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} r \\ [q, xq + \varphi_3 r] &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} r, \end{aligned}$$

qui montrent que  $\varphi_3$  dépend seulement de  $z$  ; mais par ailleurs,  $\varphi_3$  ne peut pas non plus s'annuler, parce que sinon, notre groupe comprendrait deux transformations infinitésimales :  $q$  et  $xq$ , dont les courbes intégrales coïncident, or ce cas est exclu, d'après la page 181. Nous pouvons donc introduire comme nouvelle coordonnée  $z$  une fonction

<sup>11</sup> En fait, tout changement de coordonnées locales de la forme  $\bar{x} = x, \bar{y} = y$  et  $\bar{z} = \bar{z}(x, y, z)$  où la fonction  $\bar{z}$ , quelconque, est seulement supposée satisfaire la condition  $\bar{z}_z \neq 0$  assurant qu'il s'agit d'un difféomorphisme local, a la propriété de laisser inchangés les parties en  $p$  et en  $q$  de chacune des six transformations infinitésimales du groupe. Par exemple,  $xp + yq + \varphi_4 r$  se transforme en  $\bar{x}\bar{p} + \bar{y}\bar{q} + (\varphi_4 \bar{z}_z + x\bar{z}_x + y\bar{z}_y)\bar{r}$ . Ce phénomène est bien sûr général et sera utilisé dans d'autres contextes.

<sup>12</sup> La plupart du temps, le « crochet » n'est pas nommé par Engel et Lie et il est toujours noté au moyen de parenthèses.

<sup>13</sup> — puisque le groupe réduit  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_6$  est de dimension six, ou parce qu'on s'en convainc aisément par un examen des six générateurs (27) —

<sup>14</sup> — tandis que les quatre transformations infinitésimales restantes conservent elles aussi essentiellement leur forme —

de  $z$  qui rend  $\varphi_3 = 1$ , et comme cela n'a pas d'influence sur  $p$  et sur  $q$ , il en découle que les trois premières transformations infinitésimales de notre groupe se présentent maintenant sous la forme :

$$p, \quad q, \quad xq + r.$$

En calculant les crochets de :  $xp + yq + \varphi_4 r$  avec  $p$  et  $q$ , on vérifie, exactement comme pour  $\varphi_3$ , que  $\varphi_4$  dépend seulement de  $z$  ; mais comme par ailleurs on obtient aussi<sup>15</sup> :

$$[xq + r, xp + yq + \varphi_4(z)r] = \varphi_4'(z)r,$$

il s'ensuit que  $\varphi_4'(z) = 0$ , d'où  $\varphi_4(z) = c$ , de telle sorte que nous obtenons la transformation infinitésimale :

$$xp + yq + cr.$$

Exactement comme pour  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$ , on vérifie aussi que  $\varphi_5$  ne dépend que de  $z$  ; de plus, nous obtenons :

$$[xq + r, xp - yq + \varphi_5(z)r] = -2xq + \varphi_5'(z)r,$$

et donc<sup>16</sup> :  $\varphi_5'(z) = -2$ , c'est-à-dire :  $\varphi_5(z) = -2z + \text{const.}$  Mais en introduisant une nouvelle coordonnée  $z$ , on peut annuler la constante d'intégration, sans modifier la forme des précédentes<sup>17</sup> transformations infinitésimales. Ensuite, en calculant le crochet :

$$[xp + yq + cr, xp - yq - 2zr] = -2cr$$

<sup>15</sup> Il sera maintenant fréquemment sous-entendu que les crochets  $[X_j, X_k]$  calculés par la suite doivent, d'après l'hypothèse que  $X_1, \dots, X_6$  forment une algèbre de Lie, s'exprimer comme certaines combinaisons linéaires  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_6 X_6$  à coefficients constants de  $X_1, \dots, X_6$  eux-mêmes. Dans la plupart des cas, en inspectant la partie en  $p$  et en  $q$  de chaque  $X_k$ , on voit d'un seul coup d'œil les seules constantes  $\lambda_k$  possibles qui peuvent apparaître, sans avoir à résoudre un système linéaire. Une fois que ces constantes sont déterminées, on en déduit une condition intéressante sur les fonctions inconnues  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ . Par exemple, lorsque le crochet calculé est de la forme  $\psi r$ , nécessairement toutes les constantes  $\lambda_k$  sont nulles, donc  $\psi \equiv 0$ , et cela donne une équation différentielle sur les inconnues  $\varphi_k$ . Engel et Lie organisent les calculs de telle sorte que la détermination et la normalisation de ces fonctions s'effectuent de manière progressive et graduelle.

<sup>16</sup> Ce crochet doit être combinaison linéaire des six transformations infinitésimales (27), dont les quatre premières :  $p, q, xq + r$  et  $xp + yq + cr$  ont déjà été normalisées. Puisque le membre de droite du crochet calculé contient seulement le terme  $-2xq$  en  $p$  et en  $q$ , la combinaison linéaire en question ne peut être que :  $-2(xq + r)$ , d'où  $\varphi_5'(z)r = -2r$ .

<sup>17</sup> Les quatre premières transformations infinitésimales déjà normalisées sont de la forme  $\xi p + \zeta q$ , sans terme en  $\zeta r$ , et elles restent invariables par tout changement de coordonnées de la forme  $\bar{x} = x, \bar{y} = y, \bar{z} = \bar{z}(x, y, z)$ .

on obtient que la constante  $c$  doit aussi s'annuler.

Finalement, pour déterminer encore  $\varphi_6$  — qui ne dépend naturellement que de  $z$  —, formons les crochets :

$$\begin{aligned} [xq + r, yp + \varphi_6(z)r] &= xp - yq + \varphi_6'(z)r \\ [xp - yq - 2zr, yp + \varphi_6(z)r] &= -2yp - 2\{z\varphi_6'(z) - \varphi_6(z)\}r, \end{aligned}$$

d'où il découle :

$$\varphi_6'(z) = -2z, \quad z\varphi_6'(z) = 2\varphi_6(z) = -2z^2.$$

Par conséquent, nous trouvons que les transformations infinitésimales de notre groupe peuvent recevoir la forme simple :

$$(28) \quad \begin{cases} p, & q, & xq + r, & yq + zr, & xp - zr \\ & & yp - z^2r. \end{cases}$$

Accessoirement, on peut remarquer que ce groupe apparaît aussi par prolongement<sup>18</sup> [durch *Hinzunahme*] (cf. p. 165) du groupe linéaire général du plan :

$$p, \quad q, \quad xq, \quad yq, \quad xp, \quad yp$$

<sup>18</sup> Un difféomorphisme local  $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y))$  du plan qui est proche de l'identité transforme un graphe  $\{y = y(x)\}$  en un autre graphe  $\{\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})\}$  et transforme aussi les dérivées  $y_x$  du graphe en :

$$\bar{y}_{\bar{x}} := \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dx \cdot \partial \bar{y}(x, y(x)) / \partial x}{dx \cdot \partial \bar{x}(x, y(x)) / \partial x} = \frac{\bar{x}_x + y_x \bar{y}_y}{\bar{x}_x + y_x \bar{x}_y}.$$

En appliquant cette formule au groupe local à un paramètre :

$$(x, y) \mapsto \exp(tX)(x, y) =: (\bar{x}(x, y, t), \bar{y}(x, y, t))$$

engendré par une transformation infinitésimale quelconque  $X = \xi(x, y)p + \zeta(x, y)q$ , et en la différentiant par rapport à  $t$  en  $t = 0$ , on obtient par le calcul ([124, 11, 125, 109]) :

$$\left. \frac{d\bar{y}_{\bar{x}}}{dt} \right|_{t=0} = \eta_x + [\eta_y - \xi_x]y_x + [-\xi_y](y_x)^2.$$

Autrement dit, si l'on introduit le prolongement  $X^{(1)}$  de  $X$  aux jets d'ordre 1 qui est la transformation infinitésimale en les trois variables  $(x, y, y_x)$  définie par :

$$X^{(1)} := \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + (\eta_x + [\eta_y - \xi_x]y_x + [-\xi_y](y_x)^2) \frac{\partial}{\partial y_x},$$

alors on réobtient :

$$\exp(tX^{(1)})(x, y, y_x) = (\bar{x}(x, y, t), \bar{y}(x, y, t), \bar{y}_{\bar{x}}(x, y, y_x, t))$$

Les six transformations infinitésimales (28) sont donc bien des prolongements, à l'espace  $(x, y, z \equiv y_x)$  des jets d'ordre 1, des six transformations  $p, q, xq, yq, xp$  et  $yp$ .

au moyen du quotient différentiel :

$$\frac{dy}{dx} = z.$$

Il reste maintenant encore à examiner si notre groupe (28) satisfait aux exigences de la page 166, donc avant tout si deux points de l'espace des  $x, y, z$  du groupe ont un et un seul invariant relativement au groupe.

Notre groupe renferme trois transformations infinitésimales qui sont d'ordre zéro par rapport à  $x, y, z$  et dont on ne peut tirer, par combinaison linéaire, aucune transformation d'ordre un, ou d'un ordre plus élevé, à savoir :

$$p, \quad q, \quad xq + r.$$

Nous en déduisons que l'origine des coordonnées :  $x = y = z = 0$  est un point en position générale<sup>19</sup>. Ce point reste au repos par les trois transformations infinitésimales :

$$yp - z^2r, \quad xp - yq - 2zr, \quad xp + yq$$

de notre groupe. Par conséquent, d'après la Proposition 2, p. 178, l'existence d'un invariant pour les paires de points dépend seulement du fait que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} y & 0 & -z^2 \\ x & -y & -2z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 2y^2z - 2xyz^2$$

s'annule, ou ne s'annule pas, identiquement. Mais comme ce déterminant ne s'annule pas identiquement, deux points de  $R_3$  n'ont sûrement aucun invariant relativement au groupe (28). Ainsi, le groupe (28) ne fait pas partie des groupes que nous recherchons [*ist also für uns unbrauchbar*].

### Deuxième cas

Le groupe réduit :  $\bar{X}_1f \dots \bar{X}_6f$  a maintenant la forme (II) explicitée page 188, par suite de quoi le groupe :  $X_1f \dots X_6f$  est de la forme :

$$(29) \quad \begin{cases} p + \varphi_1r, & q + \varphi_2r, & xq + \varphi_3r, & xp + yq + \varphi_4r \\ xp - yq + \varphi_5r, & x^2p + xyq + \varphi_6r, \end{cases}$$

où  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  sont des fonctions de  $x, y, z$ .

<sup>19</sup> Dès que le groupe est (localement) transifif, les sous-algèbres d'isotropie de tout points sont isomorphes deux à deux et tout point est en position générale.



Les calculs effectués pour le premier cas montrent directement que les cinq premières transformations infinitésimales (29) peuvent être mises sous la forme :

$$p, \quad q, \quad xq + r, \quad xp + yq, \quad xp - yq - 2zr.$$

D'un autre côté, comme les crochets :

$$[p, x^2p + xyq + \varphi_6 r] = 2xp + yq + \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} r$$

$$[q, x^2p + xyq + \varphi_6 r] = xq + \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} r$$

$$[xp + yq, x^2p + xyq + \varphi_6 r] = x^2p + xyq + \left\{ x \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} \right\} r$$

donnent immédiatement<sup>20</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} &= -z, & \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} &= 1, \\ x \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} &= \varphi_6 = y - xz, \end{aligned}$$

nous obtenons les six transformations infinitésimales :

$$(30) \quad \begin{cases} p, \quad q, \quad xq + r, \quad xp + yq, \quad xp - yq - 2zr \\ x^2p + xyq + (y - zx)r. \end{cases}$$

Celles-ci constituent manifestement un groupe à six paramètres<sup>21</sup> qui provient aussi par extension [*durch Erweiterung*] du groupe projectif à six paramètres du plan :

$$p, \quad q, \quad xq, \quad xp + yq, \quad xp - yq, \quad x^2p + xyq,$$

de la même manière que le groupe (28) provient par extension du groupe linéaire général du plan.

Cependant, le groupe (30) ne fait pas non plus partie des groupes que nous recherchons. En effet, l'origine :  $x = y = z = 0$  qui est

<sup>20</sup> Rappelons que les membres de droite de ces trois crochets doivent être combinaisons linéaires à coefficients constants des six transformations infinitésimales (29) — dont les cinq premières sont déjà normalisées —,

<sup>21</sup> En effet, on peut se convaincre sans aucun calcul de la stabilité par crochets grâce à la propriété générale ([124, 11, 125, 109]) que les crochets entre prolongements  $[X_j^{(1)}, X_k^{(1)}] = \sum_{l=1}^6 c_{jkl} X_l^{(1)}$  se comportent exactement de la même manière que les crochets  $[X_k, X_l] = \sum_{l=1}^6 c_{jkl} X_l$  entre les transformations infinitésimales initiales.

à nouveau un point en position générale, reste invariante par les trois transformations infinitésimales :

$$xp + yq, \quad xp - yq - 2zr, \quad x^2p + xyq + (y - xz)r$$

du groupe (30), mais le déterminant correspondant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x & -y & -2z \\ x^2 & xy & y - xz \end{vmatrix} = -2xy(y - xz)$$

ne s'annule pas identiquement, donc deux points de  $R_3$  n'ont à nouveau aucun invariant relativement au groupe (30).

### Troisième cas

Ici, le groupe réduit :  $\bar{X}_1 f \dots \bar{X}_6 f$  a la forme (III), explicitée page 188, d'où le groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$  est de la forme :

$$(31) \quad \begin{cases} p + \varphi_1 r, & q + \varphi_2 r, & xq + \varphi_3 r, & xp + yq + \varphi_4 r \\ x^2 q + \varphi_5 r, & x^2 p + 2xyq + \varphi_6 r, & & \end{cases}$$

où l'on entend par  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  des fonctions de  $x, y, z$ .

Exactement comme pour le premier cas, on vérifie que les quatre premières transformations infinitésimales (31) peuvent être mises sous la forme :

$$p, \quad q, \quad xq + r, \quad xp + yq + cr.$$

Afin de déterminer  $\varphi_5$ , formons les crochets :

$$[p, x^2 q + \varphi_5 r] = 2xq + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} r$$

$$[q, x^2 q + \varphi_5 r] = \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} r$$

$$[xq + r, x^2 q + \varphi_5 r] = \left( x \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right) r$$

$$[xp + yq + cr, x^2 q + \varphi_5 r] = x^2 q + \left\{ x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right\} r,$$

à partir desquels nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} &= 2, & \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = 0, \\ x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} &= \varphi_5 = 2x. \end{aligned}$$

De la même manière, en calculant les crochets :

$$\begin{aligned} [p, x^2p + 2xyq + \varphi_6r] &= 2xp + 2yq + \frac{\partial\varphi_6}{\partial x} r \\ [q, x^2p + 2xyq + \varphi_6r] &= 2xq + \frac{\partial\varphi_6}{\partial y} r \\ [xq + r, x^2p + 2xyq + \varphi_6r] &= x^2q + \left(x \frac{\partial\varphi_6}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_6}{\partial z}\right) r \\ [xp + yq + cr, x^2p + 2xyq + \varphi_6r] &= x^2p + 2xyq + \\ &\quad + \left\{x \frac{\partial\varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial\varphi_6}{\partial y} + c \frac{\partial\varphi_6}{\partial z}\right\} r, \end{aligned}$$

nous pouvons déterminer la dernière fonction inconnue  $\varphi_6$  comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_6}{\partial x} &= 2c, & \frac{\partial\varphi_6}{\partial y} &= 2, & \frac{\partial\varphi_6}{\partial z} &= 0, \\ x \frac{\partial\varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial\varphi_6}{\partial y} + c \frac{\partial\varphi_6}{\partial z} &= \varphi_6 = 2(y + cx). \end{aligned}$$

Par conséquent, notre groupe (31) reçoit la forme <sup>22</sup> :

$$(32) \quad \boxed{\begin{matrix} p, q, xq + r, xp + yq + cr \\ x^2q + 2xr, x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r \end{matrix}}.$$

Ici aussi :  $x = y = z = 0$  est un point en position générale. Ce point reste invariant par les trois transformations infinitésimales :

$$(33) \quad \begin{cases} xp + (y - cx)q, x^2q + 2xr \\ x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r \end{cases}$$

et le déterminant correspondant :

$$(34) \quad \begin{vmatrix} x & y - cx & 0 \\ 0 & x^2 & 2x \\ x^2 & 2xy & 2(y + cx) \end{vmatrix} = 2x^3(y + cx) - 4x^3y + 2x^3(y - cx)$$

s'annule identiquement, sans que tous ses sous-déterminants d'ordre deux ne s'annulent. Par conséquent (voir Proposition 2, p. 178), deux points de  $R_3$  :  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  possèdent un et un seul invariant

<sup>22</sup> Le fait que le groupe obtenu soit encadré laisse entendre à l'avance qu'il sera retenu dans la liste de tous les groupes qui satisfont les conditions formulées à la page 181. Mais la démonstration et les examens ne sont pas terminés.

relativement au groupe (32), et pour préciser, on trouve par le calcul<sup>23</sup> l'expression suivante pour cet invariant :

$$(35) \quad z_1 + z_2 - c \log(x_2 - x_1)^2 - 2 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Il s'agit alors de savoir aussi quelle valeur la constante  $c$  peut prendre ; mais comme cette constante ne peut visiblement pas être supprimée en introduisant de nouvelles variables  $x, y, z$ , elle constitue alors un paramètre essentiel, ce qui veut dire que le groupe (32) représente en fait  $\infty^1$  types différents de groupes.

Maintenant, il reste encore à déterminer si le groupe (32) appartient réellement aux groupes que nous recherchons, donc si les invariants d'un nombre quelconque de points peuvent s'exprimer au moyen des invariants de paires de points. Mais comme nous avons déjà vu que deux points possèdent un et un seul invariant, et comme par ailleurs, la famille des pseudosphères (*cf.* p. 171) :

$$(36) \quad z + z_0 - c \log(x - x_0)^2 - 2 \frac{y - y_0}{x - x_0} = \text{const.}$$

n'est pas seulement constituée de  $\infty^1$ , mais même<sup>24</sup> de  $\infty^3$  surfaces différentes, il ne nous reste plus, d'après la Proposition 4, p. 181, qu'à savoir s'il existe une famille de  $\infty^2$  courbes qui engendre la totalité des pseudosphères.

Comme le point :  $x = y = z = 0$  est un point en position générale, alors, quand il est fixé, pour chaque famille de  $\infty^2$  courbes qui est invariante, la courbe qui passe par ce point doit demeurer au repos. Or le point :  $x = y = z = 0$  admet les trois transformations infinitésimales (33), qui produisent naturellement un sous-groupe à trois paramètres de (32). En annulant alors tous les sous-déterminants d'ordre deux<sup>25</sup> du déterminant (34) relatif à ce sous-groupe, on trouve que  $x = y = 0$  est la seule courbe passant par le point :  $x = y = z = 0$  qui reste invariante en même temps que ce point. Mais comme, par l'action

<sup>23</sup> Soit on forme et on résout le système (2) avec les six transformations infinitésimales  $X_k, k = 1, \dots, 6$  du groupe (32), soit on vérifie directement que l'expression de cet invariant est annulée identiquement par  $X_k^{(1)} + X_k^{(2)}$  pour  $k = 1, \dots, 6$ .

<sup>24</sup> Il y a quatre paramètres :  $z_0, x_0, y_0$  et const., mais la constante absorbe  $z_0$  par passage du membre de gauche au membre de droite.

<sup>25</sup> En restriction à une courbe quelconque passant par l'origine qui est invariante par le sous-groupe d'isotropie fixant l'origine, le rang de l'espace vectoriel engendré par les trois transformations infinitésimales (33), donc de la matrice (34), doit être  $\leq 1$ .

du groupe (32), la courbe :  $x = y = 0$  prend toutes les  $\infty^2$  positions :  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ , on a donc établi que :  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  est l'unique famille de  $\infty^2$  courbes qui est invariante par le groupe (32). Enfin, puisque les pseudosphères (36) ne sont évidemment pas composées des courbes de la famille :  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ , il apparaît que tout nombre de points supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel relativement au groupe (32).

Mentionnons encore que :  $x = 0$  est l'unique surface passant par le point :  $x = y = z = 0$  qui reste invariante par le groupe (33), et que par conséquent, mis à part la famille :  $x = \text{const.}$ , il n'existe pas d'autre famille de  $\infty^1$  surfaces qui admet le groupe (32).

#### Quatrième cas

Maintenant, nous cherchons tous les groupes à six paramètres de l'espace des  $x, y, z$  qui satisfont aux exigences de la page 181 et dont le groupe réduit possède la forme :

$$(IV) \quad p, q, xp, yq, x^2p, y^2q,$$

Les transformations infinitésimales de ce groupe s'écrivent :

$$(37) \quad \begin{cases} p + \varphi_1 r, & q + \varphi_2 r, & xp + \varphi_3 r, & yq + \varphi_4 r, \\ x^2p + \varphi_5 r, & y^2q + \varphi_6 r, \end{cases}$$

où  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  sont des fonctions de  $x, y, z$ .

Comme dans le premier cas, on vérifie que [les fonctions]  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  peuvent être supposées nulles sans perte de généralité. En calculant le crochet de  $xp + \varphi_3 r$  avec  $p$  et avec  $q$ , on obtient que  $\varphi_3$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ ; de plus, comme  $\varphi_3$  ne peut évidemment pas être nul<sup>26</sup>, nous pouvons le rendre égal à 1 en introduisant une nouvelle variable  $z$ , et nous avons à présent les trois transformations infinitésimales :

$$p, q, xp + r.$$

En calculant maintenant les crochets de ces transformations simplifiées avec :  $yq + \varphi_4 r$ , nous trouvons que  $\varphi_4$  ne dépend pas de  $x, y, z$ , donc est simplement une constante ; nous pouvons donc poser  $\varphi_4 = c$ , où cependant la constante  $c$  ne doit pas s'annuler<sup>27</sup>,

<sup>26</sup> Si la constante  $c$  était nulle, le groupe posséderait les deux transformations  $p$  et  $xp$  dont les courbes intégrales coïncideraient, ce qui serait exclu par la Proposition 1 p. 176.

<sup>27</sup> Si la fonction  $\varphi_4$  était identiquement nulle, le groupe posséderait les deux transformations  $q$  et  $yp$  dont les courbes intégrales coïncideraient.

Afin de déterminer aussi  $\varphi_5$ , formons les crochets :

$$\begin{aligned} [p, x^2p + \varphi_5 r] &= 2xp + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} r \\ [q, x^2p + \varphi_5 r] &= \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} r \\ [yq + cr, x^2p + \varphi_5 r] &= \left( y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right) r \\ [xp + r, x^2p + \varphi_5 r] &= x^2p + \left( x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right) r. \end{aligned}$$

Les trois premières de ces équations montrent que :

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = 0,$$

et la dernière donne alors :  $\varphi_5 = 2x$ .

Par un calcul complètement similaire, on trouve :  $\varphi_6 = 2cy$ . En définitive, nous parvenons donc au groupe :

$$(38) \quad \boxed{p, q, xp + r, yq + cr, x^2p + 2xr, y^2q + 2cyr} \\ (c \neq 0).$$

Ici, le paramètre  $c$  est manifestement essentiel et ne peut pas être supprimé.

La présence des trois transformations infinitésimales :  $p, q, xp + r$  montre que l'origine des coordonnées est un point en position générale. Ce point reste au repos lorsqu'agissent les trois transformations infinitésimales :

$$(39) \quad yq - cyp, x^2p + 2xr, y^2q + 2cyr \quad (c \neq 0)$$

du groupe (38). Maintenant comme le déterminant correspondant :

$$(40) \quad \begin{vmatrix} -cx & y & 0 \\ x^2 & 0 & 2x \\ 0 & y^2 & 2cy \end{vmatrix} = 2cx^2y^2 - 2cx^2y^2$$

s'annule identiquement, tandis que ses sous-déterminants d'ordre deux ne sont pas tous nuls, nous pouvons en déduire que deux points quelconques de l'espace des  $x, y, z$  ont un et un seul invariant relativement au groupe (38). En fait, on se persuade par un calcul aisé que l'expression :

$$(41) \quad z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - c \cdot \log(y_2 - y_1)^2$$

constitue un invariant, et à vrai dire, l'unique invariant des deux points :  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$ .

La famille des pseudosphères de notre groupe (38) est de la forme :

$$(42) \quad z + z_0 - \log(x - x_0)^2 - c \cdot \log(y - y_0)^2 = \text{const.}$$

Ainsi, elle est constituée d'un nombre de surfaces qui est supérieur à  $\infty^1$ . Par ailleurs, on vérifie, comme dans le cas précédent, en annulant les sous-déterminants d'ordre deux de (40), que  $x = y = 0$  est la seule courbe passant par le point :  $x = y = z = 0$  qui reste au repos en même temps que ce point et donc aussi que la famille des  $\infty^2$  courbes :  $x = \text{const.}, y = \text{const.}$  est la seule qui reste invariante par le groupe (38). Mais comme la pseudosphère (42) n'est manifestement pas constituée par les courbes de cette famille, on en déduit avec certitude, grâce à la Proposition 4, p. 181, qu'un nombre de points supérieur à deux ne possède aucun invariant essentiel relativement au groupe (38).

On peut encore mentionner qu'en dehors des deux familles de surfaces :  $x = \text{const.}$  et  $y = \text{const.}$ , il n'existe pas d'autre famille de  $\infty^1$  surfaces qui soit invariante par le groupe (38).

## B) Détermination de tous les groupes dont le groupe réduit possède cinq paramètres

En cette circonstance, d'après les pages 185 sq., le groupe réduit :  $\overline{X}_1 f \dots \overline{X}_6 f$  peut être rapporté aux deux formes suivantes :

$$(V) \quad p, \quad q, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp$$

$$(VI) \quad p, \quad q, \quad xq, \quad 2xp + yq, \quad x^2p + xyq.$$

Par conséquent, nous devons encore traiter maintenant ces deux cas.

### Cinquième cas

Si le groupe réduit est de la forme (V), le groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$  peut être mis sous la forme :

$$(43) \quad \begin{cases} \varphi r, & p + \varphi_1 r, & q + \varphi_2 r, & xp - yq + \varphi_3 r, \\ xq + \varphi_4 r, & yp + \varphi_5 r, & & \end{cases}$$

où l'on entend par  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_5$  des fonctions de  $x, y, z$ .

Ce cas a déjà été complètement étudié aux pages 157 sq., où l'on a démontré<sup>28</sup> que le groupe (43) peut être, par un choix approprié de la variable  $z$ , rapporté soit à la forme :

$$r, \quad p, \quad q, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp,$$

soit à la forme :

$$(44) \quad \begin{cases} r, \quad p, \quad q + xr, \quad xp - yq, \\ yp + \frac{1}{2} y^2 r, \quad xq + \frac{1}{2} x^2 r. \end{cases}$$

Le premier de ces groupes n'entre pas en ligne de compte, puisque  $q$  et  $xq$  possèdent les mêmes courbes intégrales. Le groupe (44) nous est

<sup>28</sup> Par souci de complétude, voici les arguments. En introduisant  $\int \frac{1}{\varphi} dz$  comme nouveau  $z$ , on remplace  $\varphi r$  par  $r$  et on obtient le groupe :

$$r, \quad p + \varphi_1 r, \quad q + \varphi_2 r, \quad xp - yq + \varphi_3 r, \quad xq + \varphi_4 r, \quad yp + \varphi_5 r.$$

Le crochet avec  $r$  des cinq derniers générateurs montre que chaque  $\varphi_k$  a la forme  $\varphi_k = a_k z + \psi_k(x, y)$ ,  $k = 1, \dots, 5$ . Mais comme le crochet :

$$[p + (a_1 z + \psi_1) r, xp - yq + (a_4 z + \psi_4) r] = p + \chi(x, y) r,$$

où  $\chi$  est une fonction de  $x$  et de  $y$  qu'il est inutile de calculer précisément, ne peut qu'être égal à  $p + (a_1 z + \psi_1) r$ , on obtient que  $a_1 = 0$ , et d'une manière analogue aussi, que  $a_2 = \dots = a_5 = 0$ . En introduisant maintenant  $z - \int \psi_1 dx$  comme nouveau  $z$ , on redresse la transformation infinitésimale  $p + \psi_1 r$  en  $p$ . Le crochet  $[p, q + \psi_2 r] = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} r$  montre alors que  $\varphi_2 = Cx + \chi(y)$ , et on peut annuler ensuite la fonction  $\chi(y)$  en introduisant  $z - \int \chi dy$  comme nouveau  $z$ . Le groupe considéré est ainsi réduit à la forme :

$$r, \quad p, \quad q + Cx r, \quad xp - yq + \psi_3 r, \quad xq + \psi_4 r, \quad yp + \psi_5 r,$$

où  $\psi_3, \psi_4, \psi_5$  sont des fonctions de  $(x, y)$ . Le crochet  $[p, xp - yq + \psi_3 r] = p + \frac{\partial \psi_3}{\partial x} r$  montre que  $\psi_3 = ax + \tau(y)$ . D'un autre côté, on a :

$$[q + Cx r, xp - yq + (ax + \tau) r] = -q + (\tau'(y) - Cx) r,$$

d'où  $\tau'(y)$  est constant  $= b$  et  $\tau(y) = by$ , si l'on supprime la constante d'intégration grâce à la présence de la (première) transformation infinitésimale  $r$ . En introduisant encore  $z - ax + by$  comme nouveau  $z$ , on obtient simplement la transformation infinitésimale  $xp - yq$ , tandis que  $r, p$  et  $q + Cx r$  ne changent pas essentiellement de forme. De plus, on a :

$$[p, xq + \psi_4 r] = q + \frac{\partial \psi_4}{\partial x} r, \quad [q + Cx r, xq + \psi_4 r] = \frac{\partial \psi_4}{\partial y} r,$$

d'où en faisant abstraction de la constante d'intégration (superflue) :  $\psi_4 = \frac{1}{2} Cx^2 + ky$ . Mais le crochet :

$$[xp - yq, xq + (\frac{1}{2} Cx^2 + ky) r] = 2xq + (Cx^2 - ky) r$$

montre que la constante  $k$  s'annule. Enfin, on montre d'une manière analogue que  $\psi_5 = \frac{1}{2} Cy^2$ . Si  $C = 0$ , on obtient le premier groupe ; si  $C \neq 0$ , en remplaçant  $z$  par  $\frac{1}{C} z$ , on obtient le second groupe (44).



déjà connu, d'après le Tome II (voir le Théorème 66, p. 421) ; de plus, nous savons qu'en introduisant les expressions  $x, \frac{1}{2}y, z - \frac{1}{2}xy$  comme nouvelles variables à la place de  $x, y, z$ , ce groupe se transforme<sup>29</sup> en le groupe projectif suivant (*loc. cit.*, pp. 445 sq.) :

$$(45) \quad \boxed{p - yr, q + xr, r, xq, xp - yq, yp}.$$

Ainsi, pour notre recherche, nous souhaitons considérer ce groupe fondamentalement sous cette forme projective.

La présentation des trois transformations infinitésimales :  $p - yr, q + xr, r$  montre que  $x = y = z = 0$  est un point en position générale. Mais comme ce point reste au repos par l'action des trois transformations infinitésimales :

$$(46) \quad xq, xp - yq, yp$$

du groupe (45), et comme le déterminant correspondant :

$$(47) \quad \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & -y & 0 \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

s'annule identiquement, sans que tous ses sous-déterminants d'ordre deux en fassent de même, il découle très certainement de la Proposition 2 p. 178 que deux points :  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  possèdent un et un seul invariant relativement au groupe (45). Pour cet invariant, on trouve très facilement l'expression :

$$(48) \quad z_2 - z_1 + x_1y_2 - x_2y_1.$$

La famille des pseudosphères :

$$(49) \quad z - z_0 + x_0y - y_0x = \text{const.}$$

appartenant à ce groupe consiste en  $\infty^3$  surfaces différentes et pour préciser, elle consiste en tous les plans de l'espace des  $x, y, z$ . Comme de plus, d'après le Théorème 73 p. 445 du Tome II, le groupe (44) ne laisse invariante aucune autre famille de  $\infty^2$  courbes que la famille :  $x = \text{const.}, y = \text{const.}$ , il en va évidemment de même pour le groupe (45), et comme les  $\infty^3$  pseudosphères (49) ne sont pas entièrement constituées des courbes de la famille :  $x = \text{const.}, y = \text{const.}$ , on déduit donc immédiatement de la Proposition 4, p. 181, qu'un nombre

<sup>29</sup> On vérifie en effet par le calcul que (44) devient (45), lequel est effectivement un sous-groupe du groupe projectif engendré par les 8 générateurs infinitésimaux  $p, q, xp, yp, xq, yq, xyp + xyq, xyp + yyq$ .

de points supérieur à deux ne possède aucun invariant essentiel relativement au groupe (44).

On doit encore mentionner que le groupe (45) ne laisse en général invariante aucune famille de  $\infty^1$  surfaces (voir Tome II, *loc. cit.*).

### Sixième cas

Lorsque le groupe réduit :  $\bar{X}_1 f \dots \bar{X}_6 f$  a la forme (VI), p. 199, le groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$  est nécessairement de la forme :

$$(50) \quad \begin{cases} \varphi r, & p + \varphi_1 r, & q + \varphi_2 r, & 2xp + yq + \varphi_3 r, \\ xq + \varphi_4 r, & x^2 p + xyq + \varphi_5 r, \end{cases}$$

où  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_5$  sont des fonctions de  $x, y, z$ .

Exactement comme aux pages 157 sq.<sup>30</sup>, on peut parvenir à ce que  $\varphi = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = Cx$ ; alors en même temps, les fonctions  $\varphi_3, \varphi_4$  et  $\varphi_5$  sont certainement toutes indépendantes de  $z$ .

Pour la détermination de  $\varphi_3(x, y)$ , formons les crochets :

$$\begin{aligned} [p, 2xp + yq + \varphi_3 r] &= 2p + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} r \\ [q + Cxr, 2xp + yq + \varphi_3 r] &= q + \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - 2Cx \right) r, \end{aligned}$$

qui donnent :

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = D, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 3Cx + E,$$

d'où :  $C = 0$  et  $\varphi_3 = Dx + Ey + H$ , où la constante  $H$  peut être simplement supprimée<sup>31</sup>, tandis que les constantes  $D$  et  $E$  sont ramenées à zéro lorsqu'on introduit :  $z - \frac{1}{2} Dx - Ey$  comme nouvelle variable  $z$ . Nous avons donc maintenant ramené les quatre premières transformations (50) à la forme simplifiée :

$$p, \quad q, \quad r, \quad 2xp + yq.$$

En calculant les crochets de  $xq + \varphi_4(x, y)r$  avec  $p$  et avec  $q$ , on vérifie que  $\varphi_4$  a la forme :  $\varphi_4 = Lx + My$ , où la constante d'intégration (superflue) a déjà été supprimée<sup>32</sup>. En outre, on obtient :

$$[2xp + yq, xq + (Lx + My)r] = xq + (2Lx + My)r,$$

<sup>30</sup> Voir la note de rappel au début de l'étude du cinquième cas.

<sup>31</sup> — en soustrayant  $Hr$  à la transformation infinitésimale  $2xp + yq + \varphi_3 r$ .

<sup>32</sup> — à nouveau, en soustrayant un multiple de la transformation  $r$ .

de telle sorte que  $L$  doit être nul, tandis que  $M$  ne peut naturellement pas s'annuler, sinon  $q$  et  $xq$  auraient les mêmes courbes intégrales. En introduisant  $\frac{1}{M}z$  comme nouvelle variable  $z$ , on peut faire que la constante  $M$  soit simplement égale à 1.

Enfin, formons les crochets :

$$[p, x^2p + xyq + \varphi_5 r] = 2xp + yq + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} r$$

$$[q, x^2p + xyq + \varphi_5 r] = xq + \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} r$$

$$[xq + yr, x^2p + xyq + \varphi_5 r] = \left( x \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} - xy \right) r$$

$$[2xp + yq, x^2p + xyq + \varphi_5 r] = 2(x^2p + xyq) + \left( 2x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} \right) r,$$

à partir desquels nous trouvons :

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = c, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = y$$

$$2x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = 2cx + y^2 = 2\varphi_5 + K,$$

où cependant la constante  $K$  peut être simplement réduite à zéro. Ainsi, nous sommes parvenus au groupe :

$$(51) \quad \begin{cases} p, & q, & r, & 2xp + yq, & xq + yr \\ & & & x^2p + xyq + (\frac{1}{2}y^2 + cx)r. \end{cases}$$

Puisque les transformations infinitésimales  $p, q, r$  sont présentes, le point  $x = y = z = 0$  est à nouveau un point en position générale. Les transformations infinitésimales du groupe (51) qui laissent invariant ce point sont :

$$2xp + yq, \quad xq + yr, \quad x^2p + xyq + (\frac{1}{2}y^2 + cx)r,$$

et le déterminant correspondant :

$$\begin{vmatrix} 2x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ x^2 & xy & \frac{1}{2}y^2 + cx \end{vmatrix}$$

a la valeur :

$$x^2y^2 + 2cx^3 - 2x^2y^2 + x^2y^2 = 2cx^3,$$

qui ne s'annule donc identiquement que lorsque la constante  $c$  a la valeur zéro, tandis que les sous-déterminants d'ordre deux ne s'annulent

pas tous, y compris pour  $c = 0$ . Par conséquent, parmi tous les groupes de la forme (51), le groupe :

$$(52) \quad \boxed{\begin{array}{l} p, \quad q, \quad r, \quad 2xp + yq, \quad xq + yr \\ x^2p + xyq + \frac{1}{2}y^2r \end{array}}$$

est le seul relativement auquel deux points possèdent un et un seul invariant. Par le calcul, on trouve que cet invariant possède la forme :

$$(53) \quad z_2 - z_1 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2(x_2 - x_1)}.$$

La famille des pseudosphères :

$$(54) \quad z - z_0 - \frac{(y - y_0)^2}{2(x - x_0)} = \text{const.}$$

qui appartient à notre groupe (52) consiste manifestement en  $\infty^3$  surfaces différentes. Par ailleurs, on se convainc facilement que les transformations infinitésimales du groupe (52) qui fixent le point en position générale :  $x = y = z = 0$ , ne laissent au repos nulle autre courbe passant par ce point que la droite :  $x = y = 0$  ; par conséquent :  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  est la seule famille de  $\infty^2$  courbes qui reste invariante par le groupe (52) et la Proposition 4, p. 181 montre à nouveau qu'un nombre de points supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel relativement au groupe (52).

Pour terminer, remarquons encore que le groupe (52) ne laisse invariante qu'une seule famille de  $\infty^1$  surfaces, à savoir la famille :  $x = \text{const.}$

*Ainsi, nous avons aussi trouvé tous les groupes imprimitifs de  $R_3$  qui satisfont l'exigence que nous avons formulée page 166.*

### § 88.

D'après les résultats des deux précédents paragraphes, le problème énoncé dans l'ouverture du présent chapitre possède la solution suivante<sup>1</sup>.

**Théorème 36.** *Si un groupe continu fini de l'espace des  $x, y, z$  est constitué de telle sorte que relativement à son action, deux points ont un et un seul invariant tandis que tous les invariants d'un nombre de points supérieur à deux peuvent s'exprimer au moyen des invariants des*

<sup>1</sup> Le résultat vaut pour un groupe de transformations holomorphes locales agissant sur  $\mathbb{C}^3$ , le cas des groupes réels étant traité au § 89 qui suit.

paires de points, alors le groupe est transitif à six paramètres et pour préciser, il est semblable<sup>2</sup> [ähnlich], via une transformation ponctuelle de l'espace des  $x, y, z$ , ou bien au groupe des mouvements euclidiens, ou bien au groupe projectif à six paramètres qui stabilise une surface du second degré non-dégénérée, ou bien encore à l'un des quatre groupes suivants :

$$[1] \quad \boxed{p, q, xp + r, yq + cr, x^2p + 2xr, y^2q + 2cyr, c \neq 0}$$

$$[2] \quad \boxed{p, q, xq + r, x^2q + 2xr, xp + yq + cr, x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r}$$

$$[3] \quad \boxed{p - yr, q + xr, r, xq, xp - yq, yp}$$

$$[4] \quad \boxed{p, q, r, xq + yr, 2xp + yq, x^2p + xyq + \frac{1}{2}y^2r}$$

Le paramètre  $c$  est ici essentiel dans les deux cas [1] et [2] et ne peut pas être supprimé.

Comme nous l'avons montré dans les précédents paragraphes, chacun des quatre groupes [1] ... [4] laisse invariante une unique famille de  $\infty^2$  courbes, à savoir la famille :  $x = \text{const.}, y = \text{const.}$  Maintenant, nous voulons encore ajouter que ces quatre groupes sont entièrement systatiques<sup>3</sup>.

En effet, les transformations infinitésimales des quatre groupes sus-nommés commutent toutes avec la transformation infinitésimale  $r$ ,

<sup>2</sup> Le langage contemporain appelle équivalentes deux structures géométriques qui ne diffèrent l'une de l'autre que par un changement de coordonnées ponctuelles.

<sup>3</sup> Soit  $X_1, \dots, X_m$  un groupe fini continu de transformations locales d'une variété à  $n$  dimension munie des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ . Un point  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  en position générale admet un certain nombre  $m - q$  de transformations infinitésimales  $Y_1, \dots, Y_{m-q}$  qui le laissent au repos, cf. les rappels de la note p. 178. Dans certaines circonstances, il peut exister une sous-variété connexe non vide  $\Lambda$  (avec des singularités éventuelles) passant par ce point dont chaque point individuel est laissé fixe par toutes les transformations du sous-groupe engendré par  $Y_1, \dots, Y_{m-q}$ , qui n'est autre que le sous-groupe d'isotropie de  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Dans ce cas, le groupe est dit systatique, concept introduit par Lie en 1884–85. D'après le Chap. 24 du Tome I, en reprenant les notations de la note p. 178, les équations du plus grand tel ensemble  $\Lambda$  sont :  $\varphi_{jk}(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{jk}(x_1^0, \dots, x_n^0)$  pour  $j = 1, \dots, m - q$  et  $k = 1, \dots, q$ . Si  $\Lambda$  est l'ensemble vide, le groupe est dit asystatique.

ce qui montre, grâce à la Proposition 2 p. 510 du Tome I, que ces groupes sont systatiques ; on peut aussi s'en convaincre directement, puisque pour chacun des groupes [1] . . . [4], les transformations infinitésimales qui fixent un point  $x_0, y_0, z_0$  en position générale laissent en même temps au repos la droite :  $x = x_0, y = y_0$ .

Enfin, mentionnons encore que par l'action des groupes [1], [2], [3], les  $\infty^2$  éléments linéaires qui passent par chaque point fixé en position générale se transforment de trois manières différentes, mais seulement de deux manières par l'action du groupe [4] ; c'est précisément parce que le groupe [4] renferme, dans le voisinage de chaque point :  $x_0, y_0, z_0$  en position générale, une transformation infinitésimale du second ordre en :  $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ .

On pourrait se demander si les groupes [1], [2], [4], qui ne sont pas présentés sous forme projective, sont transformables en des groupes projectifs par un choix approprié de coordonnées  $x, y, z$ . Pour le groupe [4], la réponse à cette question est très certainement non, car s'il devait se transformer en un groupe projectif, la transformation infinitésimale du second ordre qu'il renfermerait dans le voisinage du point :  $x = y = z = 0$  en position générale devrait être de la forme<sup>4</sup> :

$$(\lambda x + \mu y + \nu z)(xp + yq + zr) + \dots,$$

où les termes supprimés sont d'ordre trois et d'ordre supérieur en  $x, y, z$  ; mais comme cette condition nécessaire n'est pas remplie, le groupe [4] ne peut sûrement pas être semblable à un groupe projectif.

### § 89.

#### Résolution du problème pour les groupes réels.

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré les variables  $x, y, z$  comme des quantités complexes. À présent, nous voulons les limiter au domaine des nombres réels et nous voulons résoudre le problème posé dans l'introduction de ce chapitre, en supposant que les groupes sont réels et que seules les transformations ponctuelles qui sont réelles sont admissibles.

*Nous recherchons donc maintenant tous les groupes continus finis réels de  $R_3$  relativement auxquels deux points réels ont un et un seul invariant, tandis que trois points réels ou plus ne possèdent aucun invariant essentiel.* Avec cela, nous nous restreignons naturellement aux

<sup>4</sup> En effet, le groupe projectif contient toutes les transformations infinitésimales d'ordre zéro et un, et en dimension trois, ses transformations du second ordre, au nombre de trois, sont :  $x(xp + yq + zr), y(xp + yq + zr)$  et  $z(xp + yq + zr)$ .

groupes dont les équations finies autorisent un certain nombre de différentiations par rapport aux variables et aux paramètres<sup>1</sup> (cf.p. 365).

Dès le début, il est clair que les groupes recherchés sont entièrement transitifs (cf.p. 168). Ainsi, d'après la page 366, nous pouvons nous imaginer dans chaque cas individuel qu'au moyen d'une transformation ponctuelle réelle, de nouvelles variables  $x, y, z$  sont introduites de telle sorte que le groupe concerné est représenté par des équations réelles, dans lesquelles les fonctions qui apparaissent sont des fonctions *analytiques* des variables et des paramètres, au sens de Weierstraß. Ainsi, nous devons seulement considérer les groupes à  $m$  paramètres tels que, dans leurs transformations infinitésimales :

$$X_k f = \xi_k(x, y, z) p + \eta_k(x, y, z) q + \zeta_k(x, y, z) r$$

$$(k=1, 2 \dots m),$$

les coefficients  $\xi_k, \eta_k, \zeta_k$  sont des séries de puissances ordinaires par rapport à  $x - x_0, y - y_0, z - z_0$  dans un voisinage d'un point réel quelconque en position générale, et bien entendu, des séries de puissances avec seulement des coefficients réels.

Soit :  $X_1 f \dots X_m f$ , ou brièvement  $G_m$ , un tel groupe réel à  $m$  paramètres qui satisfait notre exigence concernant les invariants de deux

<sup>1</sup> On part d'un groupe de transformations réel fini continu dont les équations  $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m), i = 1, \dots, n$ , ne sont pas forcément analytiques. En supposant seulement que les  $f_i$  possèdent des dérivées continues d'ordre un et deux par rapport à toutes leurs variables, Lie et Engel énoncent et démontrent (Théorème 33, p. 366 du Volume III) que lorsque le groupe est *transitif*, il est toujours possible d'introduire localement un changement simultané de paramètres  $a \mapsto b = b(a)$  et de coordonnées  $x \mapsto y = y(x)$  qui transfère le groupe en un groupe équivalent  $y'_i = g_i(y_1, \dots, y_n; b_1, \dots, b_r), i = 1, \dots, n$ , dont toutes les équations sont analytiques. L'énoncé n'est plus valable lorsque le groupe n'est pas transitif, comme le montre l'exemple  $q, xq, f(x)q$  sur le plan des  $(x, y)$ , où  $f(x)$  est une fonction différentiable non analytique (cf.[42], p. 368). Le cinquième problème de Hilbert (1900) demande s'il est possible d'éliminer l'hypothèse de différentiabilité, et de supposer seulement que les fonctions  $f_i$  sont continues. En 1952, Gleason, et indépendamment, Montgomery-Zippin ont établi que tout groupe topologique localement euclidien, *i.e.* qui forme aussi une variété topologique, admet une structure de variété analytique réelle pour laquelle il constitue un groupe de Lie analytique. En 1955, Montgomery-Zippin ont établi le théorème suivant : *Si un groupe topologique localement compact  $G$  agit transitivement et effectivement sur un espace topologique  $X$  compact et localement connexe, alors  $G$  possède une structure de groupe de Lie, et  $X$  possède une structure de variété analytique réelle de telle sorte que l'action est analytique* ([113]; [62], pp. 87–88).

points et plus. Ensuite, l'expression :

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_m X_m f,$$

représente la transformation infinitésimale générale d'un certain groupe à  $m$  paramètres  $G'_m$  de transformations complexes, lorsqu'on y considère  $x, y, z$  comme des variables complexes et  $e_1 \dots e_m$  comme des paramètres complexes<sup>2</sup> (cf. p. 362). Il est maintenant facile de voir que ce groupe  $G'_m$  satisfait également notre exigence concernant les invariants de deux points ou plus, c'est-à-dire : relativement à  $G'_m$ , deux points ont un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de points supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel. En effet, aussi bien pour  $G'_m$  que pour  $G_m$ , les invariants de  $s$  points sont simplement les solutions du système complet :

$$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + \cdots + X_k^{(s)} f = 0 \quad (k=1 \dots m),$$

et le fait que l'on considère  $x, y, z$  comme des variables réelles ou comme des variables complexes n'a aucune influence sur le nombre des solutions de ce système complet qui sont indépendantes l'une de l'autre. Donc si deux points ont un et un seul invariant et si tous les invariants d'un nombre de points supérieur à deux peuvent s'exprimer au moyen des invariants de paires de points, lorsque  $x, y, z$  sont réels, cela vaut aussi lorsque  $x, y, z$  sont complexes et vice-versa : on peut même toujours assurer que tous les invariants de  $s$  points sont des fonctions réelles des  $3s$  variables :  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_s, y_s, z_s$ .

De cette façon, l'énoncé suivant est démontré : *Si un groupe réel à  $m$  paramètres :  $X_1 f \dots X_m f$  satisfait notre exigence concernant les invariants de plusieurs points, alors, dès qu'on interprète  $x, y, z$  comme des variables complexes, il fournit un groupe qui possède toutes les propriétés dégagées au §85 ; le groupe :  $X_1 f \dots X_m f$  est alors nécessairement à six paramètres et il est semblable à l'un des groupes du*

---

<sup>2</sup> Techniquement, cette opération consiste tout simplement à remplacer par des variables complexes les variables réelles qui apparaissent dans les séries entières par lesquelles on peut développer tous les coefficients des transformations infinitésimales  $X_k, k = 1, \dots, m$ . Cela a un sens, parce que les séries en question demeurent convergentes lorsque les modules des variables complexes satisfont les mêmes inégalités que celles que devaient satisfaire les variables réelles initiales pour garantir la convergence. Ensuite, pour reconstituer les équations finies du groupe *via* l'application exponentielle, on peut faire prendre aussi des valeurs complexes aux variables « temporelles »  $t$  qui apparaissent dans les groupes à un paramètre  $\exp(tX_k)(x)$  engendrés par les  $X_k$ .



*Théorème 36, p. 204, grâce à une transformation réelle ou complexe de l'espace des  $x, y, z$ .*

Les groupes énumérés par le Théorème 36 se rangent dans deux classes. Chaque groupe de la première classe<sup>3</sup> laisse invariante une équation du second degré :

(55)

$$\alpha_{11}dx^2 + \alpha_{22}dy^2 + \alpha_{33}dz^2 + 2\alpha_{12}dxdy + 2\alpha_{23}dydz + 2\alpha_{31}dzdx = 0,$$

où les  $\alpha$  sont des fonctions de  $x, y, z$  et où le déterminant correspondant ne s'annule pas identiquement ; en outre ces groupes sont constitués de telle sorte que les  $\infty^2$  éléments linéaires passant par chaque point fixé en position générale sont transformés par une action à trois paramètres. Les groupes de la deuxième classe, *i.e.* les groupes [1] . . . [4], se distinguent en ce que chacun d'entre eux laisse invariante la famille des  $\infty^2$  droites :  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ , sans stabiliser aucune autre famille de  $\infty^2$  courbes.

Si un groupe réel à six paramètres est semblable à l'un des groupes qui appartient à la première de nos deux classes, alors il doit évidemment laisser invariante une équation de la forme (55) dans laquelle les  $\alpha$  sont des fonctions réelles de  $x, y, z$  et dont le déterminant ne s'annule pas identiquement ; et de plus, les  $\infty^2$  éléments linéaires passant par chaque point réel fixé en position générale doivent encore être transformés par une action à trois paramètres. Mais d'après le Théorème 35, p. 391<sup>4</sup>, chaque groupe réel à six paramètres de cette espèce est semblable, par une transformation ponctuelle réelle, ou bien au groupe des mouvements euclidiens, ou bien au groupe projectif réel à six paramètres qui laisse invariants le volume ainsi qu'une conique non-dégénérée infiniment éloignée, ou bien encore au groupe projectif à six paramètres d'une surface du second degré non-dégénérée, qui est représentée par une équation réelle entre  $x, y$  et  $z$  ; ici cependant, on

<sup>3</sup> — à savoir, les deux groupes imprimitifs (22) et (23) —

<sup>4</sup> Ce théorème établit que si un groupe *réel* continu dans un espace à  $n > 2$  variables  $x_1, \dots, x_n$  laisse invariante une équation réelle :

$$\sum_{k, \nu}^{1 \dots n} f_{k\nu}(x_1, \dots, x_n) dx_k dx_\nu = 0$$

dont le déterminant ne s'annule pas identiquement, et si en outre, il est constitué de telle sorte qu'il transforme de la manière la plus générale possible les  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires qui passent par un tout point fixé en position générale, alors ce groupe possède soit  $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ , soit  $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ , soit  $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$  paramètres. Dans chacun des trois cas, les groupes sont décrit par un système de générateurs explicites.

doit encore distinguer trois cas, selon que cette surface du second degré est imaginaire, ou réelle et non réglée, ou réelle et réglée.

À présent, nous recherchons tous les groupes réels à six paramètres qui sont semblables<sup>5</sup> à l'un des groupes : [1] ... [4].

Comme chacun des groupes : [1] ... [4] laisse invariante seulement la famille :  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ , mais nulle autre famille de  $\infty^2$  courbes, chaque groupe réel à six paramètres :  $X_1 f \dots X_6 f$  qui est semblable à l'un d'entre eux, laisse invariante une et seulement une famille de  $\infty^2$  courbes. De plus, cette famille doit nécessairement être réelle, car si elle était imaginaire, la famille des courbes imaginaires conjuguées resterait aussi invariante par le groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$ , puisqu'il est réel, et il y aurait alors deux familles invariantes distinctes, ce qui ne peut pas être le cas. Par une transformation ponctuelle réelle, nous pouvons maintenant transformer cette unique famille existante de  $\infty^2$  courbes en la famille :  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ , et par là, nous pouvons — dès le début — rapporter le groupe réel :  $X_1 f \dots X_6 f$  à la forme :

$$X_k f = \xi_k(x, y) p + \eta_k(x, y) q + \zeta_k(x, y, z) r$$

( $k = 1, 2 \dots 6$ ),

où naturellement les  $\xi_k$ ,  $\eta_k$ ,  $\zeta_k$  sont des fonctions réelles de leurs arguments.

Comme précédemment (*voir* p. 185), on obtient maintenant aussi les six transformations infinitésimales :

$$\bar{X}_k f = \xi_k(x, y) p + \eta_k(x, y) q \quad (k = 1 \dots 6),$$

qui forment évidemment un groupe réel dans l'espace des deux variables  $x, y$ ; et grâce au raisonnement de la page 186, on comprend immédiatement que ce groupe réduit doit posséder au moins cinq paramètres et que, si on l'interprète comme un groupe agissant sur un plan, alors chaque famille réelle ou imaginaire de  $\infty^1$  courbes qu'il laisse invariante doit être transformée par une action à trois paramètres.

Si maintenant le groupe réduit :  $\bar{X}_1 f \dots \bar{X}_6 f$  ne laisse invariante absolument aucune famille de  $\infty^1$  courbes dans le plan, alors d'après les pages 370 sq., il est semblable, *via* une transformation ponctuelle réelle, à l'un des deux groupes : (I), p. 188 et (V), p. 199. Si, d'un autre côté, il laisse invariante seulement une famille de  $\infty^1$  courbes, alors cette famille est nécessairement réelle et par suite, sur la base des développements des pages 378 sq., le groupe peut être rapporté, *via* une

<sup>5</sup> — par une transformation ponctuelle complexe —

transformation ponctuelle réelle, à l'une des trois formes : (II), (III), p. 188 et (VI), p. 199. Si enfin le groupe :  $\overline{X}_1 f \dots \overline{X}_6 f$  laisse invariantes deux familles distinctes de  $\infty^1$  courbes, alors il peut, lorsque ces deux familles sont réelles, recevoir la forme (IV), p. 188, et lorsqu'au contraire elles sont imaginaires conjuguées, la forme :

$$(VII) \quad \begin{cases} p, & q, & xp + yq, & yp - xq \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq, & 2xyp + (y^2 - x^2)q, \end{cases}$$

(cf. p. 380) et ceci, les deux fois, *via* une transformation ponctuelle réelle.

Si le groupe réduit :  $\overline{X}_1 f \dots \overline{X}_6 f$  a l'une des formes (I) ... (VI), alors en conduisant exactement les mêmes calculs que précédemment (voir de la p. 188 à la p. 204), on détermine toutes les formes possibles du groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$ , et alors, comme on s'en convainc facilement, on a seulement besoin, lors de l'effectuation de ces calculs, de transformations ponctuelles qui respectent pas à pas la réalité du groupe. Par là, nous voyons que les formes (I) et (II) du groupe réduit ne conduisent à aucun groupe réel possédant les qualités ici requises, et nous voyons aussi que chaque groupe réel :  $X_1 f \dots X_6 f$  qui satisfait nos exigences et dont le groupe réduit possède l'une des formes (III), ..., (VI) est semblable, *via* une transformation ponctuelle réelle, à l'un des groupes : [2]<sup>6</sup>, [1], [3], [4]. Et naturellement, le paramètre  $c$  qui apparaît dans les deux groupes [1] et [2] doit avoir une valeur réelle.

Enfin, si le groupe réduit :  $\overline{X}_1 f \dots \overline{X}_6 f$  a la forme (VII), alors le groupe :  $X_1 f \dots X_6 f$  est semblable, *via* une transformation imaginaire, à l'un des groupes de la forme [1], car le groupe (IV), p. 188 provient du groupe (VII), lorsqu'on introduit comme nouvelles variables  $x + iy$  et  $x - iy$  à la place de  $x$  et de  $y$ .

Nous ne voulons néanmoins faire aucun usage de cette circonstance, car il est préférable de déterminer directement tous les groupes réels à six paramètres qui satisfont nos exigences et dont les groupes réduits ont la forme (VII).

Ainsi, nous cherchons maintenant tous les groupes réels à six paramètres de la forme :

$$(56) \quad \begin{cases} p + \varphi_1 r, & q + \varphi_2 r, & xp + yq + \varphi_3 r, & yp - xq + \varphi_4 r \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r, & 2xyp + (y^2 - x^2)q + \varphi_6 r \end{cases}$$

<sup>6</sup> C'est le bon ordre.

relativement auxquels deux points ont un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de points supérieur à deux n'a aucun invariant essentiel ; ici,  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  sont naturellement des fonctions de  $x, y, z$ .

Exactement comme aux pages 188 sq., nous voyons<sup>7</sup> [*sehen wir ein*] que les trois premières transformations infinitésimales (56) peuvent être rapportées à la forme :

$$p, \quad q, \quad xp + yq + ar,$$

où  $a$  désigne une constante réelle, *via* une transformation ponctuelle, et pour préciser, *via* une transformation ponctuelle réelle.

En calculant le crochet de :  $yp - xq + \varphi_4 r$  avec  $p$  et avec  $q$ , nous voyons que  $\varphi_4$  est indépendant de  $x$  et de  $y$ . De plus, nous avons :

$$[xp + yq + ar, \quad yp - xq + \varphi_4(z)r] = a \varphi_4'(z) r,$$

et donc, si  $a$  ne s'annule pas, alors  $\varphi_4$  est aussi indépendant de  $z$  ; si au contraire  $a = 0$  et  $\varphi_4 \neq 0$ , nous introduisons la fonction réelle :

$$\int \frac{dz}{\varphi_4(z)}$$

comme nouvelle variable  $z$  et nous parvenons par cela à faire que  $\varphi_4 = 1$ . Par conséquent, nous pouvons réunir ces deux cas en rapportant les quatre premières transformations infinitésimales (56) à la forme :

$$p, \quad q, \quad xp + yq + ar, \quad yp - xq + br,$$

où  $b$  représente également une constante réelle.

---

<sup>7</sup> Dans un premier temps, on redresse les deux premières transformations en  $p$  et en  $q$ . Le crochet de la troisième avec  $p$  et avec  $q$  montre que  $\varphi_3$  ne dépend que de  $z$ . Si  $\varphi_3 \equiv 0$ , le travail est fini : il suffit de prendre  $a = 0$ . Si  $\varphi_3 \neq 0$ , en introduisant  $\int \frac{1}{\varphi_3} dz$  comme nouveau  $z$  (et en relocalisant bien sûr les considérations autour d'un point où  $\varphi_3$  ne s'annule pas), on redresse la troisième transformation en  $xp + yq + r$ , c'est-à-dire que  $a = 1$ . On réunit les deux cas en introduisant une constante  $a$ , qui sera de toute façon ramenée à être égale à 0 ou à 1 à la fin de la démonstration.

À présent, calculons les crochets :

$$\begin{aligned}
[p, (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r] &= 2(xp + yq) + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} r \\
[q, (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r] &= -2(yq - xp) + \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} r \\
[xp + yq + ar, (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r] &= (x^2 - y^2)p + 2xyq + \\
&\quad + \left\{ x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + a \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right\} r \\
[yp - xq + br, (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r] &= 2xyp + (y^2 - x^2)q + \\
&\quad + \left\{ y \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + b \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right\} r \\
[yp - xq + br, 2xyp + (y^2 - x^2)q + \varphi_6 r] &= -(x^2 - y^2)p - 2xyq + \\
&\quad + \left\{ y \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} + b \frac{\partial \varphi_6}{\partial z} \right\} r
\end{aligned}$$

d'où nous obtenons :

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = 2a, & \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = -2b \\ x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + a \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = \varphi_5 \\ y \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + b \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = \varphi_6 \\ y \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} + b \frac{\partial \varphi_6}{\partial z} = -\varphi_5. \end{cases}$$

De là, on tire tout d'abord :

$$\varphi_5 = 2(ax - by) + \omega(z), \quad a\omega'(z) = \omega(z) = a^2\omega''(z)$$

et par conséquent :

$$\varphi_6 = 2(bx + ay) + b\omega'(z);$$

mais si nous insérons cette valeur de  $\varphi_6$  dans la dernière des équations (57), viennent alors deux équations :

$$b^2\omega''(z) = -\omega(z) = -a^2\omega''(z),$$

qui, pour des valeurs réelles de  $a$  et de  $b$ , ne peuvent alors valoir que lorsque  $\omega(z)$  s'annule<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> On notera l'organisation fine des calculs : le terme  $-\omega(z)$ , dont la fin de la démonstration conclut qu'il s'annule identiquement, avait déjà été placé au centre plus haut, et maintenant, dans cette dernière équation, il est clair, puisque  $b^2$  et  $-a^2$  sont de signe opposé, que  $-\omega(z)$  au centre est à la fois de signe positif et de signe négatif, donc nul.

Ainsi, nous sommes parvenus au groupe :

$$(58) \quad \boxed{\begin{array}{l} p, \quad q, \quad xp + yq + ar, \quad yp - xq + br \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(ax - by)r \\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(bx + ay)r \end{array}} .$$

Ici, les constantes  $a$  et  $b$  ne doivent naturellement pas s'annuler toutes les deux, parce que sinon, le groupe serait intransitif ; si  $b = 0$ , nous pouvons toujours parvenir à faire que  $a = 1$  en introduisant une nouvelle variable  $z$ , et si au contraire,  $b$  ne s'annule pas, on peut toujours faire que  $b$  soit simplement égal à 1.

Comme on le trouve aisément, relativement au groupe (58), deux points  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  ont un et un seul invariant, à savoir celui-ci :

$$z_1 + z_2 - a \log \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\} + 2b \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En raisonnant comme précédemment (*cf.* par exemple p. 196), on pourrait aussi se convaincre facilement que si  $a$  et  $b$  ne s'annulent pas tous deux, trois points et plus n'ont aucun invariant essentiel ; toutefois, nous préférons démontrer cela en indiquant une transformation ponctuelle imaginaire qui envoie le groupe (58) sur le groupe [1] p. 205, puisque nous savons déjà du groupe [1] qu'il satisfait toutes nos exigences.

Si nous introduisons dans le groupe (58) les nouvelles variables :

$$x_1 = x + iy, \quad y_1 = x - iy, \quad z_1 = z,$$

nous obtenons le groupe :

$$\begin{array}{l} p_1 + q_1, \quad i(p_1 - q_1), \quad x_1 p_1 + y_1 q_1 + ar_1, \quad i(y_1 q_1 - x_1 p_1) + br_1 \\ x_1^2 p_1 + y_1^2 q_1 + \{(a + ib)x_1 + (a - ib)y_1\} r_1 \\ i(y_1^2 q_1 - x_1^2 p_1) + i\{(a - ib)y_1 - (a + ib)x_1\} r_1. \end{array}$$

Maintenant, comme  $a + ib \neq 0$ , nous pouvons encore introduire  $\frac{2z_1}{a+ib}$  comme nouvelle variable  $z_1$  et obtenir ainsi un groupe qui a exactement la forme [1]. Ainsi, le groupe (58) est semblable au groupe [1] *via* la transformation imaginaire :

$$x_1 = x + iy, \quad y_1 = x - iy, \quad z_1 = \frac{2z}{a+ib},$$

et en fait, aux paramètres  $a$  et  $b$  du groupe (58) correspond alors la valeur :

$$(59) \quad c = \frac{a-ib}{a+ib}$$

du paramètre  $c$  du groupe [1].

Avec ceci, on a démontré que le groupe réel (58) satisfait toutes nos exigences, et on a maintenant trouvé en toute généralité tous les groupes réels qui les satisfont.

**Théorème 37.** *Si un groupe continu fini réel de l'espace des  $x, y, z$  est donné de telle sorte que relativement à lui, deux points ont un et un seul invariant et que les invariants d'un nombre de points supérieur à deux peuvent tous s'exprimer au moyen des invariants des paires de points, alors ce groupe possède six paramètres et il est semblable [ähnlich], via une transformation ponctuelle réelle de l'espace, à l'un des onze groupes suivants :*

$$1 \quad p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp - xr$$

$$2 \quad p, q, r, xq - yp, yr + zq, zp + xr$$

$$3 \quad p + xU, q + yU, r + zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$$

$$4 \quad p - xU, q - yU, r - zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$$

$$5 \quad p - xU, q - yU, r + zU, xq - yp, yr + zq, zp + xr$$

$$6 \quad p, q, xp + yq + cr, yp - xq + r \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(cx - y)r, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(x + cy)r$$

$$7 \quad p, q, xp + yq + r, yp - xq \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr$$

$$8 \quad p, q, xp + r, yq + cr, x^2p + 2xr, y^2q + 2cyr \\ (c \neq 0)$$

$$9 \quad p, q, xq + r, x^2q + 2xr, xp + yq + cr \\ x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r$$

$$10 \quad p - yr, q + xr, r, xq, xp - yq, yp$$

11

$$\begin{array}{l} p, \quad q, \quad r, \quad xq + yr, \quad 2xp + yq \\ x^2p + xyq + \frac{1}{2}y^2r \end{array}$$

Ici, le paramètre réel  $c$  est à chaque fois essentiel et ne peut pas être supprimé.

Pour faciliter la compréhension de ce tableau, nous ajoutons encore les remarques suivantes.

Pour abrégé, on écrit chaque fois  $U$  à la place de  $xp + yq + zr$ .

Le groupe **2** laisse invariante la conique qui découpe la sphère réelle :  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  sur le plan à l'infini, et ce groupe provient du groupe **1** constitué des mouvements euclidiens lorsqu'on remplace  $z$  par  $iz$ .

Le groupe **4** laisse invariante la surface réelle du second degré non réglée :  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  et le groupe **5**, la surface réelle réglée :  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Ces groupes sont obtenus à partir du groupe **3** de la surface :  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ , lorsqu'on introduit soit  $ix, iy, iz$ , soit  $ix, iy, z$  comme nouvelles variables, et l'on peut alors très simplement indiquer quel est l'invariant de deux points qui leur correspond, grâce aux pages 184 sq.

À la place du groupe (58) se trouvent dans notre tableau les deux groupes **6** et **7**, parce que, d'après la page 214, l'un des deux paramètres  $a$  et  $b$  peut toujours être rendu simplement égal à 1 ; cependant, on doit faire attention au fait que dans le groupe **6**, la valeur du paramètre  $c$  doit être limitée aux seules valeurs qui sont  $\geq 0$ , car les deux groupes qui correspondent aux paramètres  $+c$  et  $-c$  sont semblables, comme on s'en convainc immédiatement, lorsqu'on intervertit  $x$  et  $y$  et qu'on remplace  $z$  par  $-z$ .

Les groupes **8** ... **11** sont les groupes [1] ... [4] de la page 205 ; on doit encore mentionner spécialement que dans le groupe **8**, on a seulement besoin de donner à  $c$  des valeurs telles que  $c^2 \leq 1$ , car par la transformation :

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = \frac{z}{c},$$

le groupe s'envoie sur un groupe de la même forme, dont le paramètre possède la valeur  $\frac{1}{c}$ .

## § 90.



En quelques mots, nous voulons maintenant expliquer comment on peut résoudre dans le plan le problème que nous venons de résoudre pour l'espace trois fois étendu.

Si un groupe continu fini du plan doit être constitué de telle sorte que relativement à son action, deux points ont un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de points supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel, alors on vérifie en premier lieu, comme au § 85, que le groupe est transitif, qu'il doit posséder trois paramètres et qu'il ne peut pas contenir deux transformations infinitésimales ayant les mêmes courbes intégrales.

Inversement, il est clair que relativement à tout groupe transitif  $G$  du plan à trois paramètres, deux points ont toujours un et un seul invariant<sup>1</sup>. Si de plus  $G$  ne contient pas deux transformations infinitésimales ayant les mêmes courbes intégrales, on peut démontrer qu'un nombre de points supérieur à deux n'a jamais d'invariant essentiel<sup>2</sup>.

En effet, si l'on fixe un point  $P_1$  en position générale, il reste encore un sous-groupe à un paramètre de  $G$  par l'action duquel les autres points du plan se meuvent sur  $\infty^1$  courbes, à savoir sur les pseudocercles de centre  $P_1$  appartenant à  $G$ . S'il y avait seulement  $\infty^1$  pseudocercles, ces pseudocercles ne dépendraient pas de leur centre, et par suite, la transformation infinitésimale de  $G$  qui laisse invariant le point  $P_1$  aurait les mêmes courbes intégrales que la transformation infinitésimale indépendante d'elle qui laisse invariant un autre point quelconque en position générale. Mais comme cela ne doit pas se produire, nous pouvons en conclure qu'il y a au minimum  $\infty^2$  pseudocercles. Si maintenant on fixe, outre le point  $P_1$ , encore un deuxième point  $P_2$  en position générale, alors les deux pseudocercles de centre  $P_1$  et  $P_2$ , qui passent par un troisième point en position générale  $P_3$ , se coupent en  $P_3$ , et mis à part  $P_3$ , ils se coupent au maximum en des points isolés<sup>3</sup>; par conséquent, dès que  $P_1$  et  $P_2$  sont fixés, chaque autre point  $P$  du plan reste en général au repos, et pour préciser, à cause des deux invariants qui appartiennent

<sup>1</sup> Soit  $X_1, X_2, X_3$  les trois transformations infinitésimales d'un tel groupe du plan. Un invariant quelconque  $J = J(x_1, y_1; x_2, y_2)$  entre deux points satisfait les équations  $0 \equiv X_k^{(1)} J + X_k^{(2)} J$ , pour  $k = 1, 2, 3$ . Ces 3 équations (intégrables au sens de Frobenius) sur un espace de dimension 4 sont automatiquement indépendantes dès que le groupe est transitif. Aussi existe-t-il exactement  $4 - 3 = 1$  invariant  $J(x_1, y_1; x_2, y_2)$ .

<sup>2</sup> La Proposition 4 p. 181 traitait déjà le cas de la dimension 3.

<sup>3</sup> Analyticité ...

aux deux paires de points  $P_1, P$  et  $P_2, P$ . Il en découle que, sous les hypothèses posées, tous les invariants d'un nombre de points supérieur à trois peuvent être exprimés au moyen des invariants des paires de points (cf. aussi p. 182 sq.).

Si donc nous cherchons tous les groupes du plan qui possèdent la propriété connue concernant les invariants de plusieurs points, et si tout d'abord, nous ne tenons pas compte de la condition de réalité, nous avons seulement besoin de rechercher, parmi les groupes à trois paramètres qui sont rassemblés à la page 57<sup>4</sup>, ceux qui sont transitifs et qui n'ont jamais deux transformations infinitésimales possédant les mêmes courbes intégrales. Nous trouvons de cette façon seulement les quatre groupes suivants :

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{p, q, xp + cyq} \\ \quad (c \neq 0) \\ \boxed{p + x^2p + xyq, q + xyp + y^2q, yp - xq} \\ \boxed{xq, xp - yq, yp} \\ \boxed{p, q, xp + (x + y)q} \end{array} \right.$$

Ici, le groupe :

$$p, xp + yq, x^2p + (2xy + y^2)q$$

est remplacé par le groupe projectif de la conique :  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  (cf. p. 70, p. 76 et p. 88). Pareillement, le groupe :  $p, 2xp + yq, x^2p + xyq$  est remplacé par un groupe projectif qui lui est semblable (cf. p. 95).

Les invariants des deux points  $x_1, y_1$  et  $x_2, y_2$  pour les groupes (60), écrits l'un après l'autre, ont l'expression suivante :

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \log(x_2 - x_1)^2 - \log(y_2 - y_1)^2, \quad \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (x_2 - x_1) e^{-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \end{array} \right.$$

Si l'on veut avoir tous les groupes réels du plan qui possèdent les caractéristiques requises, on doit ajouter aux groupes (60) encore les

<sup>4</sup> À cet endroit sont listés tous les groupes locaux à un, deux, trois ou quatre paramètres qui agissent en dimension deux.

deux suivants (cf. pp. 370 sq. et p. 209) :

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{p, q, yp - xq + c(xp + yq)} \\ \boxed{p - x^2p - xyq, q - xyp - y^2q, yp - xq} \end{array} \right. .$$

Le premier d'entre eux fournit l'invariant suivant\* :

$$(63) \quad \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\} e^{2c \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} ;$$

le second provient du deuxième des groupes (60), lorsqu'on introduit  $ix, iy$  comme nouvelles variables à la place de  $x, y$  et par là, l'invariant qui lui appartient peut être immédiatement indiqué\*\*.

---

\* Monsieur de Helmholtz s'est en tout cas préoccupé, déjà en 1868, d'une recherche dont le but peut s'énoncer, avec notre manière actuelle de nous exprimer, comme suit : déterminer les groupes du plan relativement auxquels deux points ont un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de points supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel. À cette époque, il avait déjà remarqué que dans le plan, on peut imaginer une famille de mouvements relativement auxquels deux points possèdent l'invariant (63).

\*\* Déjà dans les années 1874–76, Lie a déterminé tous les groupes à trois paramètres du plan, sans toutefois ajouter l'écriture de tous les calculs jusque dans les détails (Gött. Nachr. v. 1874 ; norwegisches Archiv 1878). En l'année 1884, il a donné ensuite une énumération détaillée des différentes formes normales auxquelles tous les groupes de ce genre peuvent être rapportées. Plus tard (en 1887) Monsieur Poincaré s'est préoccupé des fondements de la géométrie du plan, et dans son travail relatif à ce sujet (Bull. de la Soc. Math., vol. 15), il a aussi pris en considération les recherches relativement anciennes de Lie sur la théorie des groupes, tandis qu'il ne connaissait ni le travail de Lie de 1884, ni la première communication de Lie sur les fondements de la géométrie (1886), pas plus que l'étude helmholtzienne de l'année 1868. Les conclusions intéressantes auxquelles Monsieur Poincaré est parvenu résultent en vérité immédiatement des recherches anciennes de Lie.

## Chapitre 21.

### **Critique des recherches helmholtziennes.**

Monsieur de Helmholtz a apporté, dans son travail déjà cité à la page 162, un traitement du problème de Riemann-Helmholtz que nous voulons maintenant examiner de plus près.

Nous commençons (dans le § 91) par restituer la teneur des axiomes qu'il a posés. Ensuite (dans les § 92 et 93), nous établissons quelles contenus ces axiomes peuvent recevoir lorsqu'on se sert de la manière dont on s'exprime dans la théorie des groupes. Dans le § 94 nous fournissons une critique des conclusions que Monsieur de Helmholtz a tirées de ses axiomes au sujet de l'espace étendu dans trois directions, et nous montrons qu'*il est parvenu à son résultat final en présupposant tacitement toute une série d'hypothèses qui sont absolument incorrectes.*

Si l'on veut supprimer ces défauts très substantiels des développements helmholtziens, il se présente deux voies différentes : on peut soit laisser complètement de côté les axiomes de M. de Helmholtz et seulement envisager ses calculs, soit partir de ses axiomes comme point de départ, sans prendre en considération ses calculs.

Nous nous engageons dans la première voie au § 96, où nous montrons *quels axiomes doivent être posés, afin de parvenir au but en effectuant des calculs qui sont analogues, par leurs idées fondamentales, aux calculs helmholtziens.*

Dans le § 96, nous empruntons la deuxième voie, et nous exposerons séparément quelles conclusions la théorie des groupes permet de tirer à partir des axiomes de Helmholtz. On obtiendra alors comme résultat que ces axiomes (si on les interprète d'une manière assez voisine) suffisent certes à caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens de l'espace à trois dimensions, mais qu'en tout cas, l'un des axiomes de Helmholtz, à savoir l'axiome de monodromie, est superflu.

Le résultat ainsi obtenu soulève la question relativement proche : savoir si l'on ne peut pas se passer aussi d'autres parties des axiomes de Helmholtz. La réponse à cette question sera donnée dans le Chapitre 23 ; on montrera que *les axiomes de Helmholtz restants renferment aussi des éléments superflus.*

## § 91. Les axiomes helmholtziens.

Au fondement de sa recherche, Monsieur de Helmholtz place les axiomes suivants, ou, hypothèses, comme il les appelle\* :

« **I.** L'espace à  $n$  dimensions est une variété  $n$  fois étendue, c'est-à-dire que l'élément individuel défini en celui-ci, le point, peut être déterminé par la mesure de variables quantitatives continues et indépendantes les unes des autres (coordonnées), dont le nombre est égal à  $n$ . Chaque mouvement d'un point est ainsi accompagné par une modification continue d'au moins une des coordonnées. S'il devait y avoir des exceptions dans lesquelles, soit la modification deviendrait discontinue, soit, malgré le mouvement, absolument aucune modification de toutes les coordonnées ne se produirait, alors ces exceptions devraient être limitées à certains lieux définis par une ou plusieurs équations (donc à des points, à des lignes, à des surfaces, *etc.* ), et ces lieux peuvent initialement rester exclus de la recherche.

« On doit remarquer que par la continuité du changement au cours du mouvement, on ne signifie pas seulement que toutes les valeurs intermédiaires jusqu'à la valeur finale sont parcourues par la quantité qui se différencie d'elle-même<sup>1</sup>, mais aussi que les quotients différentiels existent, c'est-à-dire que le rapport des changements associés des coordonnées se rapproche d'un rapport fixe, lorsque les grandeurs de ces changements diminuent progressivement.

« **II.** On présuppose l'existence de corps mobiles mais rigides en eux-mêmes, c'est-à-dire de systèmes de points, comme cela est nécessaire pour pouvoir effectuer la comparaison des grandeurs spatiales par congruence. Mais comme nous ne sommes pas encore autorisés à présupposer une méthode spéciale pour la mesure des grandeurs spatiales, la définition d'un corps rigide, ici, ne peut être que la suivante : *entre les  $2n$  coordonnées de chaque paire de points qui appartient à un corps rigide en lui-même, il existe une équation indépendante du mouvement de ce dernier, qui reste la même pour toutes les paires de points congruentes.*

« Sont *congruentes* les paires de points qui peuvent être amenées à coïncider simultanément, ou l'une après l'autre, avec la même paire de points de l'espace.

« **III.** *On présuppose une mobilité parfaitement libre des corps rigides*, c'est-à-dire, on suppose que chaque point en eux peut être déplacé continûment vers le lieu de chaque autre point, tant que son mouvement n'est pas restreint

---

\* Gött. Nachr. 1868, p. 197 sq.

<sup>1</sup> Les symétries par rapport à un hyperplan, telles que  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ne sont pas admises, car elles ne sont pas reliées à la transformation identique par une famille *continue* de mouvements puisqu'elles renversent l'orientation.

par les équations qui existent entre lui et les autres points restants du système rigide auquel il appartient.

« Le premier point d'un système rigide en lui-même est donc absolument mobile. Lorsque ce point est fixé, il existe une équation pour le deuxième point et l'une de ses coordonnées devient une fonction des  $(n - 1)$  coordonnées restantes. Après que le deuxième point est aussi fixé, il existe deux équations pour le troisième point, *etc.* Par conséquent, ce sont au total  $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$  quantités qui sont requises pour la détermination de la position d'un corps rigide en lui-même.

« Il découle de cette supposition et de celle énoncée en II, que, *si deux systèmes de points rigides en eux-mêmes A et B peuvent être, dans une première position initiale de A, rapportés à une congruence de points correspondants, alors, pour toute autre position de A, ils doivent pouvoir être rapportés à la congruence de tous les mêmes points qui étaient congruents auparavant.* Cela veut dire, en d'autres termes, que la congruence de deux objets spatiaux ne dépend pas de leur situation initiale, ou encore que toutes les parties de l'espace, lorsqu'on fait abstraction de leurs bornes, sont congruentes les unes aux autres.

« **IV.** On doit finalement attribuer encore à l'espace une propriété qui est analogue à la *monodromie* des fonctions d'une variable complexe, et qui exprime en elle-même que deux corps congruents sont encore à nouveau congruents après que l'un d'eux a subi une révolution complète autour d'un axe de rotation arbitraire. Une *rotation* est caractérisée analytiquement en ceci qu'un certain nombre de points du corps en mouvement conservent leurs coordonnées inchangées au cours du mouvement; un *retour en arrière* du mouvement est caractérisé par le fait que les complexes de valeurs des coordonnées qui se transformaient auparavant continûment l'un dans l'autre sont parcourus en sens inverse. Nous pouvons donc exprimer le fait concerné comme suit : *Lorsqu'un corps rigide tourne autour de  $(n - 1)$  de ses points et que ces points sont choisis de telle sorte que sa position ne dépend plus que d'une variable indépendante, alors la rotation sans retour en arrière le reconduit finalement à la situation initiale dont il est parti.* »

Les axiomes de Monsieur de Helmholtz ici reproduits attribuent certaines propriétés aux mouvements de l'espace  $n$  fois étendu, et il s'agit essentiellement maintenant de déterminer tous les systèmes possibles de mouvements pour lesquels les propriétés indiquées se manifestent. Afin de pouvoir employer notre théorie des groupes pour résoudre ce problème, nous devons avant toute chose montrer que nous avons au fond affaire ici à un problème de la théorie des groupes. C'est ce qui se va se passer dans le prochain paragraphe.

## § 92.

### Conséquences des axiomes helmholtziens.

Le *premier* des axiomes helmholtziens exprime simplement que les mouvements continus sont possibles et il détermine ce qui doit être entendu en général par « mouvement continu ».

Lorsqu'on considère un mouvement de l'espace  $n$  fois étendu, on s'imagine de la manière la plus commode deux espaces  $n$  fois étendus contenus l'un dans l'autre, dont l'un est fixe, et l'autre mobile<sup>1</sup> ; la nature particulière du mouvement considéré spécifie alors de quelle manière les points individuels de l'espace en mouvement modifient leur situation à l'intérieur de l'espace fixe. Maintenant, l'Axiome I demande que chaque mouvement soit accompagné d'une modification continue des coordonnées du point qui se déplace. Par conséquent, si nous nous imaginons un mouvement quelconque qui commence pour le temps  $t = 0$  et qui est continu pendant un certain temps  $t$ , et si nous admettons qu'un point quelconque de l'espace mobile a les coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  au temps  $t = 0$  par rapport à l'espace fixe, et qu'il a les coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  au temps  $t$ , alors notre mouvement sera représenté par des équations de la forme :

$$(1) \quad x_\nu = F_\nu(x_1, \dots, x_n, t) \quad (\nu=1 \dots n),$$

qui pour  $t = 0$  se réduisent aux équations :  $x_\nu = x_\nu$  ; avec cela, les  $F_\nu$  sont des fonctions réelles de leurs arguments.

Ainsi, nous voyons que chaque mouvement continu de l'espace  $n$  fois étendu fournit une famille continue de  $\infty^1$  transformations ponctuelles réelles, et pour préciser, une famille dans laquelle est contenue la transformation identique.

Pour ce qui touche à la nature des fonctions  $F_\nu$ , remarquons que Monsieur de Helmholtz présuppose en tout cas l'existence des quotients différentiels du premier ordre par rapport à  $x$  et à  $t$  ; cela découle déjà de l'Axiome I, bien que ce ne soit pas énoncé avec toute la certitude désirable, mais cela devient indubitable lorsqu'on envisage les calculs situés aux pages 202–206 de son travail. À cet endroit-là, Monsieur de Helmholtz utilise par ailleurs aussi l'existence de certains *quotients différentiels du second ordre*, lorsqu'il différencie notamment d'abord par rapport à  $x$  et ensuite par rapport au paramètre présent, ce qui correspondrait au fait que les quotients différentiels des  $F_\nu$  par rapport à  $x$  sont différentiables de leur côté par rapport à  $t$ .

<sup>1</sup> En dimension deux, l'espace fixe sera une grande région rectangulaire et plane, tandis que l'espace mobile, superposé tel une nappe liquide, glissera de par toutes ses parties, d'un seul tenant, avec des franges libres.

On doit en outre observer que Monsieur de Helmholtz exclut de la considération les circonstances où la continuité est interrompue. Nous pouvons exprimer cela plus rigoureusement, en établissant, comme on le fait par ailleurs couramment, que l'on doit se restreindre dans toute la recherche à une portion limitée de l'espace, à l'intérieur de laquelle toutes les fonctions qui se présentent et leurs premiers quotients différentiels sont continus ; il s'agit là de fixer les concepts d'une manière qui est exactement la même que celle vers laquelle nous avons déjà convergé<sup>2</sup> depuis toujours dans nos recherches générales sur les groupes continus.

Dans son *deuxième* axiome, Monsieur de Helmholtz caractérise plus précisément les mouvements de l'espace  $n$  fois étendu, lorsqu'il indique comment deux points quelconques de l'espace mobile mentionné ci-dessus se comportent l'un par rapport à l'autre au cours des différents mouvements. Naturellement, les exigences de l'Axiome II, et également celles des axiomes suivants, se réfèrent seulement aux points qui se trouvent à l'intérieur d'une telle portion limitée de l'espace  $n$  fois étendu, et qui y demeurent aussi au cours du mouvement.

Considérons notre espace mobile dans une situation quelconque à l'intérieur de l'espace fixe et envisageons deux points quelconques de l'espace mobile, qui ont les coordonnées :  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$  par rapport à l'espace fixe ; les quantités :  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$  possèdent alors des valeurs numériques déterminées, que nous pouvons cependant nous imaginer comme étant choisies de manière absolument quelconque. En outre, soit  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  les coordonnées des deux points en question lorsqu'ils sont dans une autre position quelconque de l'espace mobile. Le deuxième axiome helmholtzien demande alors qu'entre les coordonnées  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ , il existe une équation qui est indépendante de tous les mouvements, donc une équation qui est aussi satisfaite, dans toute nouvelle position de notre paire de points, par les coordonnées de ses deux points. De plus, dans l'axiome, il apparaît explicitement qu'entre les  $2n$  coordonnées de toute paire de points qui appartient à un corps rigide, une telle équation doit exister. En cela réside le fait que l'équation entre  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  doit toujours être une équation véritable, quelle que soit la manière dont la position initiale :  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$  des deux points peut être choisie<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> À ce sujet, voir les principes de pensée p. 79 sq.

<sup>3</sup> On s'attend à ce que l'équation mentionnée dépende des quatre variables  $x, y, x^0$  et  $y^0$ , comme c'est le cas pour l'équation  $\|x - y\| = \|x^0 - y^0\|$  qui exprime la



Dans l'Axiome II, il est demandé en plus que l'équation en question soit la même pour toutes les paires de points congruents, donc pour toutes les paires de points qui peuvent être envoyées l'une sur l'autre par les mouvements ; par conséquent, elle ne dépend, en dehors de  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ , que des coordonnées quelconques d'une paire de points congruents que l'on peut choisir librement, par exemple de  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$ , donc cette équation peut être rapportée à la forme <sup>4</sup> :

$$(2) \quad \Phi(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0, x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = 0.$$

En particulier, cette équation doit encore être satisfaite lorsque la paire de points  $x_\nu, y_\nu$  coïncide avec la paire de points  $x_\nu^0, y_\nu^0$ , et comme on peut donner aux quantités  $x_\nu^0, y_\nu^0$  des valeurs numériques quelconques, et que donc par suite il ne peut pas exister de relation seulement entre :  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$ , il en découle que l'équation (2) doit se réduire à une identité lorsqu'on fait la substitution :

$$x_\nu = x_\nu^0, \quad y_\nu = y_\nu^0 \quad (\nu = 1 \dots n).$$

De là, il suit en même temps que (2) ne peut pas être libre de toutes les  $2n$  quantités  $x_\nu^0, y_\nu^0$ .

À présent, imaginons-nous que la paire de points  $x_\nu, y_\nu$  est soumise à un mouvement continu qui est représenté par l'équation (1) ; elle est ainsi envoyée sur une nouvelle paire de points, dont les points possèdent les coordonnées :

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_\nu = F_\nu(x_1 \dots x_n, t) \\ \eta_\nu = F_\nu(y_1 \dots y_n, t) \\ (\nu = 1 \dots n) \end{cases}$$

dans l'espace fixe. Puisque cette nouvelle paire de points doit satisfaire la même équation que la paire de points  $x_\nu, y_\nu$ , il en découle que l'équation :

$$(2') \quad \Phi(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0, \xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n) = 0$$

est valide, quelle que soit la valeur de  $t$ . Si nous effectuons la substitution (3) dans cette équation, nous obtenons une équation entre  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  et  $t$  qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs de  $t$ . Si nous nous souvenons ici que  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  sont liés par la relation (2) et

---

conservation de la norme euclidienne  $\|z\| := (z_1^2 + \dots + z_n^2)^{1/2}$  à travers tous les déplacements.

<sup>4</sup> Plus bas, l'équation (7) ramènera encore plus précisément cette relation synchrétique à la forme symétrique et résolue  $\Omega(x, y) = \Omega(x^0, y^0)$ .

que cette relation doit être indépendante de tous les mouvement, alors nous réalisons que par la substitution (3), l'équation (2') doit se transformer en une équation qui est équivalente à (2). Si tel n'était pas le cas, alors par la substitution (3), l'équation (2') ne se transformerait pas en une équation qui est une conséquence de (2), donc l'équation (2) entre les coordonnées des paires de points mobiles ne serait manifestement pas indépendante du mouvement, mais au contraire, elle changerait au cours du mouvement.

Puisque l'équation (2) ne peut pas être libre des  $2n$  quantités  $x_\nu^0, y_\nu^0$ , nous sommes autorisés à nous imaginer qu'elle est résolue par rapport à l'une de ces quantités, par exemple, par rapport à  $y_n^0$  :

$$(4) \quad y_n^0 = \varphi(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_{n-1}^0, x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n).$$

D'après ce qui a été dit à l'instant, on obtient à présent que l'équation :

$$(4') \quad y_n^0 = \varphi(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_{n-1}^0, \xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n)$$

se transforme en (4) par la substitution (3), et puisque nous pouvons attribuer aux quantités  $x_\nu^0, y_\nu^0$  toutes les valeurs numériques quelconques, ceci doit valoir aussi quelles que soient les valeurs que peuvent avoir  $x_\nu^0, y_\nu^0$ , c'est-à-dire que l'équation :

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_{n-1}^0, \xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n) = \\ = \varphi(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_{n-1}^0, x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) \end{cases}$$

doit se transformer en une identité par la substitution (3).

Tout ceci reste encore vrai aussi, lorsque l'on attribue aux quantités :  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_{n-1}^0$  des valeurs numériques déterminées :  $\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_{n-1}$  ; si donc nous posons :

$$\varphi(\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_{n-1}, x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = \Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$$

nous obtenons à partir de (5) l'équation :

$$(6) \quad \Omega(\xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n) = \Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n),$$

qui se transforme également en une identité par la substitution (3). Nous trouvons ainsi que les deux points  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  possèdent l'invariant :  $\Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$  relativement aux  $\infty^1$  transformations (1). En même temps, il en découle que l'équation (2), ou l'équation (4) qui

lui est équivalente, peut être rapportée à la forme<sup>5</sup> :

$$(7) \quad \Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = \Omega(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0).$$

Les équations (1) représentent un mouvement quelconque parmi les mouvements continus qui sont admissibles, et ce, de la manière la plus générale possible ; les mêmes considérations que celles émises auparavant montrent alors que la fonction  $\Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$  des coordonnées de la paire de points  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  conserve sa valeur numérique à travers tous les mouvements dont est susceptible cette paire de points ; et que donc, en prenant pour base le deuxième axiome helmholtzien, chaque paire de points appartenant à l'espace mobile mentionné précédemment possède un *invariant* relativement à tous les mouvements. En d'autres termes :

Soit :

$$\mathfrak{x}_\nu = F_\nu(x_1 \dots x_n, t) \quad (\nu = 1 \dots n)$$

la famille de  $\infty^1$  transformations qui est déterminée par un mouvement continu quelconque de l'espace  $n$  fois étendu, alors deux points :  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  possèdent toujours un invariant :

$$\Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$$

relativement à la famille (1) ; et pour préciser, les deux points ont cet invariant relativement à toute famille de  $\infty^1$  transformations, qui est spécifiée comme étant l'un des mouvements continus admissibles de l'espace le plus général possible.

Toutefois, on doit souligner que l'existence d'un tel invariant est seulement une conséquence du deuxième axiome helmholtzien, et qu'en revanche, l'exigence qu'il doit exister un tel invariant ne peut pas être substituée complètement à cet axiome.

En effet, le deuxième axiome demande, comme nous l'avons vu plus haut, qu'entre les coordonnées de deux points distincts l'un de l'autre dans notre espace mobile, il existe une équation indépendante du mouvement, et pour préciser, une véritable équation<sup>6</sup>, donc une équation qui n'est pas sans signification pour une paire de points individuelle. Si maintenant deux points :  $x_1 \dots x_n$  et  $y_1 \dots y_n$  de l'espace mobile ont

<sup>5</sup> Cette dernière équation déduite, aussi bien que l'équation abstraite (7) postulée p. 169, réfère sémantiquement à la conservation  $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(x^0, y^0)$  d'une « distance » en un certain sens généralisé ; les résultats de la recherche le préciseront.

<sup>6</sup> En toute rigueur, Helmholtz a effectivement oublié de requérir que l'équation invariante soit non triviale, sain réflexe logique dont nul géomètre ne doit manquer.

l'invariant :  $\Omega(x, y)$  relativement à tous les mouvements, alors il s'ensuit — à vrai dire en toute généralité — qu'entre leurs  $2n$  coordonnées, il existe une équation indépendante de tous les mouvements, à savoir l'équation :

$$(7) \quad \Omega(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n) = \Omega(x_1^0 \dots x_n^0; y_1^0 \dots y_n^0),$$

dans laquelle les deux systèmes de valeurs distincts l'un de l'autre :  $x_1^0 \dots x_n^0$  et  $y_1^0 \dots y_n^0$ , désignent les coordonnées de la paire de points :  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  dans une situation initiale quelconque bien définie de l'espace mobile ; dans certains cas exceptionnels, il peut cependant se produire que (7) ne représente pas d'équation véritable entre  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ , par exemple lorsque le membre de droite de (7) prend une forme absolument nulle pour certains systèmes de valeurs :  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$ .

Il s'ensuit de là qu'afin d'épuiser complètement le contenu du deuxième axiome helmholtzien, nous ne pouvons pas nous contenter, pour toute paire de points, de requérir l'existence d'un invariant, mais nous devons encore ajouter une deuxième exigence, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

*L'invariant  $\Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$  de la paire de points :  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$  doit être constitué de telle sorte que l'équation (7) soit toujours une équation véritable entre  $x_1 \dots x_n$  et  $y_1 \dots y_n$ , quelles que soient les différentes valeurs numériques qu'on puisse donner à  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$ .*

Il va de soi que cette exigence doit être satisfaite seulement pour les systèmes de valeurs :  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$  qui appartiennent à la région limitée de l'espace  $n$  fois étendu qui a été mentionnée précédemment.

Avant que nous passions à la considération du troisième axiome helmholtzien, nous voulons auparavant mentionner certaines conséquences qui se laissent déduire de l'existence de l'invariant  $\Omega(x, y)$ .

Supposons que les équations :

$$(8) \quad x'_\nu = F_\nu(x_1 \dots x_n; t) \quad (\nu = 1 \dots n)$$

et

$$(9) \quad x''_\nu = \Phi_\nu(x'_1 \dots x'_n; \tau) \quad (\nu = 1 \dots n)$$

représentent deux mouvements continus quelconques de l'espace  $n$  fois étendu. Si nous nous imaginons d'abord le mouvement (8) s'accomplissant pendant le temps  $t$ , et ensuite le mouvement (9) pendant le temps

$\tau$ , alors le point :  $x_1 \dots x_n$  se trouvera finalement dans la position :  $x''_1 \dots x''_n$  qui est définie par les équations :

$$(10) \quad x''_\nu = \Phi_\nu(F_1(x, t) \dots F_n(x, t); \tau) \quad (\nu = 1 \dots n).$$

Maintenant, comme ces équations (10) représentent évidemment une transformation, on en déduit que par l'effectuation de deux mouvements l'un à la suite de l'autre, on obtient toujours une certaine transformation de l'espace. La même chose vaut naturellement lorsqu'on effectue un nombre quelconque de tels mouvements l'un à la suite de l'autre.

Si nous nous souvenons maintenant que les deux points :  $x_1 \dots x_n$ ,  $y_1 \dots y_n$  ont l'invariant  $\Omega(x, y)$  non seulement relativement à la transformation (8), mais aussi relativement à la transformation (9), nous voyons alors immédiatement qu'ils possèdent cet invariant relativement à toute transformation (10), et plus généralement, relativement à toute transformation qui est obtenue par accomplissement de plusieurs mouvements l'un à la suite de l'autre. Par conséquent :

*Si l'on effectue un mouvement continu, ou plusieurs mouvements de cette sorte l'un à la suite de l'autre, alors on obtient toujours une transformation relativement à laquelle deux points quelconques :  $x_\nu$  et  $y_\nu$  ont l'invariant  $\Omega(x, y)$ .*

Au moyen du mouvement continu le plus général possible qui soit admissible, une certaine famille de transformations de l'espace est donc spécifiée de telle sorte que, relativement à cette famille, deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  ont l'invariant  $\Omega(x, y)$ . Nous ne pouvons pas dire pour l'instant de quelle nature particulière est faite cette famille, puisque c'est le troisième axiome helmholtzien qui donne la première information là-dessus. On ne peut d'ailleurs même pas encore conclure du contenu du deuxième axiome que deux points doivent avoir *seulement* un invariant.

Le troisième axiome de Monsieur de Helmholtz (voir p. 221, lignes 1 à 11 ci-dessus) est constitué de deux parties.

La première partie (l. 1 à 5) peut être, si l'on tient compte de ce qui a été dit auparavant, formulée de la manière suivante : chaque point de l'espace mobile doit pouvoir être déplacé continûment dans le lieu de chaque autre point de cet espace, tant qu'il n'est pas restreint par le fait que les invariants de toutes les paires de points de l'espace mobile auquel il appartient doivent conserver leur valeur numérique au cours du mouvement.

En cela réside le fait que chaque invariant que possède un système quelconque de points :  $P_1, P_2, P_3 \dots$  relativement à tous les mouvements, doit se laisser exprimer au moyen des invariants des paires de points qui sont contenues dans le système. Si en effet  $J$  est un invariant quelconque que le système de points :  $P_1, P_2, P_3 \dots$  a relativement à tous les mouvements, alors la fonction  $J$  conserve sa valeur numérique au cours de tous les mouvements. Si maintenant  $J$  ne se laissait pas exprimer au moyen des invariants des paires de points :  $P_1, P_2$  ;  $P_1, P_3$  ;  $P_2, P_3$  ;  $\dots$ , alors la mobilité du système de points :  $P_1, P_2, P_3 \dots$  ne serait pas seulement limitée par le fait que les invariants de ces paires de points-là devraient conserver leur valeur numérique au cours du mouvement, mais elle serait aussi limitée par la condition indépendante par rapport à celles-là que  $J$  doit conserver toujours sa valeur numérique ; mais cela contredirait l'axiome posé ci-dessus.

Il suit alors de la première partie du troisième axiome helmholtzien qu'un point n'a absolument aucun invariant relativement à tous les mouvements et que trois points (ou plus) ne possèdent, relativement à tous les mouvements, que les invariants qui s'expriment au moyen des invariants des paires de points qui sont contenues en eux ; autrement dit : *un point individuel n'a en général aucun invariant ; deux points ont en tout cas un invariant relativement à tous les mouvements possibles ; mais au contraire, trois points (ou plus) n'ont aucun invariant essentiel.* Mais comme nous ne savons cependant pas encore si cette propriété des mouvements peut être substituée entièrement à l'exigence qui est posée dans cette première partie-là, nous devons comme auparavant ajouter l'exigence que *chaque point  $P$  de l'espace mobile est limité dans son mouvement seulement par les invariants qu'il a avec les autres points de l'espace mobile.*

Il reste maintenant encore à discuter de la deuxième partie du troisième axiome helmholtzien (voir p. 221, l. 6–11 ci-dessus).

La deuxième partie de l'Axiome III semble au premier coup d'œil ne contenir que des conséquences de la première partie, et c'est visiblement ainsi que Monsieur de Helmholtz a voulu l'entendre. Il en va cependant tout autrement. Certes les lignes 6–9 expriment seulement des faits qui sont conséquences immédiates des hypothèses posées précédemment, en particulier les mots : « le premier point ... mobile » ne sont qu'une autre manière d'exprimer le fait qu'un point individuel ne possède aucun invariant. Mais dans les lignes 10 et 11 se glisse une nouvelle supposition qui n'est pas conséquence des précédentes.

Monsieur de Helmholtz s'imagine en effet qu'un certain nombre, disons  $m$ , de points :  $P_1, P_2, \dots, P_m$  de l'espace mobile sont fixés. D'après l'Axiome II, il existe alors pour les coordonnées de chaque autre point  $P$  de l'espace mobile certaines équations, qui expriment que les invariants des  $m$  paires de points :  $P, P_1; P, P_2; \dots; P, P_m$  conservent leur valeur numérique au cours de tous les mouvements encore possibles. Mais les hypothèses qui précèdent ne disent rien sur la nature et sur le nombre de ces équations, ce au sujet de quoi certaines suppositions qui sont faites tacitement aux lignes 11 et 12 donnent un premier éclaircissement.

Monsieur de Helmholtz demande dans ces circonstances la chose suivante, que nous pouvons exprimer ainsi : si les  $m$  points  $P_1, P_2, \dots, P_m$  sont fixés, il doit exister entre les  $n$  coordonnées de chaque autre point  $P$  exactement  $m$  (mais pas plus) équations, et *ces équations doivent généralement être indépendantes les unes des autres*, c'est-à-dire, qu'elles doivent être indépendantes les unes des autres aussi longtemps que  $P_1 \dots P_m$  sont des points mutuellement en position générale\*.

Il suit de là tout d'abord qu'après fixation d'un point  $P_1$ , il existe une et une seule équation pour tout autre point  $P$ ; et comme un point individuel ne doit avoir aucun invariant, il en découle que *deux points ont un et un seul invariant*.

En outre, les exigences helmholtziennes montrent qu'après fixation de  $m$  points :  $P_1 \dots P_m$  qui sont mutuellement en position générale, un mouvement continu est encore toujours possible, tant que  $m$  a l'une des valeurs  $1, 2, \dots, n - 1$ , mais qu'au contraire, dans le cas  $m = n$ , aucun mouvement continu n'est plus possible, et qu'après fixation de  $n$  points tels, tous les points de l'espace demeurent plutôt généralement au repos. Si en effet les  $m$  points :  $P_1 \dots P_m$  sont fixés, il existe alors entre les  $n$  coordonnées de tout autre point  $P$  en position générale  $m$  équations indépendantes les unes des autres. Et puisque, d'après ce qui précède, lorsqu'on tient compte des hypothèses admises, ce sont les seules

---

\* Ainsi doivent être compris les mots des lignes 6–11 de l'Axiome III ci-dessus. Monsieur de Helmholtz dit ici, certes d'une manière qui n'est pas explicite, que lorsque le premier point d'un système rigide en lui-même est fixé, il doit exister une et une seule équation pour chaque autre point; et puisqu'il ajoute alors : « l'une de ses coordonnées devient une fonction des  $(n - 1)$  coordonnées restantes », il est clair qu'il exclut l'existence de deux équations pour le deuxième point. Il résulte également de manière distincte de tout cela qu'après fixation de  $m$  points, alors pour tout autre point, il doit exister exactement  $m$  équations qui sont en général indépendantes les unes des autres.

conditions auxquelles la mobilité de  $P$  est soumise, il en découle que  $P$  peut encore être envoyé sur chaque autre point  $P'$  dont les coordonnées satisfont ces  $m$  équations-là, et qui est lié à  $P$  par une série continue de tels points. Si donc en particulier  $m$  a la valeur  $n$ , alors le point  $P$  ne peut plus effectuer aucun mouvement continu, mais il doit au contraire rester au repos.

Nous avons vu plus haut qu'en accomplissant un nombre quelconque de mouvements continus l'un après l'autre, on obtient toujours une transformation ponctuelle de  $R_3$  parfaitement déterminée. Nous pouvons maintenant donner des explications plus précises sur la famille des transformations qui sont engendrées de cette manière.

Considérons notre espace mobile dans une situation quelconque à l'intérieur de l'espace fixe. Soit  $n$  points  $P_1 \dots P_n$  qui sont mutuellement en position générale dans l'espace mobile et  $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$  les points de l'espace fixe avec lesquels ils coïncident exactement. Si ensuite  $P$  est un autre point quelconque de l'espace mobile, alors  $P$  a aussi une position entièrement déterminée à l'intérieur de l'espace fixe, car il n'existe plus aucun mouvement continu tel que  $P_1 \dots P_n$  conservent complètement leur position :  $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ .

Maintenant, imaginons-nous que l'espace mobile est soumis à un nombre quelconque de mouvements continus. Nous allons voir que la transformation la plus générale de  $R_n$  que l'on peut obtenir de cette manière ne dépend que d'un nombre fini de paramètres arbitraires.

En effet, par un mouvement continu, nous pouvons tout d'abord transférer le point  $P_1$  de la position  $\mathfrak{P}_1$  vers tout autre point  $\mathfrak{P}'_1$ , et par conséquent, la position la plus générale de  $\mathfrak{P}'_1$  dépend de  $n$  paramètres arbitraires. Si l'on choisit  $\mathfrak{P}'_1$  fixé, alors  $P_2$  peut encore être transféré vers tout autre point  $\mathfrak{P}'_2$  qui satisfait une certaine équation, donc  $\mathfrak{P}'_2$  dépend encore, lorsqu'on a choisi  $\mathfrak{P}'_1$ , de  $n - 1$  paramètres, et ainsi de suite. En bref, par des mouvements continus, nous pouvons parvenir à ce que  $P_1 \dots P_n$  reçoivent les positions nouvelles  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$ , où le système de points :  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$  dépend de :

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

paramètres. Mais avec cela, toutes les possibilités sont aussi épuisées, car aussitôt que  $P_1 \dots P_n$  reçoivent la nouvelle position :  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$ , tout autre point  $P$  de l'espace mobile reçoit en même temps une nouvelle position  $\mathfrak{P}'$  complètement déterminée, puisqu'il n'y a plus aucun



mouvement continu au cours duquel  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$  demeurent entièrement au repos.

En cela réside le fait que, par le transfert du système de points  $P_1 \dots P_n$  depuis la position initiale :  $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$  vers la nouvelle position :  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$ , une transformation ponctuelle entièrement déterminée est définie de manière unique ; quelle que soit la façon dont ce transfert puisse être effectué par une série de mouvement continus se succédant l'un après l'autre, on obtient toujours la même transformation ponctuelle quand on effectue ces mouvements l'un après l'autre. Maintenant, puisqu'il y a exactement  $\frac{1}{2} n(n+1)$  paramètres arbitraires à disposition pour le choix du système de points  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$ , lorsqu'on s'imagine le système de points  $P_1 \dots P_n$  déplacé de toutes les manières possibles, il en découle que l'ensemble de toutes les transformations ponctuelles, qui peuvent être obtenues par un nombre quelconque de mouvements continus de l'espace mobile à partir d'une position initiale déterminée, constitue une famille ayant exactement  $\frac{1}{2} n(n+1)$  paramètres essentiels.

Remarquons ensuite que cette famille de transformations ponctuelles est indépendante du choix de la position initiale de l'espace mobile, parce que, quelle que soit la manière dont on choisit la position initiale, il y a toujours  $n$  points  $\bar{P}_1 \dots \bar{P}_n$  de l'espace mobile qui coïncident avec les points :  $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$  de l'espace fixe. *En cela réside le fait que la famille de transformations ponctuelles ainsi définie à l'instant constitue un groupe.* En effet, si au moyen d'une transformation quelconque de notre famille, nous amenons l'espace mobile de la position  $R$  à la position  $R'$ , et si ensuite, au moyen d'une autre transformation de notre famille, nous l'aménons de la position  $R'$  à la position  $R''$ , alors il y a toujours une transformation entièrement déterminée appartenant à la famille, grâce à laquelle  $R$  se transforme en  $R''$ .

Le groupe que l'on trouve de cette manière est sûrement transitif, car il peut envoyer tout point de l'espace sur tout autre point. De plus il est facile de voir que ses transformations sont ordonnées ensemble par paires de transformations inverses. En effet, si  $S$  est la transformation de notre groupe qui envoie  $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$  sur  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$ , alors il est toujours possible, au moyen d'un certain nombre de mouvements continus, de parvenir à ce que les points de l'espace mobile, qui coïncident avec  $\mathfrak{P}'_1 \dots \mathfrak{P}'_n$  dans une situation quelconque de cet espace, arrivent finalement à la position :  $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ . Ainsi  $S^{-1}$  fait toujours partie de notre groupe en même temps que  $S$ .

Enfin, on peut aussi démontrer que notre groupe, que nous voulons appeler brièvement  $g$ , est continu. En effet, s'il ne l'était pas, d'après

le Tome I, Chap. 18<sup>7</sup>, il serait composé d'une série de familles continues séparées, dont chacune contiendrait  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres et parmi ces familles, il y en aurait une qui est continue et qui constituerait un groupe  $\mathfrak{g}$  à  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres contenant des transformations inverses par paires. Ce groupe  $\mathfrak{g}$  serait le seul auquel appartient la transformation identique, parmi les familles continues concernées. Mais maintenant, chaque famille continue de  $\infty^1$  transformations qui est déterminée par un mouvement continu contient la transformation identique (*voir* p. 223) et elle fait donc partie du groupe  $\mathfrak{g}$ ; par conséquent, le groupe  $\mathfrak{g}$  comprend aussi toutes les transformations qui proviennent de l'accomplissement d'un nombre quelconque de mouvements continus l'un après l'autre. Il en découle que  $g$  est contenu dans  $\mathfrak{g}$  et comme  $\mathfrak{g}$  était un sous-groupe de  $g$ , nous pouvons conclure que  $g$  coïncide avec  $\mathfrak{g}$ , c'est-à-dire que  $g$  est effectivement continu.

Avec les hypothèses qu'a faites de Monsieur de Helmholtz, l'énoncé suivant est donc valide :

*Lorsqu'on effectue un nombre quelconque de mouvements continus de l'espace les uns à la suite des autres, parmi ceux qui sont les plus admissibles possibles, on obtient un groupe continu fini transitif  $\mathfrak{g}$  de transformations réelles qui renferme exactement  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres et dont les transformations sont inverses l'une de l'autre par paires.*

Il va alors de soi que relativement à ce groupe, deux points ont un et un seul invariant, et que  $s > 2$  points n'ont pas d'invariant essentiel. En effet, si deux points possédaient par exemple plus d'un invariant relativement au groupe, ils possèderaient alors évidemment aussi cet invariant relativement à tous les mouvements continus, alors qu'ils ne doivent avoir qu'un seul invariant relativement à ces mouvements.

Grâce à ce qui précède, il a été démontré que nous avons affaire à un groupe continu fini et que relativement à ce groupe, deux points ont un et un seul invariant, tandis que  $s > 2$  points n'ont pas d'invariant essentiel. Nous avons déjà étudié dans le Chapitre 20 les groupes de cette espèce, et bien que nous nous soyons limités, à ce moment-là, à l'espace de dimension trois, on peut néanmoins appliquer immédiatement au cas de l'espace  $n$  fois étendu au moins une partie des raisonnements conduits à cet endroit-là, à savoir les développements des pages 166–173. Nous reconnaissons ainsi que chaque groupe ayant la constitution

<sup>7</sup> Ce chapitre est consacré à l'étude des groupes de transformations comportant plusieurs composantes connexes.

définie à l'instant possède les propriétés suivantes : si un point en position générale est fixé, alors tout autre point en position générale peut recevoir encore  $\infty^{n-1}$  positions différentes ; si on fixe deux points qui sont mutuellement en position générale, alors tout autre troisième point en position générale peut encore recevoir  $\infty^{n-2}$  positions différentes, *etc.* ; pour être bref, nous trouvons que la finitude du groupe et que les hypothèses faites sur les invariants de deux points (ou plus) qui ont été indiquées à la page 231 se déduisent des exigences de Monsieur de Helmholtz, à savoir des exigences qu'après fixation d'un point, il existe une et une seule équation pour tout autre point, et ainsi de suite. Ainsi, nous n'avons plus besoin de mentionner spécialement ces exigences.

Finalement, on peut encore mentionner que le groupe continu fini  $g$  qui est déterminé par les mouvements continus de l'espace se trouve être lié encore d'une manière simple à un autre groupe. Nous entendons le groupe  $g'$  de toutes les transformations ponctuelles pour lesquelles deux points quelconques  $x_\nu, y_\nu$  ont l'invariant  $\Omega(x, y)$ .

Il est à l'avance clair qu'il existe un tel groupe  $g'$ , car, quelle que soit la manière dont nous pouvons choisir la fonction  $\Omega(x, y)$ , il y a toujours des transformations relativement auxquelles deux points ont l'invariant  $\Omega(x, y)$ , et aussi, l'ensemble de ces transformations constitue toujours un certain groupe, qui à vrai dire peut éventuellement se réduire à la transformation identique.

Dans notre cas, il est maintenant facile de voir que la transformation la plus générale de  $g'$  contient exactement  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres arbitraires, ce qui découle tout simplement de la propriété particulière qu'a l'invariant  $\Omega(x, y)$ , sous les hypothèses ici posées. Par conséquent, il est clair que  $g$  est le plus grand groupe continu contenu dans  $g'$  ; si  $g'$  devait être lui-même continu, alors il coïnciderait naturellement avec  $g$ .

### § 93.

#### Formulation des axiomes helmholtziens en termes de théorie des groupes.

Nous allons maintenant rassembler les résultats des précédents paragraphes. Afin de pouvoir nous exprimer d'une manière plus commode, nous voulons toutefois appeler brièvement le groupe défini à la page 233 un *groupe des mouvements de  $R_n$* . En conformité avec cela, nous appelons brièvement chaque transformation de ce groupe un *mouvement*, de telle sorte que par « mouvement » nous entendons toujours une transformation qui transforme l'espace mobile d'une situation vers

une autre situation. Ce que nous avons appelé jusqu'à présent un *mouvement continu* est maintenant simplement une famille continue de  $\infty^1$  mouvements, dans laquelle est contenue la transformation identique.

Cette manière de s'exprimer correspond manifestement à la manière maintenant habituelle de s'exprimer dont nous avons déjà usé auparavant, lorsque nous parlions du groupe des mouvements euclidiens, sachant aussi que nous entendions chaque fois par « mouvement » une transformation de ce groupe.

À présent, en collectant les résultats des paragraphes précédents, nous pouvons dire que les trois premiers axiomes helmholtziens ont la même signification que les exigences suivantes :

**A)** *Chaque point de l'espace  $n$  fois étendu peut être déterminé par  $n$  coordonnées :  $x_1 \dots x_n$ .*

**B)** *Un groupe continu fini qui est réel et transitif et que nous appelons groupe des mouvements :*

$$(11) \quad x'_\nu = f_\nu(x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r), \quad (\nu=1 \dots n)$$

*est déterminé par tous les mouvements possibles dans l'espace. Le nombre  $r$  de paramètres de ce groupe possède la valeur  $\frac{1}{2}n(n+1)$  et les transformations du groupe sont inverses l'une de l'autre par paires. Les fonctions  $f_1 \dots f_n$  sont non seulement différentiables par rapport aux  $x$ , mais aussi par rapport aux  $a$  et les quotients différentiels par rapport aux  $x$  sont de leur côté à nouveau différentiables par rapport aux  $a$ .*

**C)** *Relativement au groupe (11), deux points ont un et un seul invariant, et  $s > 2$  points n'ont aucun invariant essentiel. Si :  $J(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n)$  est l'invariant des deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$ , alors on doit pouvoir délimiter à l'intérieur de l'espace  $n$  fois étendu une certaine région  $n$  fois étendue de telle sorte que les relations :*

$$(12) \quad J(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n) = J(x_1^0 \dots x_n^0; y_1^0 \dots y_n^0)$$

*fournissent toujours une équation véritable entre :  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ , quels que soient les points distincts l'un de l'autre que l'on puisse aussi choisir pour  $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$  dans la région.*

**D)** *À l'intérieur de la région définie à l'instant, tous les points sont parfaitement et librement mobiles par le groupe (11), tant qu'ils ne sont pas liés par les invariants que les paires individuelles de points ont relativement au groupe. Si donc par exemple :  $x_1^0 \dots x_n^0; y_1^0 \dots y_n^0$  sont deux points distincts quelconques de cette région-là, alors, aussitôt que*

le premier d'entre eux est fixé, le second peut occuper encore toutes les positions :  $y_1 \dots y_n$  qui satisfont les équations :

$$(13) \quad J(x_1^0 \dots x_n^0; y_1 \dots y_n) = J(x_1^0 \dots x_n^0; y_1^0 \dots y_n^0),$$

où il est supposé que depuis  $y_1^0 \dots y_n^0$  vers  $y_1 \dots y_n$ , une transition continue qui ne comporte que des systèmes de valeurs réelles satisfaisant (13), est possible.

À cela s'ajoute maintenant encore le quatrième axiome helmholtzien, que nous n'avons encore pas pris en considération jusqu'à présent, celui qu'on appelle souvent l'*Axiome de monodromie*. Nous pouvons maintenant lui donner la version suivante :

**E)** Si, à l'intérieur de la région introduite ci-dessus, on fixe  $n - 1$  points mutuellement en position générale qui sont choisis de telle sorte qu'ils ne restent au repos simultanément que par l'action d'un groupe à un paramètre de mouvements, et si  $Xf$  est la transformation infinitésimale de ce groupe à un paramètre, alors les équations finies correspondantes :

$$(14) \quad x'_\nu = x_\nu + \frac{t}{1} X x_\nu + \frac{t^2}{1 \cdot 2} XX x_\nu + \dots \quad (\nu = 1 \dots n)$$

doivent être constituées de telle sorte que, si  $t$  croît toujours à partir de la valeur nulle, tous les autres points :  $x_1 \dots x_n$  de la région reviennent finalement tous en même temps à leur position initiale. Brièvement, il est demandé que les équations (14) représentent un mouvement qui a une période réelle.

## § 94.

### Critique des conclusions que Monsieur de Helmholtz tire de ses axiomes.

Dans les précédents paragraphes, nous avons donné aux axiomes helmholtziens une version qui fait ressortir clairement le caractère « théorie des groupes » qu'a le problème dans son ensemble. Nous voulons maintenant examiner d'une manière critique les conséquences que Monsieur de Helmholtz a tirées de ses axiomes. Afin de pouvoir effectuer cela de la manière la plus commode possible, nous traduisons tout d'abord ces conséquences dans le langage de la théorie des groupes, autant qu'il est possible. Comme Monsieur de Helmholtz s'est restreint dans sa recherche à l'espace de dimension trois, nous faisons naturellement de même.

Dans l'espace à trois dimensions chaque groupe de mouvements qui satisfait les exigences helmholtziennes est à six paramètres. Monsieur de Helmholtz considère maintenant\*, comme nous pouvons l'exprimer, tous les mouvements contenus dans le groupe, qui laissent invariant un point déterminé. Puisque le groupe des mouvements est transitif, l'ensemble de tous les mouvements qui laissent au repos un point déterminé, constitue un groupe à trois paramètres. Si, par souci de simplicité, nous nous imaginons que le point invariant est choisi comme étant l'origine des coordonnées, alors les équations de ce groupe à trois paramètres ont la forme :

$$(15) \quad \begin{cases} x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \dots \\ y' = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + \dots \\ z' = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \dots, \end{cases}$$

où les constantes  $\lambda, \mu, \nu$  et les termes d'ordre supérieur qui ont été supprimés ne dépendent que de trois paramètres arbitraires et où le déterminant des  $\lambda, \mu, \nu$  ne s'annule sûrement pas identiquement.

Cependant, Monsieur de Helmholtz ne considère pas le groupe (15) lui-même, mais il étudie seulement de quelle manière les points infiniment proches de l'origine des coordonnées sont transformés par le groupe (15), autrement dit : il se restreint à la considération des transformations :

$$(16) \quad \begin{cases} dx' = \lambda_1 dx + \lambda_2 dy + \lambda_3 dz \\ dy' = \mu_1 dx + \mu_2 dy + \mu_3 dz \\ dz' = \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz, \end{cases}$$

---

\* Gött. Nachr. 1868, p. 202 sq. La manière dont il construit ces mouvements est remarquable. Il sélectionne un mouvement déterminé  $S$ , par lequel un point déterminé  $P_1$  est envoyé vers une nouvelle position  $P$ , et d'un autre côté, il s'imagine disposer du mouvement le plus général contenu dans le groupe, par lequel  $P_1$  est également envoyé sur  $P$ . Sous ces hypothèses,  $S^{-1}T$  est visiblement le mouvement le plus général appartenant au groupe au cours duquel  $P$  reste au repos. Avec cela, il est démontré non seulement qu'il y a de tels mouvements, mais aussi que les équations des mouvements concernés peuvent être rapportées à une forme telle qu'elles peuvent s'appliquer aux points qui sont infiniment voisins de  $P$ . Naturellement, Monsieur de Helmholtz ne calcule pas du tout de manière symbolique avec les transformations ; chez lui, le concept de *famille de transformations* ne se rencontre pas même une seule fois explicitement. En utilisant les concepts et les manières de s'exprimer de la théorie des groupes, nous donnons en général une forme plus rigoureuse aux développements helmholtziens.

que l'on obtient lorsqu'on différentie les équations (15) et que l'on pose ensuite :  $x = y = z = 0$ . Il est clair que ces transformations en les variables :  $dx, dy, dz$  forment un groupe, et pour préciser, nul autre groupe que le groupe linéaire homogène qui est attaché [*zugeordnet*] à l'origine des coordonnées par tous les mouvements du groupe, et qui indique notamment comment sont transformés les éléments linéaires :  $dx : dy : dz$  passant par l'origine des coordonnées, dès qu'on l'a fixée (*voir* Tome I, Théorème 109, p. 603<sup>1</sup>).

Jusqu'à ce point, les développements de Monsieur de Helmholtz sont irréprochables. Mais maintenant, il admet tacitement et sans un mot de justification que tous ses axiomes, qu'il a posés au sujet des mouvements encore possibles après fixation d'un point, peuvent aussi s'appliquer aux points qui sont infiniment voisins du point fixé, et donc que s'ils s'appliquent à des points finiment éloignés les uns des autres, il s'ensuit qu'ils s'appliquent en même temps à des points infiniment voisins. Pour l'exprimer plus précisément : il s'imagine le groupe linéaire homogène :

$$(16') \quad \begin{cases} x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \\ y' = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z \\ z' = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z \end{cases}$$

comme un groupe de mouvements qui laisse invariante l'origine des coordonnées, et il pose à l'avance que le groupe (16') satisfait alors toujours ses axiomes, lorsque le groupe (15) les satisfait. C'est sur cette supposition que reposent tous ses développements subséquents.

Nous voulons d'abord montrer que cette supposition a la même signification qu'une autre supposition, que l'on peut exprimer de manière appropriée, et ensuite, *au moyen d'une série d'exemples, nous allons montrer clairement l'irrecevabilité de cette supposition dans son intégralité.*

---

<sup>1</sup> Ce théorème énonce que chaque groupe  $X_1 f, \dots, X_r f$  de l'espace  $x_1, \dots, x_n$  associe à tout point  $x_1^0, \dots, x_n^0$  fixé en position générale un groupe linéaire homogène de  $R_n$  parfaitement déterminé, lequel indique de quelle manière sont transformés les éléments linéaires passant par ce point.

Le groupe (15) est engendré par trois transformations infinitésimales de la forme :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{k1} x + \alpha_{k2} y + \alpha_{k3} z + \cdots) p + \\ + (\beta_{k1} x + \beta_{k2} y + \beta_{k3} z + \cdots) q + \\ + (\gamma_{k1} x + \gamma_{k2} y + \gamma_{k3} z + \cdots) r \\ (k=1, 2, 3), \end{array} \right.$$

où les  $\alpha, \beta, \gamma$  désignent des constantes et où les termes supprimés sont d'un ordre supérieur par rapport à  $x, y, z$ . Le groupe à six paramètres de tous les mouvements contient encore, hormis les transformations infinitésimales (17), trois transformations de la forme :

$$(18) \quad p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad r + \cdots.$$

D'un autre côté, le groupe (16') est le groupe réduit associé au groupe (17), et ses transformations infinitésimales\* :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_k f = (\alpha_{k1} x + \alpha_{k2} y + \alpha_{k3} z) p + (\beta_{k1} x + \beta_{k2} y + \beta_{k3} z) q + \\ + (\gamma_{k1} x + \gamma_{k2} y + \gamma_{k3} z) r \\ (k=1, 2, 3) \end{array} \right.$$

proviennent de (17) lorsqu'on supprime tous les termes d'ordre supérieur, et donc elles ne sont pas nécessairement indépendantes les unes des autres. Remarquons en outre (cf. le Tome I, p. 606), qu'en tenant compte des hypothèses posées, les transformations infinitésimales :

$$(20) \quad p, \quad q, \quad r, \quad L_1 f, \quad L_2 f, \quad L_3 f,$$

---

\* Nous ne voulons pas passer sous silence le fait que Monsieur de Helmholtz opère avec les transformations infinitésimales du groupe *linéaire homogène* (16'), et on peut même dire qu'il considère, quoique de manière inconsciente, les groupes à un paramètre qui sont engendrés par certaines de ces transformations infinitésimales. Néanmoins, on ne se trouve chez lui en aucune façon le concept général de transformation infinitésimale, et encore moins le concept général de groupe à un paramètre.



engendrent aussi un groupe<sup>2</sup> transitif, qui toutefois n'est pas nécessairement à six paramètres. Ce groupe (20) n'est autre que le groupe réduit relatif au groupe (17), (18) de tous les mouvements.

L'hypothèse introduite tacitement par Monsieur de Helmholtz a maintenant simplement le sens que le groupe (19) satisfait alors chaque axiome ayant été posé au sujet de tous les mouvements qui sont encore possibles après fixation d'un point, lorsque le groupe (17) satisfait ces axiomes. Mais d'un autre côté, il est clair que le groupe (17), (18) de tous les mouvements satisfait tous les axiomes helmholtziens si et seulement si le groupe (17) satisfait encore les axiomes restants qui s'appliquent après fixation de l'origine des coordonnées. Enfin, il est évident qu'entre les deux groupes (20) et (19), on a exactement la même relation qu'entre les groupes (17), (18) et (17). Par conséquent, ce qui a été admis par Monsieur de Helmholtz revient simplement à supposer que *le groupe réduit (20) satisfait alors toujours chaque exigence qu'il a posée, lorsque le groupe initial (17), (18) les satisfait.*

Ceci, Monsieur de Helmholtz l'a admis tacitement, sans la moindre indication de démonstration, et sans faire aucune allusion au fait que cela nécessite à vrai dire une démonstration. Par une série d'exemples\*, nous voulons montrer que ce qui a été admis n'est pas fondé. Nous allons trouver qu'un groupe transitif à six paramètres de  $R_3$  peut très bien satisfaire certaines des exigences helmholtziennes, sans que le groupe réduit qui lui est associé les satisfasse ; d'un autre côté, nous allons voir qu'à un groupe transitif à six paramètres qui ne satisfait pas certaines des exigences helmholtziennes peut très bien être associé un groupe réduit qui satisfait les exigences en question.

<sup>2</sup> Voici la justification. Dans des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ , soit un groupe linéaire homogène quelconque constitué d'un certain nombre  $m \leq n^2$  de générateurs infinitésimaux :

$$L_\nu = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{\nu ij} x_i \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\nu = 1 \dots m)$$

à coefficients linéaires, donc par hypothèse stable par crochets de Lie. Alors la collection :

$$p_1, \dots, p_n, \quad L_1, \dots, L_m$$

obtenue en leur adjoignant toutes les transformations infinitésimales du groupe (transitif et commutatif) des translations est elle aussi stable par crochets (donc engendre un groupe au sens de Lie), puisque :

$$[p_k, L_\nu] = \left[ \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{\nu ij} x_i \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^n \alpha_{\nu kj} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \alpha_{\nu kj} p_j.$$

\* Lie a communiqué ces exemples pour la première fois dans les Comptes Rendus de 1892 (Vol. 114, p. 463).



$s > 2$  points n'ont pas d'invariant essentiel, donc ce groupe satisfait certaines exigences qui découlent des axiomes helmholtziens (cf.p. 236). Cependant, le groupe réduit associé<sup>6</sup> :

$$(23') \quad q, \quad p, \quad r, \quad xr, \quad xp + yq - cxq, \quad yr$$

ne satisfait pas ces exigences, car il contient des transformations infinitésimales, et même trois, à savoir :  $r, xr, yr$ , qui ont des courbes intégrales en commun, alors que, d'après la Proposition 1, p. 176, cela ne peut pas se produire lorsque deux points doivent avoir un et un seul invariant, alors que  $s > 2$  points ne doivent pas avoir d'invariant essentiel.

Par conséquent, les exigences en question ne sont pas toujours nécessairement satisfaites par le groupe (20) lorsqu'elles le sont par le groupe (17), (18).

Enfin, l'axiome de monodromie peut très bien appartenir aussi aux exigences qui sont satisfaites par le groupe (17), (18), sans que celles-ci soient satisfaites par le groupe (20).

Le groupe :

$$(24) \quad \begin{cases} p, & q, & xp + yq + r, & yp - xq \\ & (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr \\ & 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr, \end{cases}$$

que nous avons déjà trouvé à la page 214<sup>7</sup>, en fournit la démonstration. Ce groupe *extrêmement curieux* [*äusserst merkwürdige Gruppe*] satisfait en effet toutes les exigences de l'axiome helmholtzien de monodromie, tandis que le groupe réduit associé :

$$(24') \quad p, \quad q, \quad r, \quad yp - xq, \quad xr, \quad yr$$

ne les satisfait pas.

Il est facile de voir que le groupe (24') ne satisfait pas l'axiome de monodromie. Si nous fixons en effet deux points qui sont mutuellement en position générale, par exemple l'origine des coordonnées et le point  $x_0, y_0, z_0$ , où  $x_0$  et  $y_0$  ne s'annulent pas, alors les mouvements encore possibles forment un groupe à un paramètre qui est engendré par la

<sup>6</sup> Pour obtenir trois transformations infinitésimales linéairement indépendantes fixant l'origine, une combinaison linéaire préalable est requise : retrancher de la cinquième transformation la troisième multipliée par  $c$ , ce qui donne  $xp + yq - cxq$ .

<sup>7</sup> à savoir le groupe (58) avec  $a = 1$  et  $b = 0$ , ce qui a donné le groupe 7 p. 215.

transformation infinitésimale<sup>8</sup> :  $(x_0y - y_0x) r$ , et dont les équations finies sont par conséquent de la forme :

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + t(x_0y - y_0x).$$

Mais alors ici, le point  $x, y, z$  ne retourne manifestement jamais à sa position initiale, quand  $t$  croît continuellement à partir de zéro.

D'autre part, afin de nous persuader que le groupe (24) satisfait l'axiome de monodromie, nous devons examiner d'un peu plus près les mouvements de ce groupe.

Si l'on fixe un point  $x_0, y_0, z_0$  relativement à l'action du groupe (24), alors chaque autre point  $x, y, z$  se meut en général d'une manière complètement libre sur la pseudosphère<sup>9</sup> :

$$(25) \quad \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} e^{-z} = \text{const.}$$

centrée en ce point :  $x_0, y_0, z_0$  ; seuls les points de la droite :  $x = x_0, y = y_0$ , qui constitue évidemment une pseudosphère par elle-même, font exception, car ils restent entièrement au repos.

Si donc nous voulons fixer deux points distincts qui ne restent simultanément au repos que par l'action d'un sous-groupe à un paramètre de (24), alors nous devons choisir ces points de telle sorte que leur droite de liaison [*Verbindungslinie*] ne soit pas parallèle à l'axe des  $z$ .

Deux tels points sont par exemple l'origine des coordonnées et un point quelconque  $x_0, y_0, z_0$  pour lequel  $x_0$  et  $y_0$  ne s'annulent pas tous deux. Les équations finies du groupe à un paramètre qui laisse invariants

<sup>8</sup> À un facteur multiplicatif près, c'est la seule transformation infinitésimale qui s'annule en  $(0, 0, 0)$  et en  $(x_0, y_0, z_0)$ .

<sup>9</sup> L'unique invariant d'une paire de points a déjà été calculé p. 214 (faire  $b = 0$ ).

ces deux points se déterminent grâce au système simultanément<sup>10</sup> :

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = y' + \frac{y_0(x'^2 - y'^2)}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{2x_0x'y'}{x_0^2 + y_0^2} \\ \frac{dy'}{dt} = -x' + \frac{2y_0x'y'}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0(x'^2 - y'^2)}{x_0^2 + y_0^2} \\ \frac{dz'}{dt} = \frac{2(y_0x' - x_0y')}{x_0^2 + y_0^2}, \end{cases}$$

avec les conditions initiales bien connues :  $[x']_{t=0} = x$ , etc. À partir de (26), on trouve<sup>11</sup> :

$$\frac{d}{dt}(x' + iy') = -i \left\{ x' + iy' - \frac{(x' + iy')^2}{x_0 + iy_0} \right\},$$

et de là, par intégration :

$$(27) \quad x' + iy' = \frac{(x_0 + iy_0)(x + iy)}{\{x_0 - x + i(y_0 - y)\} e^{it} + x + iy}.$$

D'un autre côté, puisque l'on sait que le point  $x, y, z$  se meut sur la pseudosphère passant par lui et qui a pour centre l'origine des coordonnées,

<sup>10</sup> On détermine à l'avance une certaine combinaison linéaire  $W = \alpha T + \beta U + \gamma V$  des trois dernières transformations infinitésimales (24) (qui s'annulent déjà à l'origine) :

$$W = [\alpha y + \beta(x^2 - y^2) + 2\gamma xy] p + [-\alpha x + 2\beta xy + \gamma(y^2 - x^2)] q + [2\beta x + 2\gamma y] r$$

afin qu'elle s'annule aussi en  $(x_0, y_0, z_0)$ . Égalé à zéro les trois coefficients de  $p, q, r$  dans  $W|_{(x_0, y_0, z_0)}$  donne alors l'unique (à un facteur multiplicatif près) solution :

$$\alpha = y_0, \quad \beta = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad \gamma = -\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Le système considéré de trois équations différentielles ordinaires représente alors les courbes intégrales de  $W$ , d'inconnues  $(x'(t), y'(t), z'(t))$  valant  $(x, y, z)$  pour  $t = 0$ .

<sup>11</sup> Il s'agit d'intégrer l'équation différentielle  $\frac{dw}{dt} = -i\{w - w^2/\alpha\}$  d'inconnue complexe  $w = w(t) \in \mathbb{C}$ , où  $\alpha := x_0 + iy_0$  est une constante, c'est-à-dire  $\frac{\alpha dw}{\alpha w - w^2} = -idt$ , ou encore, après décomposition en éléments simples et séparation des quotients différentiels :

$$dw \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{w - \alpha} \right) = -idt.$$

Une intégration donne  $\log \frac{w}{w - \alpha} = -it + \text{const.}$ , puis par exponentiation  $w = -\frac{c\alpha}{e^{it} - c}$ , où  $c$  est une constante que l'on détermine par la condition initiale  $w|_{t=0} = x + iy$ , c'est-à-dire  $c = \frac{-x - iy}{x_0 - x + i(y_0 - y)}$ . Enfin, on remplace  $c$  dans l'expression de  $w$ . Très exceptionnellement, le texte allemand comporte ici une coquille : au dénominateur, entre accolades, il est écrit  $x - x_0 + i(y - y_0)$ .

on obtient encore entre  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  l'équation :

$$(x'^2 + y'^2) e^{-z'} = (x^2 + y^2) e^{-z},$$

d'où on déduit immédiatement :

$$(28) \quad z' = z + \log \frac{x'^2 + y'^2}{x^2 + y^2}.$$

Ainsi, on a complètement déterminé les transformations finies du groupe à un paramètre dont il est question dans le discours. Il serait facile de les indiquer sous une forme réelle, mais pour notre objectif, ce n'est pas du tout nécessaire, car les équations (27) et (28) montrent déjà que notre groupe (28) satisfait l'axiome de monodromie. Si en effet on soumet l'espace au mouvement continu qui est spécifié par les équations (27), (28), et si on laisse la variable  $t$  parcourir toutes les valeurs réelles entre 0 et  $2\pi$ , alors tous les points retournent simultanément\* à leur position initiale pour  $t = 2\pi$ .

Ainsi, nous voyons que le groupe (24) satisfait en fait l'axiome de monodromie, alors que le groupe réduit associé (24') ne le satisfait pas.

Pour cette raison encore, le groupe (24) est alors aussi particulièrement curieux, parce qu'il montre de la manière la plus convaincante qui soit, combien il est impossible de déduire quelque chose au sujet du comportement de points infiniment voisins à partir du comportement de points qui sont finiment éloignés les uns des autres, et combien il est périlleux d'extrapoler à ces points-là, comme l'a fait Monsieur de Helmholtz, les axiomes qui ont été posés pour les points finiment éloignés les uns des autres.

Si en effet l'on fixe un point pour l'action du groupe (24), par exemple l'origine des coordonnées, alors chaque autre point se meut en général, comme nous l'avons vu plus haut, sur l'une des  $\infty^1$  surfaces invariantes :

$$(x^2 + y^2) e^{-z} = \text{const.}$$

Comme on s'en convainc facilement, les points de chacune de ces surfaces sont transformés par l'action d'un groupe à trois paramètres qui

---

\* Les  $\infty^2$  courbes intégrales qui, à cette occasion, sont parcourues par les points de l'espace, sont les courbes obtenues par intersection des deux familles de pseudo-sphères :

$$(x^2 + y^2) e^{-z} = \text{const.} \quad \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} e^{-z} = \text{const.}$$

Leurs projections sur le plan des  $x, y$  sont alors en général des cercles, mais ce sont aussi exceptionnellement des lignes droites.

a la même structure<sup>12</sup> que le *groupe des mouvements euclidiens* d'un plan, et qui lui est de surcroît semblable par une transformation ponctuelle réelle.

Les points qui sont infiniment voisins de l'origine des coordonnées se comportent d'une manière totalement différente. Afin de se constituer une image de la façon dont sont transformés ces points, lorsque l'origine des coordonnées est fixée, on peut au mieux envisager le groupe par lequel sont transformés les  $\infty^2$  éléments linéaires passant par l'origine des coordonnées, car chaque point qui est infiniment voisin de l'origine des coordonnées détermine un tel élément linéaire. Si on entend par  $x', y', z'$  les coordonnées homogènes d'un élément linéaire, alors ce groupe est :

$$y'p' - x'q', \quad x'r', \quad y'r',$$

et on vérifie alors immédiatement que la variété des  $\infty^2$  éléments linéaires est transformée par l'action d'un groupe projectif qui est *dualistique du groupe des mouvements euclidiens d'un plan*.

Ainsi, on voit que, *lors du passage des points finiment éloignés aux points infiniment voisins, un saut plus total peut se produire, et que les points infiniment voisins obéissent dans de telles circonstances à des lois tout autres que celles auxquelles sont soumis les points finiment éloignés les uns des autres*.

Grâce aux exemples précédents, il a été suffisamment démontré que la supposition que Monsieur de Helmholtz a introduite tacitement et qui a été décrite plus précisément aux pages 239 sq. est erronée. Et maintenant, comme ses considérations ultérieures prennent entièrement cette supposition comme point de départ et n'ont force de preuve que sur la base de cette supposition, nous parvenons donc au résultat que Monsieur de Helmholtz n'a pas démontré l'assertion qu'il énonce à la fin de son travail, à savoir : il n'a pas démontré que ses axiomes suffisent à caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens.

Après nous être convaincus de cette façon que les développements de Monsieur de Helmholtz ne constituent pas une démonstration, nous

<sup>12</sup> [*gleichzusammengesetzt ist*] : possède les mêmes constantes de structure dans les crochets de Lie. En effet, les mouvements encore possibles par le sous-groupe de (24) qui laisse fixe l'origine sont engendrés par les trois générateurs infinitésimaux :

$$P := (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr, \quad Q := 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr, \quad yp - xq.$$

Ils satisfont bien les mêmes relations de commutation :  $[P, yp - xq] = -Q$  ;  $[Q, yp - xq] = P$  et :  $[P, Q] = 0$  que les trois générateurs infinitésimaux :  $p, q, yp - xq$  des mouvements euclidiens du plan.

allons nous rattacher tout d'abord dans le § 95 aux hypothèses que Monsieur de Helmholtz a posées au cours de ses calculs.

### § 95.

#### Considérations se rattachant aux calculs helmholtziens.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que Monsieur de Helmholtz applique sans plus de façons ses axiomes à des points infiniment voisins. Dans la supposition erronée que cela soit autorisé réside la faiblesse des développements helmholtziens ; l'introduction de cette supposition ôte toute force de preuve à sa réflexion.

Mais on peut éviter cette erreur, si l'on dispose dès le début les axiomes helmholtziens de telle sorte qu'ils se réfèrent simplement à des points infiniment voisins ; on peut alors toujours s'arranger pour que les calculs helmholtziens parviennent effectivement au but en prenant pour base les axiomes formulés de cette façon. Comme cela est possible de diverses manières et puisque cela ne vaut pas la peine de discuter à fond les différentes possibilités, nous nous contenterons de ce qui suit : nous poserons un système d'axiomes qui se réfère à des points infiniment voisins et qui, sans concorder avec les hypothèses que Monsieur de Helmholtz a introduites tacitement dans ses calculs, sont cependant très analogues avec celles-ci. Ensuite, nous démontrerons *par des calculs qui ne s'écartent pas dans leur principe de ceux de Monsieur de Helmholtz*, que ce système d'axiomes suffit pour la caractérisation des mouvements euclidiens et non-euclidiens de l'espace ordinaire.

Les axiomes que nous posons s'énoncent ainsi<sup>1</sup> :

**I)** *L'espace trois fois étendu est une variété numérique.*

**II)** *Les mouvements de cet espace forment un groupe continu réel de transformations ponctuelles.*

**III)** *Si l'on fixe un point réel en position générale, alors le groupe linéaire homogène, qui détermine de quelle manière les  $\infty^2$  éléments linéaires réels qui passent par ce point sont transformés, possède exactement trois paramètres.*

**IV)** *Chaque sous-groupe réel à un paramètre du groupe linéaire homogène mentionné à l'instant est constitué de telle sorte que par son action, tous les éléments linéaires réels qui ne restent pas au repos décrivent un cône réel qu'ils parcourent continûment, à l'intérieur duquel*

---

<sup>1</sup> La finitude du nombre des paramètres du groupe n'est pas explicitement demandé.



ils retournent finalement et simultanément, mais sans revenir en arrière, à leur situation initiale ; ou bien, pour exprimer cela plus précisément : si :

$$x'_1 = \alpha_1(t) x' + \alpha_2(t) y' + \alpha_3(t) z'$$

$$y'_1 = \beta_1(t) x' + \beta_2(t) y' + \beta_3(t) z'$$

$$z'_1 = \gamma_1(t) x' + \gamma_2(t) y' + \gamma_3(t) z'$$

sont les équations finies d'un tel sous-groupe à un paramètre sous leur forme canonique, il se produit finalement le cas, lorsque la variable réelle  $t$  croît continuellement à partir de 0 et pour une certaine valeur finie positive de  $t$ , que :  $x'_1 : y'_1 : z'_1$  est proportionnel à :  $x' : y' : z'$ .

Nous allons montrer que ces axiomes suffisent entièrement à caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens.

Tout d'abord, nous devons déterminer quelle forme possède le groupe linéaire homogène mentionné dans les axiomes.

Soit :  $x'_1, x'_2, x'_3$  les coordonnées de l'élément linéaire passant par un point fixé en position générale ; d'après les hypothèses posées, le groupe linéaire homogène  $g$  attaché à ce point contient alors trois transformations infinitésimales indépendantes de la forme :

$$(29) \quad \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} \alpha_{k\mu\nu} x'_\mu p'_\nu \quad (k=1,2,3).$$

Parmi ces transformations infinitésimales, il peut y en avoir au plus une<sup>2</sup> qui fixe chaque élément linéaire :  $x'_1 : x'_2 : x'_3$ , et par conséquent il est certain que la variété deux fois étendue des  $\infty^2$  éléments linéaires :  $x'_1 : x'_2 : x'_3$  est transformée par  $g$  via l'action d'un groupe projectif  $g$ , qui possède soit trois, soit deux paramètres.

Si nous rapportons projectivement notre variété des  $\infty^2$  éléments linéaires aux points réels d'un plan, alors  $g$  se présente comme un groupe projectif  $g'$  du plan ayant deux ou trois paramètres. Chaque sous-groupe réel à un paramètre de  $g'$  est alors constitué de telle sorte que dans la forme *canonique* de ses équations finies :

$$\xi' = \varphi(\xi, \eta; t), \quad \eta' = \psi(\xi, \eta; t),$$

les quantités  $\xi'$  et  $\eta'$  sont des fonctions périodiques de la variable réelle  $t$ . Tous les points réels qui ne restent pas invariants par l'action d'un tel groupe à un paramètre, se meuvent alors sur des courbes réelles qu'ils parcourent continûment dans toute leur extension, et pour préciser, de

<sup>2</sup> Dans le groupe linéaire en dimension  $n$  quelconque, seule l'homothétie de générateur infinitésimal  $x'_1 p'_1 + \dots + x'_n p'_n$  laisse fixe toutes les éléments linéaires.

telle manière que, sans revenir en arrière, ils reviennent finalement et simultanément à leur position initiale ; si la droite à l'infini ne devait pas rester invariante par l'action du groupe à un paramètre en question, alors un point situé dans la région finie pourrait naturellement traverser aussi l'infini au cours de son mouvement.

Maintenant, nous allons tout d'abord rechercher tous les groupes réels projectifs à un paramètre du plan qui ont la constitution décrite à l'instant. Nous les connaissons<sup>3</sup>, donc il ne nous sera pas difficile de trouver tous les groupes projectifs réels du plan à deux ou à trois paramètres qui contiennent seulement des sous-groupes à un paramètre de cette nature. Enfin, à partir de là, nous pourrons conclure quelle forme possède le groupe linéaire homogène (29).

D'après les pages 107 et 384, tout groupe projectif réel à un paramètre du plan peut être rapporté, *via* une transformation projective réelle de ce plan, à l'une des sept formes suivantes :

$$(30) \quad \begin{cases} p + \eta q; & p + \xi q; & \eta q; & q; \\ \xi p + c \eta q & (c \neq 0, 1); & \eta p - \xi q + c(\xi p + \eta q) & (c \neq 0); \\ \eta p - \xi q. \end{cases}$$

Maintenant, quels sont ceux, parmi ces groupes à un paramètre, qui ont ici la constitution que nous demandons ?

Les cinq premiers ne l'ont certainement pas. En effet, par l'action de chacun d'entre eux, au moins une droite réelle reste au repos<sup>4</sup>, dont les points sont transformés par l'action d'un groupe à un paramètre, et pour préciser, de telle manière que sur cette droite, soit deux points *réels* séparés, soit deux points *réels* qui coïncident, conservent leur position. Il découle de là qu'un point réel d'une telle droite qui ne reste pas au repos peut certes se mouvoir librement en général sur la droite, mais qu'il n'est pas en état de parcourir continûment la droite de telle façon

<sup>3</sup> D'après les développements substantiels du Tome III qui précèdent cette Division V.

<sup>4</sup> Pour les groupes numéro 1, 3, 4 et 5, une telle droite fixe est, respectivement  $\{\eta = 0\}$ ,  $\{\xi = 0\}$ ,  $\{\xi = 0\}$  et  $\{\eta = 0\}$ . Pour le groupe numéro 2, c'est la droite à l'infini qui est invariante. On vérifie cela en effectuant le changement de carte projective  $\xi' = \frac{1}{\xi}$ ,  $\eta' = \frac{\eta}{\xi}$  qui transforme comme suit les champs de vecteurs basiques :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = -\xi' \xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} - \xi' \eta' \frac{\partial}{\partial \eta'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \xi' \frac{\partial}{\partial \eta'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} = -\xi' \xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} + (1 - \xi' \eta') \frac{\partial}{\partial \eta'},$$

ce qui montre que la droite  $\{\xi' = 0\}$  reste invariante dans ce système de coordonnées. Dans les cinq cas, en restriction à chaque droite invariante respective, le groupe est équivalent ou bien à  $\partial_x$  (le point à l'infini est fixe) ou bien à  $x\partial_x$  (l'origine et le point à l'infini sont tous deux fixes).

qu'il retourne finalement à sa position initiale sans revenir en arrière ; en effet, il ne peut pas franchir les points invariants de la droite.

Le groupe à un paramètre :

$$\eta p - \xi q + c(\xi p + \eta q) \quad (c \neq 0)$$

satisfait tout aussi peu notre exigence. En effet, par son action, chaque point réel non invariant décrit une spirale logarithmique<sup>5</sup> ; il parcourt alors cette spirale continûment sans revenir en arrière, donc, évidemment, il ne retourne pas à sa position initiale.

Par conséquent, le groupe à un paramètre :

$$(31) \quad \eta p - \xi q,$$

par l'action duquel tout point réel décrit un cercle, est le seul qui satisfait notre exigence parmi les groupes (30).

Si on considère maintenant les différents types de groupes projectifs réels du plan à deux et à trois paramètres (*voir* pp. 106 sq. et p. 384), alors on vérifie immédiatement que presque chacun d'entre eux contient un sous-groupe réel à un paramètre qui possède l'une des six premières formes (30), ou toutefois pour le moins, qui peut être ramené à l'une de ces formes par une transformation projective réelle. Le seul groupe projectif réel à deux ou à trois paramètres qui ne contient aucun sous-groupe à un paramètre tel que les six premiers de (30), est le groupe projectif réel à trois paramètres :

$$(32) \quad p + \xi(\xi p + \eta q), \quad q + \eta(\xi p + \eta q), \quad \eta p - \xi q$$

de la conique imaginaire :  $\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0$ .

Il découle de là que, sous les hypothèses posées, le groupe  $g$  défini à la page 249 est toujours à trois paramètres et qu'il peut être ramené, *via* une transformation projective réelle, à la forme (32).

En revenant maintenant au groupe linéaire homogène (29), on vérifie immédiatement (*cf.* p. 110) que par une transformation linéaire homogène réelle, celui-ci reçoit la forme :

$$x'_\mu p'_\nu - x'_\nu p'_\mu + \alpha_{\mu\nu} (x'_1 p'_1 + x'_2 p'_2 + x'_3 p'_3) \\ (\mu, \nu = 1, 2, 3; \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\nu\mu} = 0).$$

<sup>5</sup> En coordonnées polaires, ce générateur s'écrit  $\partial_\theta + c r \partial_r$  ; ses courbes intégrales satisfont  $\frac{d\theta}{dt} = 1$  et  $\frac{dr}{dt} = c r$ , d'où  $\theta = \theta_0 + t$  et  $r = r_0 e^{ct}$  : ce sont des spirales *non* périodiques lorsque  $c \neq 0$ .

En calculant les crochets de ces transformations par paires, on déduit enfin que tous les  $\alpha_{\mu\nu}$  s'annulent<sup>6</sup>.

Avec cela, nous sommes parvenus au résultat que, sous les hypothèses posées, le groupe linéaire homogène réel (29) peut toujours être supposé de la forme :

$$x'_1 p'_2 - x'_2 p'_1, \quad x'_2 p'_3 - x'_3 p'_2, \quad x'_3 p'_1 - x'_1 p'_3.$$

Mais il découle de là que chaque groupe réel de transformations qui satisfait nos Axiomes III et IV dans le voisinage de chaque point réel :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  en position générale contient trois transformations infinitésimales du premier ordre en les  $x_\nu - x_\nu^0$ , que l'on peut s'imaginer rapportées à la forme :

$$(x_\mu - x_\mu^0) p_\nu - (x_\nu - x_\nu^0) p_\mu + \dots \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3; \mu < \nu),$$

alors qu'au contraire, il ne contient pas d'autres transformations infinitésimales du premier ordre, et en particulier aucune de la forme :

$$(x_1 - x_1^0) p_1 + (x_2 - x_2^0) p_2 + (x_3 - x_3^0) p_3 + \dots$$

Mais avec cela, la détermination de tous ces groupes est ramenée au problème qui a déjà été résolu au § 84 (p. 365 sq.). Ainsi, nous pouvons tout d'abord en conclure que les groupes concernés sont finis, et pour préciser, qu'ils comportent six paramètres. En outre, on obtient qu'ils sont semblables, *via* une transformation ponctuelle réelle, soit au groupe des mouvements euclidiens, soit au groupe projectif réel d'une des deux surfaces du second degré :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

Par conséquent, chaque groupe réel de l'espace trois fois étendu qui satisfait nos Axiomes III et IV peut être transformé, *via* une transformation ponctuelle réelle, soit en le groupe des mouvements euclidiens, soit en l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens. En

<sup>6</sup> Posons  $R'_{\mu\nu} := x'_\mu p'_\nu - x'_\nu p'_\mu$  (générateur infinitésimal des rotations autour de la droite  $\{x'_\mu = x'_\nu = 0\}$ ) et  $D' := x'_1 p'_1 + x'_2 p'_2 + x'_3 p'_3$  (générateur infinitésimal des homothéties de centre l'origine). On a les relations de commutation  $[R'_{12}, R'_{23}] = R'_{13}$ ,  $[R'_{12}, R'_{13}] = -R'_{23}$ ,  $[R'_{13}, R'_{23}] = -R'_{12}$  et aussi  $[R'_{\mu\nu}, D'] = 0$ . Il en découle que le crochet de Lie :

$$\begin{aligned} [R'_{12} + \alpha_{12} D', R'_{23} + \alpha_{23} D'] &= [R'_{12}, R'_{23}] + \alpha_{23} [R'_{12}, D'] + \alpha_{12} [D', R'_{23}] + \alpha_{12} \alpha_{23} [D', D'] \\ &= R'_{13} \\ &= \lambda (R'_{13} + \alpha_{13} D') \end{aligned}$$

qui doit être combinaison linéaire des trois générateurs infinitésimaux  $R_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu} D'$  ne peut l'être que lorsque  $\alpha_{13} = 0$ , avec  $\lambda = 1$ . De même,  $\alpha_{12} = 0$  et  $\alpha_{23} = 0$ .

d'autres termes : nos Axiomes I . . . IV suffisent effectivement à caractériser ces trois sortes de mouvements.

### § 96.

Quelles conclusions peut-on tirer des axiomes helmholtziens ?

Nous voulons à présent faire complètement abstraction des recherches que Monsieur de Helmholtz lui-même a engagées sur la base de ses axiomes et nous voulons établir, comme nous l'avons déjà annoncé à la page 220, quelles conclusions peuvent être tirées des axiomes helmholtziens en eux-mêmes. Nous nous limitons donc à nouveau à l'espace ordinaire trois fois étendu.

Dans le § 93, nous avons indiqué comment les axiomes helmholtziens peuvent être formulés, quand on les interprète de la façon qui a été exposée au § 92 et lorsqu'on emploie de surcroît les concepts et les manières de s'exprimer de la théorie des groupes. Il nous reste maintenant à voir quels sont les groupes de l'espace trois fois étendu qui satisfont les exigences posées dans le § 93.

Chacun des groupes requis est réel, fini et continu, et relativement à son action, deux points ont un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de points supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel. Mais puisque, d'après le Théorème 37 p. 215, chaque groupe de cette espèce est semblable, *via* une transformation ponctuelle réelle, à l'un des groupes qui sont rassemblés à la page 215, il ne nous reste alors qu'à exclure, parmi ces groupes-là, ceux qui ne correspondent pas aux exigences restantes du § 93.

Ces exigences restantes reviennent toutes à ce que nos groupes, à l'intérieur d'une certaine région finie de l'espace trois fois étendu, doivent posséder certaines propriétés. Puisque l'origine des coordonnées est un point en position générale pour tous les groupes de la page 215, nous pouvons clairement admettre que la région en question est constituée de tous les points réels qui se trouvent dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées. Par conséquent, nous devons seulement rechercher encore, parmi les groupes de la page 215, quels sont ceux qui possèdent les propriétés suivantes :

Premièrement, l'invariant :  $J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$  de deux points doit être constitué de telle sorte que la relation :

$$(33) \quad J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = J(x_1^0, y_1^0, z_1^0; x_2^0, y_2^0, z_2^0),$$

pour chaque paire de systèmes de valeurs distincts l'un de l'autre :  $x_1^0, y_1^0, z_1^0$  et  $x_2^0, y_2^0, z_2^0$ , fournit une véritable équation entre  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ , dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées.

Deuxièmement, après fixation de l'origine des coordonnées, chaque point quelconque  $x_0, y_0, z_0$  qui est situé dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées, doit pouvoir encore se transformer en tous les points  $x, y, z$  de ce voisinage, qui satisfont l'équation :

$$(34) \quad J(x, y, z; 0, 0, 0) = J(x_0, y_0, z_0; 0, 0, 0),$$

et à travers laquelle un transfert continu entre tous les points de cette sorte est généralement possible\*.

Troisièmement, l'axiome de monodromie doit être satisfait.

Nous recherchons tout d'abord, pour chaque groupe individuel de la page 215, si la première de ces exigences est satisfaite, et lorsqu'elle l'est, nous nous demandons alors si la deuxième est satisfaite ; et nous ne prendrons en considération l'axiome de monodromie que dans les dernières lignes. Comme par ailleurs le groupe des mouvements euclidiens et les deux groupes de mouvements non-euclidiens satisfont évidemment toutes nos exigences, dès le début, nous les laissons simplement de côté.

Le fait que les deux groupes :

$$(35) \quad p, \quad q, \quad r, \quad xq - yp, \quad yr + zq, \quad zp + xr$$

et :

$$(36) \quad p - xU, \quad q - yU, \quad r + zU, \quad xq - yp, \quad yr + zq, \quad zp + xr$$

satisfont notre première exigence est à portée de main, puisque par exemple, pour le premier d'entre eux, l'équation (33) s'énonce de la manière suivante :

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ = (x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2 - (z_2^0 - z_1^0)^2, \end{cases}$$

et ceci est toujours une véritable équation entre  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ . Néanmoins, ces deux groupes ne satisfont pas la deuxième exigence.

---

\* À vrai dire, dans le § 93, on demande encore plus, mais nous verrons que cette exigence suffit déjà complètement.

En effet, l'équation (34) correspondante a, pour les deux groupes, la forme :

$$(37) \quad x^2 + y^2 - z^2 = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2.$$

Et maintenant, après fixation de l'origine des coordonnées, le point  $x_0, y_0, z_0$  peut à vrai dire en général être transformé encore en tous les points qui satisfont l'équation (37) ; mais pour tous les points  $x_0, y_0, z_0$  qui se trouvent sur la conique du second degré :  $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0$ , cela n'est plus valable ; effectivement, pour ces points, l'équation (37) reçoit la forme :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

et il est clair que chaque point de cette espèce peut se transformer en tous les points qui satisfont cette équation, à l'exception de l'origine des coordonnées, car, sous les hypothèses posées, elle reste au repos.

Nous voyons donc que les groupes (35) et (36) sont déjà exclus, sans qu'on utilise l'axiome de monodromie.

Pour le groupe :

$$(38) \quad p, \quad q, \quad xp + r, \quad yq + cr, \quad x^2p + 2xr, \quad y^2q + 2cyr \quad (c \neq 0),$$

on peut écrire l'équation (33) correspondante sous la forme :

$$\frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^c}{e^{\frac{1}{2}(z_1 + z_2)}} = \frac{(x_2^0 - x_1^0)(y_2^0 - y_1^0)^c}{e^{\frac{1}{2}(z_1^0 + z_2^0)}}.$$

Si  $c$  est négatif, alors cette équation n'a plus de sens aussitôt que l'on pose  $x_2^0 = x_1^0$  et  $y_2^0 = y_1^0$  ;

si au contraire,  $c$  est positif, elle fournit alors, pour toute paire de systèmes de valeurs  $x_1^0, y_1^0, z_1^0$  et  $x_2^0, y_2^0, z_2^0$  distincts l'un de l'autre, une véritable équation entre  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ . Le groupe (38) satisfait donc notre première exigence seulement lorsque  $c$  est positif.

Mais il ne satisfait pas notre deuxième exigence, même dans le cas :  $c > 0$ . En effet, pour notre groupe, l'équation (34) reçoit la forme :

$$\frac{x \cdot y^c}{e^{\frac{1}{2}z}} = \frac{x_0 \cdot y_0^c}{e^{\frac{1}{2}z_0}},$$

et après fixation de l'origine des coordonnées, le point  $x_0, y_0, z_0$  devrait pouvoir occuper toutes les positions qui satisfont cette équation dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées. C'est à vrai dire effectivement le cas pour un point  $x_0, y_0, z_0$  en position générale. Cependant, en choisissant par exemple  $x_0 = y_0 = 0$ , le point  $x_0, y_0, z_0$  devrait encore pouvoir être transformé en tous les points se trouvant dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées qui satisfont l'équation :

$xy^c = 0$ , mais cela est impossible, car après fixation de l'origine des coordonnées, tous les points de la droite :  $x = y = 0$  restent en général au repos (voir p. 205).

Par conséquent, le groupe (38) est lui aussi exclu, sans qu'on soit obligé de se préoccuper de l'axiome de monodromie.

Qui plus est, notre première exigence n'est même encore jamais satisfaite par le groupe :

$$(39) \quad \begin{cases} p, & q, & xp + yq + ar, & yp - xq + r, \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(ax - y)r \\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(x + ay)r, \end{cases}$$

puisque l'équation (33) correspondante ne fournit en effet pas toujours une véritable équation entre  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ , lorsqu'on pose :  $x_2^0 = x_1^0, y_2^0 = y_1^0$ .

Il en va autrement pour le groupe :

$$(40) \quad \begin{cases} p, & q, & xp + yq + r, & yp - xq \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr \\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr. \end{cases}$$

Pour celui-ci, l'équation (33) s'écrit en effet :

$$\begin{aligned} & \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\} e^{-(z_1 + z_2)} = \\ & = \{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2\} e^{-(z_1^0 + z_2^0)}, \end{aligned}$$

et ceci constitue toujours une équation véritable entre  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ . Notre première exigence est donc satisfaite ; mais la deuxième ne l'est pas.

En effet, l'équation (34) s'écrit maintenant :

$$(x^2 + y^2) e^{-z} = (x_0^2 + y_0^2) e^{-z_0},$$

et si notre deuxième exigence devait être satisfaite, après fixation de l'origine des coordonnées, alors par exemple, chaque point  $x_0, y_0, z_0$  pour lequel  $x_0 = y_0 = 0$  devrait pouvoir être transformé encore en tous les autres points qui satisfont l'équation :  $x^2 + y^2 = 0$  ou encore, puisqu'il s'agit de quantités réelles, les deux équations :  $x = y = 0$ . Mais cela est impossible, car, en même temps que l'origine des coordonnées, tous les points de la droite :  $x = y = 0$  restent généralement au repos.

Par conséquent, les groupes (39) et (40) n'entrent pas non plus en ligne de compte.



Les deux groupes :

$$(41) \quad \begin{cases} p, & q, & xq + r, & xp + yq + cr, & x^2q + 2xr, \\ & & x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r & & \end{cases}$$

et :

$$(42) \quad p, \quad q, \quad r, \quad 2xp + yq, \quad xq + yr, \quad x^2p + xyq + \frac{1}{2}y^2r$$

ne satisfont pas non plus notre première exigence ; dans les deux cas en effet, l'équation (33) correspondante ne fournit aucune équation véritable entre  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ , aussitôt que l'on pose  $x_2^0 = x_1^0, y_2^0 = y_1^0$ .

Enfin, le groupe :

$$(43) \quad r, \quad p - yr, \quad q + xr, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp$$

satisfait certes notre première exigence, mais pas la deuxième. L'équation (34) correspondante s'écrit en effet :  $z = z_0$ , et par conséquent, après fixation de l'origine des coordonnées, chaque autre point  $x_0, y_0, z_0$  devrait pouvoir se transformer encore en tous les autres points qui se trouvent sur le plan :  $z = z_0$ . Les points pour lesquels  $x_0 = y_0 = 0$  montrent que cela n'est pas le cas, car ils restent tous au repos après fixation de l'origine des coordonnées.

Par ce qui précède, on a démontré que *le groupe des mouvements euclidiens et les deux groupes de mouvements non-euclidiens sont les seuls groupes qui satisfont les exigences énoncées au § 93 ; ce sont les seuls groupes de cette espèce, même lorsqu'on laisse complètement de côté l'axiome de monodromie.*

Nous voyons donc que les axiomes helmholtziens sont suffisants pour la caractérisation des mouvements euclidiens et non-euclidiens, *si on les interprète de la même manière qu'aux § 92 et 93 ;* mais nous voyons en même temps qu'en prenant pour base cette interprétation, l'axiome de monodromie est de toute façon superflu. Mais bien qu'il se soit avéré que l'on peut se passer de l'un des axiomes de Helmholtz, se présente juste après la question de savoir si on ne peut pas se passer aussi encore d'autres parties de ces axiomes. Dans le Chapitre 23 nous montrerons qu'il faut répondre par l'affirmative à cette question.

Mais il y a encore un point qui mérite d'être pris en considération. Dans les § 92 et 93, nous avons interprété les axiomes helmholtziens d'une certaine manière. Nous sommes loin d'affirmer que cette interprétation qui est la nôtre soit la seule possible, et nous dirons plutôt sans détour que les axiomes en question autorisent des interprétations

diverses. Cela réside dans la nature des choses : Monsieur de Helmholtz, qui n'avait pas à sa disposition les concepts et la langue spécialisée instruite de la théorie des groupes, a dû s'aider de longues circonlocutions par lesquelles, cependant, il n'a pas pu prendre en compte toutes les exceptions imaginables ; ainsi, il est tout à fait compréhensible que ses axiomes apparaissent avoir d'autant plus de sens variés qu'on les examine plus soigneusement. Maintenant, bien que nous n'affirmions pas avoir donné la seule interprétation possible des axiomes helmholtziens, nous croyons toutefois que nous leur avons attribué l'interprétation la plus intéressante qui soit, celle qui est en accord avec leur teneur ; nous y avons même déjà trop introduit maint lecteur.

Nous ne voulons pas rentrer plus avant dans la considération des diverses conceptions que l'on peut avoir au sujet des axiomes helmholtziens ; toutefois, nous voulons encore en discuter brièvement.

En effet, la manière dont on peut interpréter ces axiomes dépend pour l'essentiel du fait de savoir si on lit en eux qu'ils doivent être valables sans exception à l'intérieur d'une certaine région, ou si l'on admet qu'ils doivent être valables seulement en général, donc pour des points qui sont mutuellement en position générale. Dans les paragraphes 92 et 93, nous nous sommes décidés pour la première conception, mais la deuxième possède aussi une certaine légitimité, au moins en ce qui concerne le troisième axiome helmholtzien, l'axiome sur la libre mobilité. Afin de montrer quelle influence cette conception a sur la portée des axiomes helmholtziens, nous voulons finalement rechercher encore ce qui advient lorsque les axiomes helmholtziens sont satisfaits seulement par des points qui sont mutuellement en position générale. Nous allons voir que ces axiomes ne suffisent alors pas à caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens, même si on admet en plus l'axiome de monodromie.

Si un groupe réel doit satisfaire les axiomes helmholtziens seulement en ce qui concerne des points qui sont mutuellement en position générale, alors il doit, quand on fait d'abord abstraction de l'axiome de monodromie, posséder les propriétés suivantes : si un point en position générale est fixé, tout autre point en position générale se meut librement sur une surface ; si deux points qui sont mutuellement en position générale sont fixés, tout autre troisième point en position générale se meut librement sur une courbe ; si trois points qui sont mutuellement en position générale sont fixés, tous les points restent au repos. Il est clair que les groupes rassemblés à la page 215 satisfont toutes ces exigences et qu'ils sont les seuls à les satisfaire.

Si nous admettons en plus l'axiome de monodromie, alors tout un nombre des groupes dont il s'agit seront exclus, parce qu'ils ne satisfont pas l'axiome de monodromie ; mais il reste alors non seulement les mouvements euclidiens et non-euclidiens, mais en outre encore un groupe, à savoir le groupe **7** à la page 215. On a démontré aux pages 243 sq. qu'il satisfait complètement l'axiome de monodromie helmholtzien. Par conséquent, sous les hypothèses posées, l'axiome de monodromie ne suffit pas à exclure aussi ce groupe.

En définitive [*Alles in Allem*], nous pouvons énoncer brièvement le résultat du présent paragraphe ainsi :

*Les mouvements euclidiens et non-euclidiens sont complètement caractérisés par les axiomes helmholtziens, lorsqu'on interprète ces axiomes de telle sorte qu'ils doivent être satisfaits sans exception par tous les points à l'intérieur d'une certaine région ; et quand on les interprète de cette manière, l'axiome de monodromie est alors superflu. Si au contraire on demande seulement que les axiomes helmholtziens soient satisfaits par des points qui sont mutuellement en position générale, alors ces axiomes ne sont pas suffisants pour caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens, et il ne suffisent d'ailleurs même pas lorsqu'on admet en plus l'axiome de monodromie.*

Nous avons vu que les axiomes helmholtziens suffisent certes pour la caractérisation des mouvements euclidiens et non euclidiens, lorsqu'on les interprète d'une certaine manière, mais qu'ils contiennent des éléments superflus quand on les interprète ainsi, et par conséquent, ils ne représentent pas une véritable solution du problème de Riemann-Helmholtz. Dans les deux chapitres suivants, nous allons maintenant traiter le problème de Riemann-Helmholtz d'un point de vue nouveau, et nous allons le résoudre de deux façons différentes, à savoir, dans le Chapitre 22, en établissant certains axiomes qui se réfèrent à des points infiniment voisins, et dans le Chapitre 23, *via* des axiomes qui se réfèrent à des points finiment éloignés.

## Chapitre 22.

### **Première solution du problème de Riemann-Helmholtz.**

Le problème de Riemann-Helmholtz, comme nous l'avons formulé à la page 163, demande d'indiquer des propriétés qui sont communes à la famille de mouvements euclidiens et aux deux familles de mouvements non-euclidiens et grâce auxquelles ces trois familles se distinguent de toutes les autres familles possibles de mouvements.

Comme ce problème est en fait indéterminé, nous le spécifions plus précisément dès le début par l'exigence que l'ensemble des propriétés à indiquer doivent non seulement être suffisantes pour caractériser nos trois familles, mais encore être nécessaires, c'est-à-dire que ces trois familles-là de mouvements ne doivent pas seulement être caractérisées par une fraction des propriétés en question. Mais cependant, même sous cette version déterminée, le problème admet encore des solutions très diverses, puisque dans le choix des propriétés requises, on n'est par ailleurs soumis à aucune limitation supplémentaire.

Parmi les propriétés qui sont communes à nos trois familles de mouvements, il s'en trouve une qui nous touche de près, à savoir que chacune des trois familles constitue un groupe réel continu, dont les transformations sont inverses l'une de l'autre par paires. Nous supposons alors depuis le début cette propriété comme quelque chose de donné\*, et nous devons maintenant simplement demander encore : *Par quelles propriétés peut-on distinguer le groupe des mouvements euclidiens et les deux groupes de mouvements non-euclidiens parmi tous les groupes réels continus possédant des transformations inverses par paire ?* Pour alléger le discours, nous supprimerons toujours dans la

---

\* Nous ne voulons pas passer sous silence le fait qu'il est tout à fait possible d'établir d'autres exigences dont découlent cette propriété de type « groupe ». Mais on peut bien sûr soutenir qu'il est conforme à la nature des choses d'établir dès le début ces exigences quant à la nature des groupes. Dans le concept de mouvement se trouve en effet le fait qu'on peut accomplir deux mouvements l'un après l'autre, et il découle de là immédiatement que l'ensemble des transformations qui représentent des changements de lieu possibles par mouvement forme un groupe. Nous ajoutons seulement encore l'hypothèse que le groupe est continu et qu'il est constitué de transformations inverses l'une de l'autre. Du reste, dans le Chapitre 21, nous avons déjà donné une solution qui ne fait pas usage de cette dernière propriété des groupes.

suite les mots : « possédant des transformations inverses par paires », et ces mots seront ainsi à chaque fois sous-entendus.

Dans le présent chapitre nous allons répondre à cette question d'une manière telle que nous nous limiterons aux propriétés qui se réfèrent à des points infiniment voisins. Nous allons introduire un nouveau concept, à savoir le concept de *libre mobilité dans l'infinitésimal*, et nous montrerons que chaque groupe réel continu agissant sur un espace dont la dimension est strictement supérieure à deux qui possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point de position générale est semblable, *via* une transformation ponctuelle réelle de l'espace en question, soit au groupe des mouvements euclidiens, soit à l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens de l'espace en question. Par conséquent, il sera alors démontré que les propriétés que nous aurons réunies dans le concept de libre mobilité dans l'infinitésimal, seront des propriétés caractéristiques telles que celles que nous recherchons\*.

Dans le § 97 nous prendrons tout d'abord en considération le plan, dans lequel, à vrai dire, le concept de libre mobilité dans l'infinitésimal ne suffit encore pas pour caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens. Dans le § 98, nous traiterons de l'espace ordinaire trois fois étendu, et dans le § 99, de l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Dans le § 100 enfin, nous étudierons brièvement les liens qui existent entre nos développements et ceux de Riemann.

### § 97.

Soit  $\mathcal{G}$  un groupe réel continu d'un espace quelconque et soit  $F$  une figure quelconque dans cet espace. Alors, si  $\mathcal{G}$  contient un sous-groupe continu à au moins un paramètre par l'action duquel la figure  $F$  reste invariante, nous voulons dire qu'après fixation de  $F$ , un mouvement continu est encore possible par le groupe  $\mathcal{G}$ . Si au contraire le plus grand sous-groupe continu de  $\mathcal{G}$  qui laisse  $F$  invariante est seulement constitué de la transformation identique, alors nous disons qu'après fixation de  $F$ , plus aucun mouvement continu n'est possible.

En utilisant une telle manière de s'exprimer, nous définissons maintenant ce que nous entendons par « libre mobilité dans l'infinitésimal » pour un plan.

**Définition.** *Un groupe réel continu du plan possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point réel  $P$  lorsque les conditions suivantes sont remplies : Après fixation de  $P$ , un mouvement continu doit*

---

\* Ce qui suit est une refonte de l'étude que Lie a conduite aux pages 284 à 321 du *Leipziger Berichte* de 1890.

*encore être possible ; au contraire, aucun mouvement ne doit plus être possible, aussitôt que l'on a fixé, outre  $P$ , un élément linéaire quelconque passant par  $P$ .*

Nous cherchons maintenant tous les groupes réels continus du plan qui possèdent la libre mobilité dans l'infinésimal en un point réel *de position générale*.

Soit  $G$  un groupe ayant les qualités requises et soit  $P$  un point réel de position générale, en lequel  $G$  possède la libre mobilité dans l'infinésimal. Si ensuite  $g$  est le plus grand sous-groupe continu de  $G$  par lequel le point  $P$  reste au repos, chaque élément linéaire réel passant par  $P$  doit pouvoir tourner continûment autour de  $P$  par l'action de  $g$  ; car si tel n'était pas le cas,  $g$  laisserait au moins un de ces éléments linéaires au repos, et  $g$  serait alors le plus grand sous-groupe continu de  $G$  par lequel le point  $P$  et l'élément linéaire en question restent invariants, et  $g$  devrait par conséquent se réduire à la transformation identique, alors que nous avons toutefois supposé qu'après fixation de  $P$ , un mouvement continu était encore possible.

Il découle de là immédiatement que  $G$  n'est pas seulement transitif, mais qu'il est même aussi réel-primitif\*. Si en effet il était intransitif ou s'il était réel-imprimitif, il laisserait invariante une famille réelle de courbes :  $\varphi(x, y) = \text{const.}$ , et alors par conséquent, en même temps que chaque point réel  $x, y$  fixé en position générale, l'élément linéaire réel :  $dx : dy$  passant par ce point, qui est déterminé par l'équation :  $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ , resterait simultanément au repos ; mais comme, après fixation d'un point  $P$  qui se trouve bien sûr aussi en position générale, aucun élément linéaire réel passant par ce point ne doit rester au repos, nous parvenons ainsi à une contradiction.

Il est par ailleurs facile de vérifier que notre groupe est à trois paramètres. En effet, si on fixe le point  $P$  et un élément linéaire réel quelconque passant par ce point, alors aucun mouvement continu n'est encore possible, et il ne reste donc plus aucun paramètre arbitraire dans le groupe. Comme en outre  $P$ , en tant que point de position générale, peut prendre  $\infty^2$  positions différentes à cause de la transitivité du groupe, et comme, après fixation de  $P$ , les éléments linéaires réels passant par  $P$  peuvent encore tourner tout autour de  $P$ , la fixation du point et de

---

\* Par souci de brièveté, nous appelons *réel-primitif* tout groupe réel qui est primitif, dès qu'on se restreint au domaine réel, bien qu'il puisse être imprimitif dans le domaine complexe (cf. p. 363).

l'élément linéaire fournit donc exactement *trois* conditions pour les paramètres de  $G$ , et par conséquent, le nombre de ces paramètres est simplement égal à *trois*. Et maintenant, puisque nous avons déjà déterminé aux pages 370 sq. tous les groupes réels à trois paramètres du plan qui sont réels-primitifs, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 38.** *Si un groupe réel continu du plan possède la libre mobilité dans l'infinésimal en un point réel de position générale, alors il est à trois paramètres et il est semblable, via une transformation ponctuelle réelle de ce plan, soit au groupe réel continu projectif à trois paramètres de la conique<sup>1</sup> :*

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

*soit au groupe réel continu projectif de la conique<sup>2</sup> :*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

*soit à l'un des groupes projectifs à trois paramètres de la forme :*

$$p, \quad q, \quad yp - xq + c(xp + yq),$$

*où  $c$  désigne une constante réelle.*

En ce qui concerne les groupes que l'on a trouvés ici, il est avant tout remarquable qu'ils possèdent tous la libre mobilité dans l'infinésimal en tous les points réels d'une certaine partie du plan, alors que nous avons demandé seulement qu'ils possèdent cette propriété en *un* point réel de position générale<sup>3</sup>. Ce phénomène trouve son origine dans le fait que chaque groupe qui possède la libre mobilité dans l'infinésimal en un point réel de position générale possède aussi cette propriété en tous les points réels qui se trouvent dans un certain voisinage du point en question.

D'un autre côté, les groupes que l'on a trouvés montrent que dans le plan, la libre mobilité dans l'infinésimal ne suffit encore pas pour caractériser le groupe des mouvements euclidiens et les deux groupes de

<sup>1</sup> Trois générateurs infinitésimaux sont :  $p + x^2p + xyq$ ,  $q + xyp + y^2q$  et  $yp - xp$ ; ils annulent en effet l'équation de la conique en restriction à la conique.

<sup>2</sup> Trois générateurs infinitésimaux sont :  $-p + x^2p + xyq$ ,  $-q + xyp + y^2q$  et  $yp - xp$ .

<sup>3</sup> De toute façon, par analyticité, dès qu'elle est satisfaite en un seul point, la libre mobilité dans l'infinésimal est alors satisfaite en tous les points qui n'appartiennent pas à un certain sous-ensemble analytique fermé de codimension  $\geq 1$ , donc notamment en tous les points d'un certain ouvert dense.

mouvements non-euclidiens, car en dehors de ces trois groupes, chaque groupe de la forme<sup>4</sup> :

$$p, \quad q, \quad yp - xq + c(xp + yq) \quad (c \geq 0)$$

possède effectivement encore la libre mobilité dans l'infinitésimal en tout point réel qui n'est pas infiniment éloigné. Si l'on veut exclure ces groupes, afin de ne conserver que les mouvements euclidiens et non-euclidiens, on doit donc établir un axiome spécial. Cependant, cette observation ne coïncide pas avec la remarque de Monsieur de Helmholtz, d'après laquelle dans le plan, le groupe euclidien et les deux groupes non-euclidiens ne sont pas les seuls relativement auxquels deux points ont un et un seul invariant, tandis qu'un nombre de points supérieur à deux n'a pas d'invariant essentiel.

Nous voulons maintenant compléter les résultats acquis en recherchant aussi tous les groupes réels continus *projectifs* du plan qui possèdent la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point réel de position générale. La connaissance de ces groupes nous sera utile plus tard, lorsque nous envisagerons l'espace trois fois étendu.

Exactement comme plus haut, nous vérifions tout d'abord que chaque groupe projectif du plan qui satisfait nos exigences est transitif et possède trois paramètres. D'après notre énumération des groupes projectifs du plan à trois paramètres (*voir* p. 106), on obtient à nouveau que chacun des groupes demandés laisse invariant soit une conique, soit un point.

Si une conique reste invariante, alors son équation doit être réelle, car sinon la conique imaginaire conjuguée resterait aussi invariante et notre groupe ne pourrait pas alors être à trois paramètres.

Et maintenant, puisque chaque conique dont l'équation est réelle peut être ramenée, *via* une transformation projective réelle, à l'une des deux formes :  $x^2 + y^2 \pm 1 = 0$ , ce cas-là est déjà réglé.

Si d'un autre côté un point reste invariant, alors ce point ne peut pas être réel<sup>5</sup>, car sinon, si un point réel en position générale était fixé, chaque élément linéaire passant par ce point ne pourrait pas tourner autour de lui, et donc il n'y aurait aucun point réel de position générale

<sup>4</sup> Les courbes intégrales du troisième champ sont des spirales s'enroulant autour de l'origine, qui dégénèrent en cercles pour  $c = 0$ .

<sup>5</sup> Les transformations sont projectives, donc la droite passant par le point universellement fixe et le point  $P$  qu'on fixe en position générale serait stabilisée, ce qui contredirait la libre mobilité dans l'infinitésimal en  $P$ .



en lequel il posséderait la libre mobilité dans l'infinésimal. Par conséquent, le point invariant est imaginaire et le point imaginaire conjugué reste simultanément au repos, ainsi que la droite de liaison réelle passant par les deux.

Si nous déplaçons alors les deux points appropriés grâce à une transformation réelle projective en les deux points du cercle notre groupe se transforme en un sous-groupe à trois paramètres du groupe suivant à quatre paramètres :

$$(1) \quad p, \quad q, \quad yp - xq, \quad xp + yq,$$

et nous devons par conséquent seulement rechercher encore tous les sous-groupes à trois paramètres de ce groupe, qui satisfont notre exigence.

Si un sous-groupe réel  $G$  de (1) à trois paramètres possède la libre mobilité dans l'infinésimal en un point  $x_0, y_0$  de position générale, alors, quand on fixe ce point, les  $\infty^1$  éléments linéaires :  $dx : dy$  qui passent par ce point sont transformés par l'action d'un groupe à un paramètre. Si nous nous imaginons maintenant que le point :  $x_0, y_0$  est déplacé sur l'origine des coordonnées grâce à une transformation réelle du groupe à deux paramètres :  $p, q$ , alors le groupe  $G$  reçoit une nouvelle forme dans laquelle il y a en tout cas une transformation infinitésimale de la forme :

$$(2) \quad yp - xq + c(xp + yq),$$

car :  $xp + yq$  laisse généralement au repos chaque élément linéaire passant par l'origine des coordonnées. De plus, comme groupe transitif,  $G$  contient encore deux transformations infinitésimales de la forme<sup>6</sup> :

$$p + \alpha(xp + yq), \quad q + \beta(xp + yq).$$

En calculant maintenant les crochets avec (2), on obtient :

$$-q + cp, \quad p + cq,$$

et comme  $c$  est réel, et que  $G$  ne peut contenir que trois transformations infinitésimales indépendantes, on en déduit que  $\alpha$  et  $\beta$  s'annulent tous deux, et que par conséquent  $G$  possède la forme :

$$p, \quad q, \quad yp - xq + c(xp + yq).$$

Ainsi, la proposition suivante est valide.

<sup>6</sup> — après combinaison linéaire *via* (2) —

**Proposition 1.** *Si un groupe projectif réel continu du plan possède la libre mobilité dans l'infinésimal en un point réel de position générale, alors il est à trois paramètres et il est semblable, via une transformation projective<sup>7</sup> réelle du plan, à l'un des groupes projectifs indiqués dans le Théorème 38.*

Parmi les groupes projectifs rassemblés dans le Théorème 38, il y en a deux qui ne possèdent pas la libre mobilité dans l'infinésimal en certains points réels, à savoir premièrement le groupe de la conique :  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , et deuxièmement le groupe :  $p, q, yp - xq + c(xp + yq)$ . Pour le premier, la libre mobilité dans l'infinésimal n'a pas lieu en tous les points réels de la conique et aussi en tous les points de la conique qui ne sont pas réels<sup>8</sup>, et pour le deuxième, en tous les points réels de la droite à l'infini. Au contraire, il n'y a aucun point exceptionnel tel<sup>9</sup>

**Théorème 39.** *Si un groupe projectif réel continu du plan possède sans exception la libre mobilité dans l'infinésimal en tous les points réels, alors il est transitif à trois paramètres et il peut être transformé, via une transformation réelle projective, en le groupe projectif réel à trois paramètres de la conique :  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .*

### § 98.

Les recherches des précédents paragraphes doivent maintenant être accomplies pour l'espace ordinaire trois fois étendu. Nous définissons donc tout d'abord ce que nous entendons ici par « libre mobilité dans l'infinésimal ».

**Définition.** *Un groupe réel continu de l'espace trois fois étendu possède la libre mobilité dans l'infinésimal en un point réel  $P$  lorsque les conditions suivantes sont remplies : Si l'on fixe le point  $P$  et un élément linéaire quelconque passant par ce point, alors un mouvement continu doit toujours être possible ; si au contraire on fixe encore, outre  $P$  et cet élément linéaire-là, un élément de surface quelconque, qui passe par les deux, alors aucun mouvement continu ne doit être encore possible.*

<sup>7</sup> Comparé au Théorème 38, tout est projectif, maintenant.

<sup>8</sup> En effet, puisque la conique (le cercle) est stabilisé, les directions tangentes sont elles aussi fixées, dans le domaine réel aussi bien que dans le domaine complexe.

<sup>9</sup> En effet, ce n'est qu'en les points, tous purement complexes, de la conique qu'on n'a pas libre mobilité dans l'infinésimal.

Nous cherchons maintenant tous les groupes réels continus de  $R_3$  qui possèdent la libre mobilité dans l'infinésimal en un point réel de position générale.

Soit  $G$  un groupe ayant la qualité requise et soit  $P$  le point réel de position générale en lequel  $G$  possède la libre mobilité dans l'infinésimal. Si on fixe ensuite  $P$  et en outre aussi un élément linéaire quelconque passant par lui, alors chaque élément de surface passant par les deux doit encore pouvoir tourner continûment autour de l'élément linéaire en question, sinon aucun mouvement continu ne serait encore possible après fixation de l'élément linéaire concerné, en contradiction avec notre hypothèse.

Se laisse déduire de là que  $G$  est transitif. En effet, si  $\infty^1$  surfaces réelles :  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$  restaient invariantes, alors  $P$  en commun avec le plan tangent à la surface :  $\varphi = \text{const.}$  passant par lui déterminerait un élément de surface qui ne pourrait tourner autour d'aucun élément linéaire contenu en lui. D'un autre côté, si  $\infty^2$  courbes réelles restaient invariantes, alors on pourrait les arranger d'une infinité de manières en une famille de  $\infty^1$  surfaces invariantes, et l'on reviendrait donc à la situation dont on a démontré à l'instant qu'elle est impossible.

À travers notre point  $P$  passent  $\infty^2$  éléments linéaires :  $dx_1 : dx_2 : dx_3$ , qui forment une variété plane deux fois étendue. Si l'on fixe  $P$ , alors cette variété est transformée par un groupe réel projectif  $\mathfrak{g}$  qui est manifestement constitué de telle sorte qu'après fixation d'un élément linéaire réel quelconque, chaque élément de surface le contenant peut tourner autour de l'élément linéaire, tandis qu'absolument aucun mouvement continu n'est encore possible, aussitôt qu'on fixe un élément linéaire réel quelconque et un élément de surface quelconque le contenant<sup>1</sup>. Mais en rapportant maintenant les  $\infty^2$  éléments linéaires passant par  $P$  de manière projective aux points réels d'un plan, le groupe  $\mathfrak{g}$  se transforme alors en un groupe réel projectif  $\mathfrak{g}'$  de ce plan qui est isomorphe-holoédrique à  $\mathfrak{g}$ , et comme les éléments de surface réels passant par  $P$  correspondent en même temps aux éléments linéaires réels de ce plan, nous reconnaissons alors immédiatement que le groupe  $\mathfrak{g}'$  possède la libre mobilité dans l'infinésimal sans exception en tous les points de ce plan. D'après le Théorème 39, il découle de là que  $\mathfrak{g}'$  est transitif à trois paramètres et qu'il peut être transformé, *via* une transformation réelle projective du plan, en le groupe de la conique :  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ . Par conséquent le groupe  $\mathfrak{g}'$  est aussi transitif à trois

<sup>1</sup> Fixer ou bien seulement un élément-plan ou bien seulement un élément-ligne laisse bien entendu encore des degrés de liberté.

paramètres et il laisse invariante une conique imaginaire d'éléments linéaires dont nous pouvons nous imaginer l'équation rapportée à la forme :

$$(3) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0,$$

via une transformation linéaire homogène en  $dx_1, dx_2, dx_3$ .

En appliquant cela au groupe  $G$ , on obtient avant tout que  $G$  est à six paramètres. Si en effet l'on fixe le point  $P$ , ainsi qu'un élément linéaire réel passant par  $P$  et un élément de surface réel quelconque qui les contient tous deux, alors les paramètres de  $G$  seront ainsi soumis à exactement  $3 + 2 + 1 = 6$  conditions, ce qui découle de la transitivité de  $G$  et de la propriété de  $\mathfrak{g}$  qu'on a décrite plus haut. Mais alors, comme d'après les hypothèses qu'on a justement posées, plus aucun mouvement continu n'est encore possible, le nombre de ces paramètres doit être précisément égal à six.

En outre, il est clair qu'après fixation de  $P$ , le groupe transitif à six paramètres  $G$  transforme les  $\infty^2$  éléments linéaires réels par une action à trois paramètres, et pour préciser, de telle sorte que reste invariante une conique imaginaire du second degré constituée d'éléments linéaires. Si donc nous nous imaginons  $P$  transféré sur l'origine des coordonnées via une transformation ponctuelle réelle, et si ensuite on produit une transformation linéaire homogène réelle en  $x_1, x_2, x_3$  pour que la conique d'éléments linéaires rattachée à  $P$  soit représentée par l'équation (3), alors  $G$  reçoit une nouvelle forme telle que dans le voisinage de l'origine des coordonnées, il contient six transformations infinitésimales indépendantes de la forme :

$$\begin{aligned} p_1 + \dots, \quad p_2 + \dots, \quad p_3 + \dots, \\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \alpha_{\mu\nu} (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \dots \\ (\mu, \nu = 1, 2, 3; \quad \mu < \nu). \end{aligned}$$

Comme  $G$  est à six paramètres, les constantes réelles  $\alpha_{\mu\nu}$  doivent ici toutes s'annuler ensemble, comme on s'en convainc aisément en calculant les crochets.

Le groupe  $G$  appartient donc aux groupes réels que nous avons déterminés aux pages 385 sq. ; comme il est à six paramètres, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 40.** *Si un groupe réel continu de l'espace trois fois étendu possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point de position générale, alors il est transitif à six paramètres et il est équivalent, via une transformation ponctuelle réelle de cet espace, soit au groupe*

*des mouvements euclidiens<sup>2</sup>, soit à l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens de cet espace, et par conséquent dans le deuxième cas ou bien au groupe projectif réel continu à six paramètres par lequel la surface imaginaire<sup>3</sup> :  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$  reste invariante, ou bien au groupe projectif réel continu de la surface réelle non réglée :  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ .*

Nous voyons ainsi que dans l'espace trois fois étendu, la libre mobilité dans l'infinitésimal suffit parfaitement pour caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens, ce qui offre un nouvel exemple du fait que l'espace trois fois étendu se distingue essentiellement de l'espace deux fois étendu.

Nous pouvons maintenant indiquer aussi immédiatement tous les groupes projectifs réels continus de l'espace ordinaire, qui possèdent la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point de position générale.

Chaque groupe projectif  $\mathcal{G}$  de cette espèce est en effet semblable, *via* une transformation ponctuelle réelle, à l'un des trois groupes du théorème démontré à l'instant. Mais d'après le Théorème 19, p. 292, chacun de ces groupes peut être transformé à nouveau en un groupe projectif seulement au moyen d'une transformation projective, donc on obtient que la transformation ponctuelle réelle par laquelle le groupe  $\mathcal{G}$  est semblable à l'un de nos trois groupes, est projective. Enfin, si nous tenons encore compte du fait que l'un des groupes du Théorème 40 possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en chaque point réel de l'espace sans exception, tandis que les deux autres groupes ne possèdent cette propriété que dans une portion de l'espace, nous pouvons énoncer notre résultat de la manière suivante :

**Théorème 41.** *Si un groupe projectif réel continu de l'espace ordinaire trois fois étendu possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en tous les points réels de cet espace sans exception, alors ce groupe est transitif à six paramètres et il est constitué de toutes les transformations projectives réelles par l'action desquelles reste invariante une surface imaginaire non-dégénérée du second degré qui est représentée par une équation réelle.*

<sup>2</sup> Six générateurs sont :  $p_1, p_2, p_3$  et  $x_2p_1 - x_1p_2, x_3p_1 - x_1p_3, x_3p_2 - x_2p_3$ .

<sup>3</sup> Six générateurs dans l'un et l'autre cas sont :  $p_1, p_2, p_3$  et  $\pm p_1 + x_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3), \pm p_2 + x_2(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3), \pm p_3 + x_3(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)$ .

**Proposition 2.** *Si un groupe projectif réel continu de l'espace ordinaire trois fois étendu ne possède pas la libre mobilité dans l'infinité-simal en tous les points réels de cet espace, mais la possède seulement en les points réels d'une certaine région, alors ce groupe est transitif à six paramètres, et pour préciser, il est semblable, via une transformation projective réelle, soit au groupe projectif réel continu d'une surface réelle du second degré non réglée, soit au groupe des mouvements euclidiens.*

### § 99.

Avant que nous passions à la généralisation des énoncés du précédent paragraphe à l'espace ayant nombre quelconque de dimensions, nous devons en quelques mots clarifier certaines manières de s'exprimer, dont nous ferons usage (cf. aussi la Remarque p. 338).

Par chaque point d'un espace  $n$  fois étendu  $x_1 \dots x_n$  passent  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires :  $dx_1 : \dots : dx_n$  qui forment une variété projective  $(n - 1)$ -fois étendue. Maintenant, dans l'espace ordinaire trois fois étendu, nous avons qualifié par le nom : « Élément de surface » chaque touffe unie [ebene Büschel] de  $\infty^1$  tels éléments linéaires, et dans  $R_n$ , nous voulons plutôt dire pour cela : *Élément d'une variété à deux dimensions*, ou plus brièvement :  $M_2$ -élément. Pareillement, chaque botte unie [ebene Bündel] de  $\infty^2$  éléments linéaires devra être désignée comme *Élément d'une variété à trois dimensions*, ou plus brièvement comme  $M_3$ -élément, et ainsi de suite. Enfin, nous voulons nous réserver le droit d'employer aussi l'appellation :  $M_1$ -élément pour les éléments linéaires.

À présent nous pouvons définir ce que nous entendons par libre mobilité dans l'infinité-simal dans  $R_n$ .

**Définition.** *Un groupe réel continu de transformations ponctuelles de  $R_n$  possède la libre mobilité dans l'infinité-simal en un point réel  $P$  lorsque les conditions suivantes sont remplies : Si l'on fixe le point  $P$ , puis un  $M_1$ -élément réel quelconque passant par lui, puis un  $M_2$ -élément réel quelconque passant par les deux, puis un  $M_3$ -élément réel passant par les trois, etc., et tout de suite enfin un  $M_q$ -élément réel quelconque, qui passe par tous les éléments antérieurs, alors un mouvement continu doit être possible aussi longtemps et seulement aussi longtemps que  $q < n - 1$ .*

Nous sommes tout près de présumer que les énoncés que nous avons trouvés dans le § 98 pour l'espace à trois dimensions se laissent

transférer à chaque espace à  $n > 3$  dimensions. En d'autres termes, nous sommes sur le point de présumer que les énoncés suivants sont valides :

**Théorème 42.** *Si un groupe réel continu de  $R_n$  ( $n \geq 3$ ) possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point réel de position générale, alors il est transitif à  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres et il est semblable, via une transformation ponctuelle réelle de  $R_n$ , soit au groupe des mouvements euclidiens, soit à l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens, donc dans le deuxième cas ou bien au groupe projectif réel continu de la variété :*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

ou bien au groupe projectif réel continu de la variété :

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0.$$

**Théorème 43.** *Si un groupe projectif réel continu de  $R_n$  ( $n \geq 3$ ) possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en tous les points réels de cet espace sans exception, alors ce groupe est transitif à  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres et il est constitué de toutes les transformations projectives réelles par l'action desquelles reste invariante une surface imaginaire non-dégénérée du second degré qui est représentée par une équation réelle.*

**Proposition 3.** *Si un groupe projectif réel continu de  $R_n$  ( $n \geq 3$ ) ne possède pas la libre mobilité dans l'infinitésimal en tous les points réels de cet espace, mais la possède seulement en les points d'une certaine région, alors ce groupe est transitif à  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres, et pour préciser, il est semblable, via une transformation projective réelle, soit au groupe d'une variété réelle du second degré non réglée, soit au groupe des mouvements euclidiens de cet espace.*

Nous allons maintenant montrer que les choses se comportent effectivement ainsi. À cette fin, nous avons évidemment seulement besoin de montrer qu'en admettant la validité de nos énoncés dans un espace à  $n \geq 3$  dimensions, leur justesse en découle toujours dans l'espace à  $n+1$  dimensions ; car puisque nos énoncés sont déjà reconnus vrais pour  $n = 3$ , leur justesse sera alors démontrée pour tout  $n \geq 3$ .

Nous posons donc à l'avance que les Théorème 42 et 43 ainsi que la Proposition 3 sont déjà démontrés pour l'espace à  $n \geq 3$  dimensions. Sous ces hypothèses nous cherchons d'abord tous les groupes

réels continus de  $R_{n+1}$  qui possèdent la libre mobilité dans l'infinité-simal en un point réel quelconque de position générale.

Soit  $G$  un groupe réel continu de  $R_{n+1}$  qui possède la libre mobilité dans l'infinité-simal en un point réel  $P$  de position générale. Si ensuite on fixe le point  $P$ , puis un  $M_1$ -élément réel quelconque passant par lui, puis un  $M_2$ -élément réel quelconque passant par les deux, *etc.*, et finalement un  $M_{n-1}$ -élément réel quelconque passant par tous les éléments précédents, alors chaque  $M_n$ -élément réel qui passe par le  $M_{n-1}$ -élément fixé peut encore tourner continûment autour de cet élément; car s'il ne le pouvait pas, aucun mouvement continu ne serait encore possible après fixation des  $n - 1$  élément sus-nommés.

Il découle de là que  $G$  est transitif. Si en effet il était intransitif, alors  $R_{n+1}$  se décomposerait d'une manière, ou bien même d'une infinité de manières, en  $\infty^1$  variétés réelles invariantes  $n$  fois étendues, donc il passerait par le point  $P$ , qui est en position générale, au minimum un  $M_n$ -élément réel qui resterait invariant en même temps que  $P$ , en conséquence de quoi il ne pourrait pas se tourner continûment autour d'aucun  $M_{n-1}$ -élément réel contenu en lui.

Par ailleurs, souvenons-nous à ce sujet que les  $\infty^n$   $M_1$ -éléments réels passant par  $P$  forment une variété lisse  $n$  fois étendue, qui — le point  $P$  étant fixé — est transformée par l'action d'un groupe projectif réel  $\mathfrak{g}$ . Imaginons-nous les  $M_1$ -éléments de cette variété rapportés projectivement aux points réels d'un espace lisse  $n$  fois étendu  $R'_n$ ; alors chaque  $M_1$ -élément passant par  $P$  se transforme en un point de  $R'_n$ ; à chaque  $M_2$ -élément passant par  $P$  correspond clairement et de manière réversible un  $M'_1$ -élément réel de  $R'_n$ ; en général, à chaque  $M_q$ -élément réel passant par  $P$  correspond clairement et de manière réversible un  $M'_{q-1}$ -élément de  $R'_n$ ; et enfin, au groupe  $\mathfrak{g}$  correspond un groupe projectif réel  $\mathfrak{g}'$  de  $R'_n$  qui lui est isomorphe-holoédrique. Si maintenant nous fixons dans  $R'_n$  un point, puis un  $M'_1$ -élément réel quelconque passant par ce point, puis un  $M'_2$ -élément réel quelconque passant par les deux, *etc.*, et finalement un  $M'_{n-2}$ -élément réel quelconque qui passe par tous les éléments précédents, alors chaque  $M'_{n-1}$ -élément réel qui passe par le point et par tous ces éléments doit pouvoir se tourner encore autour du  $M'_{n-2}$ -élément; sinon, l'exigence de libre mobilité dans l'infinité-simal au point  $P$  ne serait pas satisfaite par notre groupe  $G$ . Par conséquent, le groupe projectif réel  $\mathfrak{g}'$  de  $R'_n$  possède la libre mobilité dans l'infinité-simal sans exception en chaque point réel de  $R'_n$ .



Mais puisque d'après notre hypothèse, le Théorème 43 est valide dans l'espace  $n$  fois étendu  $R'_n$ , le groupe  $\mathfrak{g}'$  est alors à  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres et peut être rapporté, *via* une transformation projective réelle de  $R'_n$ , à une forme telle qu'il laisse invariante la variété imaginaire du second degré :

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2 + 1 = 0.$$

Par conséquent, le groupe  $\mathfrak{g}$  est aussi à  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres et il peut être rapporté, *via* une transformation linéaire homogène réelle des différentielles :  $dx_1 \dots dx_{n+1}$ , à une forme telle qu'il laisse invariante la variété imaginaire des  $M_1$ -éléments qui est représentée par l'équation :

$$(4) \quad dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + dx_{n+1}^2 = 0.$$

Si nous revenons maintenant au groupe  $G$ , nous reconnaissons qu'après fixation de  $P$ , les  $\infty^n$   $M_1$ -éléments réels sont transformés de  $\frac{1}{2}n(n+1)$  manières différentes par ce groupe, et pour préciser, de telle sorte qu'une certaine variété imaginaire du second degré constituée de  $M_1$ -éléments reste invariante. Si en particulier nous nous imaginons que le point  $P$  est transféré sur l'origine des coordonnées par une transformation ponctuelle réelle, nous pouvons toujours parvenir, grâce à une transformation linéaire homogène réelle en les variables  $x_1 \dots x_{n+1}$ , à ce que cette variété imaginaire soit représentée par l'équation (4).

Enfin, on doit encore remarquer que  $G$  est à  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  paramètres. Si nous fixons en effet le point  $P$ , alors les paramètres de  $G$  sont soumis à  $n+1$  conditions, puis, si nous fixons tous les  $\infty^n$   $M_1$ -éléments réels passant par  $P$ , les paramètres de  $G$  sont soumis à  $\frac{1}{2}n(n+1)$  conditions supplémentaires, car ces  $\infty^n$   $M_1$ -éléments se transforment, après fixation de  $P$ , précisément de  $\frac{1}{2}n(n+1)$  manières différentes. Et maintenant, comme aussitôt que sont fixés  $P$  ainsi que tous les  $M_1$ -éléments réels passant par lui, tous les  $M_2$ -,  $M_3$ -, ...  $M_n$ -éléments réels passant par  $P$  demeurent en même temps au repos, en conséquence de quoi plus aucun mouvement continu n'est encore possible, alors le nombre de paramètres de  $G$  doit être simplement égal à :

$$n + 1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}.$$

À présent, il est facile de déterminer  $G$ .

Si en effet nous nous imaginons les variables  $x_1 \dots x_{n+1}$  choisies comme ci-dessus, donc en particulier de telle sorte que  $P$  soit l'origine des coordonnées, alors, dans le voisinage de l'origine des coordonnées,

le groupe  $G$  contient visiblement  $\frac{1}{2}n(n+1)$  transformations infinitésimales indépendantes de la forme :

$$p_1 + \cdots, \cdots, p_{n+1} + \cdots, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \alpha_{\mu\nu} \sum_1^{n+1} x_\tau p_\tau + \cdots,$$

$$(\mu, \nu = 1 \cdots n+1; \quad \mu < \nu),$$

où les  $\alpha_{\mu\nu}$  sont des constantes réelles. Comme  $G$  a exactement  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  paramètres, on obtient de plus immédiatement en calculant les crochets que tous les  $\alpha_{\mu\nu}$  s'annulent. Par conséquent, le groupe  $G$  appartient aux groupes réels que nous avons déterminés aux pages 385 sq., et pour préciser, on obtient que  $G$  peut être transformé *via* une transformation ponctuelle réelle de  $R_{n+1}$ , soit en le groupe des mouvements euclidiens de cet espace, soit en le groupe projectif réel continu de l'une des deux variétés du second degré :

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \pm 1 = 0.$$

*Ainsi, on a démontré que, aussitôt que le Théorème 43 est valable dans un espace de dimension  $n \geq 3$ , le Théorème 42 est toujours vrai dans un espace à  $n+1$  dimensions.*

Mais si le Théorème 42 vaut dans un espace à  $n+1$  dimensions, alors le Théorème 43 et la Proposition 3 valent en même temps dans cet espace.

En effet, chaque groupe projectif réel continu  $\mathfrak{G}$  de  $R_{n+1}$ , qui possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point réel de position générale est semblable, sous les hypothèses qu'on a justement posées, *via* une transformation ponctuelle réelle, soit au groupe des mouvements euclidiens de  $R_{n+1}$ , soit à l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens de cet espace. Mais d'après le Théorème 19, p. 292, cette transformation ponctuelle réelle est nécessairement projective, et par conséquent, nous parvenons tout simplement, avec les hypothèses que nous avons posées, au Théorème 43 et à la Proposition 3.

*Avec cela, on a démontré que, aussitôt que les Théorèmes 42 et 43 et que la Proposition 3 valent dans un espace à  $n \geq 3$  dimensions, il sont aussi vrais dans l'espace à  $n+1$  dimensions. Puisque nous les avons déjà démontrés dans l'espace ordinaire trois fois étendu, ils sont donc valides en toute généralité.*

*Si donc  $n \geq 3$ , alors le groupe des mouvements euclidiens et les deux groupes de mouvements non-euclidiens de  $R_n$  sont complètement*

*caractérisés par l'exigence qu'il doivent avoir la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point de position générale.*

Mentionnons encore que les développements qui précèdent ne valent pas seulement pour les groupes réels dont les transformations finies sont représentées par des équations analytiques, mais aussi pour les groupes dont les équations finies sont non-analytiques, pourvu seulement que ces équations autorisent un certain nombre de différentiations par rapport aux variables et par rapport aux paramètres (*voir* p. 365 et p. 366).

### § 100.

#### Sur le discours d'habilitation de Riemann.

Les recherches sur la libre mobilité dans l'infinitésimal que nous venons de conduire sont en relation avec certaines réflexions que Riemann a indiquées sans son discours d'habilitation. Nous voulons donc généralement entrer plus avant dans le contenu de ce discours, d'autant plus qu'il a plusieurs points de contact avec toutes les recherches récentes sur les fondements de la géométrie.

Riemann n'est jamais facile à lire, mais sa célèbre allocution « *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* » présente des difficultés de compréhension d'un type tout à fait spécial. Riemann a dû présenter sa soutenance devant une assemblée qui ne consistait qu'en partie de mathématiciens, et pour cette raison, il s'est efforcé d'être le plus général possible, afin d'être intelligible ; mais de manière sous-jacente, la netteté et la détermination de l'expression a subi des dommages en de très nombreux endroits, et la conséquence en est que maintenant, le mathématicien est justement assez souvent dans le doute quant à ce que Riemann a effectivement voulu dire.

Cette insuffisance se fait particulièrement sensible dans la partie de l'exposé où Riemann parle de la mobilité des figures d'un espace  $n$  fois étendu ; Riemann s'aide d'expressions qui certes peuvent sembler compréhensibles à des non-mathématiciens, mais dont le sens véridique ne peut qu'être deviné par le mathématicien.

Malheureusement, à ce jour, personne n'a encore jusqu'à présent examiné le contenu du discours de Riemann sous toutes ses facettes aussi précisément que nous l'avons effectué dans le Chapitre 21, dont le contenu est celui de l'étude helmholtzienne « *Sur les faits qui se trouvent au fondement de la géométrie* ». Certes, on a rétabli la théorie riemanienne de la mesure de courbure d'un  $R_n$  d'après les indications de Riemann, et on s'est convaincu que la longueur d'un élément

courbe peu véritablement, aussitôt que la mesure de courbure est partout constante, être rapportée à la forme indiquée par Riemann. Mais justement, les considérations de Riemann sur la mobilité des figures semblent avoir peu ou pas du tout attiré l'attention, bien que ces considérations soient précisément d'une importance toute particulière pour la conception de Riemann au sujet de la question sur les fondements de la géométrie. D'un autre côté, il y a aussi encore par ailleurs une série de passages dans le discours de Riemann dont un éclaircissement urgent est souhaitable [*dringend zu wünschen ist*].

Il serait très méritoire que quelqu'un se soumît à l'effort de suivre pas à pas l'enchaînement des idées de Riemann et répondît, autant que possible, aux diverses questions qu'on peut alors s'imposer [*die sich da aufdrängen*]. Nous n'avons toutefois pas l'intention de réaliser cela, et nous nous contenterons de quelques indications, qui nous l'espérons, pourront contribuer à stimuler un tel travail à fond des pensées riemanniennes.

Comme nous l'avons déjà mentionné auparavant, Riemann s' imagine en premier lieu que les points de l'espace  $n$  fois étendu sont déterminés par  $n$  coordonnées  $x_1 \dots x_n$ . Nous avons dit à ce moment-là (voir p. 161), que Riemann a cherché à démontrer cela. Mais peut-être avons-nous fait ainsi du tort à Riemann.

On peut aussi interpréter cela en disant que Riemann considérait que la déterminabilité des points par des coordonnées est une chose *qui va de soi*. Monsieur de Helmholtz semble admettre que Riemann a établi l'hypothèse en question en tant qu'axiome\*.

Afin de pouvoir effectuer des déterminations de mesure à l'intérieur d'un espace  $n$  fois étendu, Riemann établit comme l'hypothèse la plus simple que chaque ligne, donc chaque variété une fois étendue, est mesurable au moyen de chaque autre\*\*. Pour une réalisation effective du mesurage [*Messung*], il est ensuite nécessaire de posséder une expression pour la longueur d'un élément courbe, donc une expression pour la longueur d'un morceau infiniment petit de ligne entre deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$ . Il pose à l'avance que cette longueur d'un élément courbe est une fonction homogène du premier degré en  $dx_1 \dots dx_n$ , qui reste inchangée lorsque tous les  $dx_\nu$  changent de signe, et qui en outre dépend encore de  $x_1 \dots x_n$ .

\* voir Gött. Nachr. 1868, p. 198.

\*\* voir RIEMANN, ges. Werke, 1. Ausg., p. 258 sq.

Ce qui importe maintenant pour cela, c'est de déterminer plus précisément la forme de la longueur d'un élément courbe. À cette fin, Riemann admet sans aucun mot de justification que deux points quelconques de  $R_n$  qui ne sont pas infiniment voisins ont aussi une distance tout à fait déterminée l'un par rapport à l'autre, à savoir il pose à l'avance et sans plus de façons l'existence d'une fonction :

$$\Omega(x_1 \dots x_n; x_1^0 \dots x_n^0),$$

qui a la même valeur pour tous les points  $x_1 \dots x_n$  qui « *sont aussi lointainement distants* (gleich weit abstehen) » du point  $x_1^0 \dots x_n^0$ . On ne voit pas si Riemann a voulu faire une nouvelle hypothèse avec cela, ou si il a voulu signifier que l'existence d'une telle fonction  $\Omega$  découle de l'existence d'une longueur d'élément courbe ayant la constitution indiquée. En tout cas, cette dernière possibilité n'est pas immédiatement claire, car il est certain que l'existence d'une telle fonction  $\Omega$  découle de l'existence d'une longueur d'élément courbe seulement lorsqu'entre deux points, une ligne la plus courte possible est en même temps déterminée au moyen d'une telle longueur d'élément courbe ; il devrait donc être démontré d'abord que l'existence de telles lignes les plus courtes possibles, découle des hypothèses qui ont été faites auparavant sur la longueur d'un élément courbe.

On peut se convaincre directement que l'existence d'une longueur d'élément courbe :

$$\omega(x_1 \dots x_n; dx_1 \dots dx_n),$$

qui est une fonction homogène *quelconque* du premier degré par rapport à  $dx_1 \dots dx_n$ , ne permet pas toujours d'en tirer l'existence d'une fonction distance :

$$\Omega(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n)$$

entre deux points finiment éloignés l'un de l'autre.

Soit en effet  $\Gamma$  le plus grand groupe continu de transformations ponctuelles réelles de  $R_n$  par lesquelles la longueur  $\omega(x, dx)$  d'un élément courbe reste invariante. Alors nous pouvons manifestement exprimer aussi l'existence de cette longueur d'un élément courbe en disant : les deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  ont l'invariant :  $\omega(x, dx)$  relativement à  $\Gamma$ . De même, l'existence d'une fonction distance  $\Omega(x, y)$  reviendrait à ce que deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  qui sont finiment éloignés l'un de l'autre ont l'invariant  $\Omega(x, y)$  relativement au groupe  $\Gamma$ .

Mais maintenant, deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  peuvent très bien avoir un invariant de la forme  $\omega(x, dx)$  relativement à un groupe, sans

que les deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  aient un invariant. Cela est encore montré par le groupe (22) de  $R_3$  mentionné à la page 242 :

$$q, \quad xq + r, \quad x^2q + 2xr, \quad x^3q + 3x^2r, \quad p, \quad xp - zr.$$

En effet, par son action les deux points infiniment voisins  $x, y, z$  et  $x + dx, y + dy, z + dz$  ont l'invariant :  $dy - z dx$ , alors que deux points finiment éloignés l'un de l'autre n'ont aucun invariant.

On peut bien sûr encore penser que les choses se passent tout autrement si, avec Riemann, on ajoute l'hypothèse que la longueur  $\omega(x, dx)$  d'un élément courbe ne modifie pas sa valeur, lorsque tous les  $dx_\nu$  changent de signe. Dans ce cas, on ne peut rien déduire de l'exemple donné à l'instant, car dans ces circonstances, l'invariant :  $dy - z dx$  ne satisfait pas l'exigence de Riemann. Nous voulons cependant ne pas donner suite aux questions suggérées par cela.

Poursuivons notre rapport sur l'enchaînement des idées de Riemann.

Riemann pose donc à l'avance qu'il y a une fonction :

$$\Omega(x_1 \dots x_n; x_1^0 \dots x_n^0)$$

qui a la même valeur pour tous les points qui sont aussi lointainement distants de  $x_1^0 \dots x_n^0$ . Comme cela semble être le cas, le concept général de fonction distance dans une variété  $n$  fois étendue apparaît ici pour la première fois.

Au sujet de la fonction  $\Omega$ , Riemann suppose qu'en tant que fonction de  $x_1 \dots x_n$ , dans un voisinage du système de valeurs :  $x_1^0 \dots x_n^0$ , elle croît de tous les côtés, et par conséquent, elle a un minimum pour :  $x_\nu = x_\nu^0$ ; il admet de plus que ses quotients différentiels du premier et du deuxième ordre sont tous finis pour  $x_\nu = x_\nu^0$ . Sous ces hypothèses, la première différentielle de  $\Omega$  doit s'annuler pour  $x_\nu = x_\nu^0$  et la seconde :

$$d^2\Omega = \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} dx_\mu dx_\nu$$

ne doit devenir négative pour aucun système de valeurs :  $dx_1 \dots dx_n$ , lorsqu'on substitue :  $x_\nu = x_\nu^0$ .

Riemann se restreint à la considération du cas où la différentielle  $d^2\Omega$  se transforme, pour  $x_\nu = x_\nu^0$ , en une forme quadratique constamment positive par rapport à  $dx_1 \dots dx_n$ . Le carré de la longueur  $ds$  d'un élément courbe appartenant au point  $x_1^0 \dots x_n^0$  ne peut alors se distinguer

de l'expression :

$$\sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right]_{x=x^0} dx_\mu dx_\nu$$

que par un facteur constant dépendant de  $x_1^0 \dots x_n^0$ , et par conséquent la longueur d'un élément courbe en un point quelconque  $x_1 \dots x_n$  est déterminée par une équation de la forme :

$$(5) \quad ds^2 = \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \alpha_{\mu\nu}(x_1 \dots x_n) dx_\mu dx_\nu,$$

où les  $\alpha_{\mu\nu}$  sont des fonctions réelles dont le déterminant ne s'annule pas identiquement, et où le membre de droite est une fonction constamment positive de  $dx_1 \dots dx_n$  pour des valeurs générales de  $x_1 \dots x_n$ .

Nous avons restitué la dérivation de l'expression de la longueur d'un élément courbe d'une manière détaillée, parce qu'elle est d'un intérêt particulier, notamment *via* l'introduction d'une fonction distance.

L'expression trouvée pour la longueur d'un élément courbe permet d'utiliser le calcul des variations, et on obtient qu'entre deux points qui se trouvent à l'intérieur d'une certaine région, une et une seule ligne la plus courte est possible et qu'elle se trouve entièrement à cette région. De plus, il est clair que par chaque point  $x_1 \dots x_n$ , il passe une unique ligne la plus courte contenant un élément linéaire :  $dx_1 : \dots : dx_n$  donné passant par ce point.

Riemann considère maintenant un  $M_2$ -élément quelconque passant par un point quelconque  $x_1 \dots x_n$ , et il s'imagine les lignes les plus courtes qui passent par chacun des  $\infty^1$  éléments linéaires de ce  $M_2$ -élément. La variété deux fois étendue ainsi engendrée est uniquement déterminée par le  $M_2$ -élément choisi, et sa mesure gaussienne de courbure au point  $x_1 \dots x_n$  a une valeur entièrement déterminée. La valeur de cette mesure gaussienne de courbure, qui dépend seulement de la forme indiquée (5) de la longueur d'un élément courbe, Riemann l'appelle la « *mesure de courbure* [*Mass der Krümmung*] » que l'espace  $n$  fois étendu, muni de la longueur (5) d'un élément courbe, possède au point  $x_1 \dots x_n$  dans la direction du  $M_2$ -élément choisi. Il affirme de surcroît que réciproquement, la longueur (5) d'un élément courbe d'un espace  $n$  fois étendu est en général complètement déterminée, aussitôt que la mesure de courbure est donnée en chaque point dans les directions de  $\frac{1}{2} n(n-1)$   $M_2$ -éléments qui sont mutuellement en position générale.

Parmi les variétés  $n$  fois étendues qui ont une longueur d'élément courbe de la forme (5) mentionnée ci-dessus, Riemann considère en particulier toutes celles pour lesquelles la mesure de courbure est constante en tous lieux, donc pour lesquelles cette mesure de courbure a la même valeur en tous les points et en tous les  $M_2$ -éléments passant par ces points. Il dit ce qui suit au sujet de ces variétés :

« Le caractère commun de ces variétés dont la mesure de courbure est constante, peut aussi être exprimé en disant que les figures peuvent se mouvoir\* sans élargissement [*Dehnung*] en elles. Car il est évident que les figures en elles ne pourraient pas coulisser [*verschiebar sein*] et pivoter [*drehbar sein*] librement, si la mesure de courbure n'était pas la même en chaque point et dans toutes les directions. Mais d'autre part, les rapports métriques de la variété sont complètement déterminés par la mesure de courbure ; donc les rapports métriques autour d'un point et dans toutes les directions sont exactement les mêmes qu'autour d'un autre point, et par conséquent, à partir de ce premier point, les mêmes constructions peuvent être transférées, d'où il s'ensuit que, dans les variétés dont la mesure de courbure est constante, on peut donner aux figures chaque position quelconque. »

En ces termes, il est exprimé que l'exigence d'après laquelle la mesure de courbure doit être partout constante, a la même signification que certaines exigences concernant la mobilité des figures. Si nous plaçons cette dernière exigence au tout début, nous pouvons restituer de la manière suivante l'enchaînement des idées de Riemann d'une manière quelque peu plus précise, quoique non absolument précise :

*Riemann cherche, parmi les variétés dont la longueur d'un élément courbe a la forme (5), toutes celles dans lesquelles les figures peuvent occuper chaque position quelconque, c'est-à-dire, dans lesquelles les figures peuvent coulisser et tourner, sans subir d'élargissement. Il parvient à ce résultat que les variétés dont la mesure de courbure est constante en tous lieux sont les seules dans lesquelles les figures sont mobiles de cette manière.*

Mais maintenant, que doit-on entendre là-dessous, quand on dit que les figures peuvent occuper chaque position quelconque, ou encore qu'elles doivent pouvoir coulisser et tourner librement ?

Tout d'abord, nous voulons établir ce que cela veut dire que les figures doivent être mobiles sans élargissement et en général.

---

\* Ici à vrai dire, Riemann aurait même dû ajouter le mot « librement ».



Quand Riemann parle d'un mouvement des figures, il s'imagine indubitablement que ce mouvement est continu, ce que montrent notamment les mots « coulisser » et « tourner » dont il fait usage. Mais maintenant, chaque mouvement continu amène avec lui une modification continue des coordonnées du point qui se meut, et fournit ainsi une famille continue de  $\infty^1$  transformations réelles :

$$(6) \quad x'_\nu = f_\nu(x_1 \dots x_n; t) \quad (\nu = 1 \dots n)$$

de la variété  $x_1 \dots x_n$ , et pour préciser, une famille dans laquelle se trouve la transformation identique (cf. p. 223). Si les figures ne doivent subir aucun élargissement au cours de ce mouvement, alors la longueur de chaque ligne doit rester inchangée, autrement dit : les  $\infty^1$  transformations (6) doivent laisser invariante la longueur (5) d'un élément linéaire. Inversement, il est évident que chaque famille (6) de  $\infty^1$  transformations qui laisse invariante la longueur (5) d'un élément linéaire et qui contient la transformation identique, représente un mouvement continu relativement auquel les figures ne subissent aucun élargissement. Par conséquent, l'exigence que le mouvement des figures soit en général possible sans élargissement, revient à ce qu'il doive exister au moins une famille continue de  $\infty^1$  transformations contenant la transformation identique qui laisse invariante la longueur (5) d'un élément linéaire.

Maintenant, l'ensemble de toutes les transformations réelles, relativement auxquelles la longueur (5) d'un élément linéaire reste invariante, constitue certainement un groupe  $\mathfrak{G}$ , et ce groupe  $\mathfrak{G}$  contient toujours un certain sous-groupe continu  $G$ , qui n'est contenu dans aucun sous-groupe continu plus grand de  $\mathfrak{G}$ . Si ensuite (6) est une famille de  $\infty^1$  transformations réelles continues qui contient la transformation identique et qui appartient au groupe  $G$ , alors cette famille détermine visiblement un mouvement continu au cours duquel les figures ne subissent aucun élargissement. Inversement, si (6) est un mouvement continu au cours duquel les figures ne subissent aucun élargissement, alors la famille (6) appartient évidemment au groupe  $G$ . Il découle de là que  $G$  est complètement déterminé par l'ensemble de tous les mouvements au cours desquels les figures ne subissent aucun élargissement ; en même temps, il est clair que les transformations de  $G$  déterminent toutes les positions que l'on peut donner aux figures par des mouvements continus sans élargissement.

Et maintenant, qu'est-ce que cela veut dire, lorsque Riemann demande que les figures puissent *coulisser et tourner librement sans élargissement* ?

Manifestement, le mot « librement » est si indéterminé, qu'on pourrait en tirer n'importe quelle conclusion. On en est donc réduit à indiquer des présomptions.

Nous croyons qu'avec la *possibilité libre de coulisser* [*belibige Verschiebbarkeit*] pour les figures, Riemann s'est imaginé qu'au cours du mouvement dont une figure est susceptible sans subir d'élargissement, un point de la figure sélectionné arbitrairement peut être envoyé sur chaque autre point de l'espace. Avec cette interprétation, l'exigence de possibilité libre de coulisser revient évidemment à ce que le groupe défini plus haut doive être transitif.

D'un autre côté, par « rotations » [*Drehungen*], Riemann peut en tout cas seulement entendre les mouvements qui sont encore possibles après fixation d'un point quelconque. L'exigence de *possibilité libre de tourner* [*beliebigen Drehbarkeit*] pour les figures, nous la comprenons donc maintenant en disant que le mouvement le plus général qui est encore possible sans élargissement après fixation de l'origine des coordonnées, doit dépendre d'autant de paramètres qu'*autorise l'invariance de l'expression* :

$$\sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \alpha_{\mu\nu} (0\dots 0) dx_{\mu} dx_{\nu},$$

de telle sorte que le groupe transitif  $G$  doive contenir le plus grand nombre possible de paramètres.

Afin de nous rendre compte de la portée de cette exigence, nous devons rechercher quels sont les mouvements qui sont encore possibles sans élargissement après fixation d'un point réel en position générale.

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que l'origine des coordonnées est un point de position générale, et nous nous imaginons de plus que la longueur de l'élément courbe est rapportée, *via* une transformation linéaire homogène de  $x$ , à une forme telle que pour :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

elle prend la forme :

$$(7) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2.$$

Chaque mouvement qui est encore éventuellement possible sans élargissement après fixation de l'origine des coordonnées est alors représenté par une transformation de la valeur :

$$(8) \quad x'_k = \sum_1^n \alpha_{k\nu} x_{\nu} + \dots \quad (k=1\dots n),$$

par l'action de laquelle la longueur (5) d'un élément courbe reste invariante ; à ce sujet, le déterminant des  $\alpha_{k\nu}$  ne doit pas s'annuler et les termes supprimés sont du deuxième ordre en  $x$ , et d'ordre supérieur.

Sous les hypothèses posées il est clair que la transformation réduite issue de (8) :

$$(9) \quad x'_k = \sum_1^n \alpha_{k\nu} x_\nu \quad (k = 1 \dots n)$$

doit laisser invariante l'expression différentielle (7). En outre, il est facile de voir que la transformation (8) est complètement déterminée, aussitôt qu'on connaît la transformation réduite associée (9). La transformation réduite associée (9) indique en effet comment sont transformés les  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires passant par l'origine des coordonnées. Maintenant, une unique ligne la plus courte est dirigée par chaque élément linéaire  $dx_1 : \dots : dx_n$  passant par l'origine des coordonnées et chaque point  $x_1 \dots x_n$  de cette ligne la plus courte est complètement déterminé, lorsque, mis à part l'élément linéaire en question, on connaît aussi sa distance  $r$  à l'origine des coordonnées. Si donc l'on sait que par la transformation (8) qui laisse invariante la longueur (5) d'un élément courbe, l'élément linéaire  $dx_1 : \dots : dx_n$  est transformé en l'élément linéaire  $dx'_1 : \dots : dx'_n$ , alors en même temps, la nouvelle position  $x'_1 \dots x'_n$  que le point  $x_1 \dots x_n$  reçoit par la transformation (8), est elle aussi déterminée, car en effet,  $x'_1 \dots x'_n$  est évidemment le point qui se trouve à la distance  $r$  de l'origine des coordonnées sur la ligne la plus courte dirigée par l'élément linéaire  $dx'_1 : \dots : dx'_n$ .

Nous voyons à partir de là que chaque mouvement sans élargissement qui est encore possible après fixation de l'origine des coordonnées, est parfaitement déterminé par la façon dont il déplace les  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires passant par l'origine des coordonnées. Si donc nous demandons que le mouvement le plus général encore possible sans élargissement après fixation de l'origine des coordonnées dépende du plus grand nombre de paramètres, alors cela revient à demander qu'après fixation par le groupe  $G$  de l'origine des coordonnées, les éléments linéaires passant par ce point sont transformés par un groupe projectif ayant le plus grand nombre possible de paramètres.

Si nous rassemblons les résultats acquis, nous pouvons dire : *Lorsque Riemann demande qu'il existe une longueur d'élément courbe constamment positive de la forme (5) et que les figures de l'espace  $x_1 \dots x_n$  puissent coulisser et tourner librement sans élargissement, il demande avec cela exactement la même chose que lorsqu'on exige*

*qu'une longueur d'élément courbe (5) reste invariante par un groupe continu  $G$  qui premièrement, est transitif et deuxièmement, transforme de la manière la plus générale possible les  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires passant par chaque point réel fixé en position générale (cf. pp. 355 sq.).*

Si nous relions maintenant les développements des pages 353 sq. avec ceux des pages 385 sq., nous reconnaissons immédiatement que chaque groupe réel continu  $G$  ayant la constitution ici demandée peut être transformé, *via* une transformation ponctuelle réelle, soit en le groupe des mouvements euclidiens de  $R_n$ , soit en l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens. Les exigences que Riemann énonce au sujet de la mobilité des figures suffisent donc, en commun avec l'exigence qu'il existe une longueur d'élément courbe, pour caractériser ces trois groupes de mouvements.

Nous insérons à présent encore quelques remarques au sujet de la solution que Riemann a lui-même donnée à son problème.

Riemann dit : « Car il est évident que les figures ne pourraient pas coulisser et tourner librement, si la mesure de courbure n'était pas la même en chaque point et dans toutes les directions ». De la constance de la mesure de courbure, il déduit maintenant que les rapports métriques sont, dans toutes les directions autour d'un point, exactement les mêmes qu'autour d'un autre point, et de là il découle à nouveau que les figures peuvent coulisser et tourner librement sans élargissement de la manière qui a été décrite plus haut.

Maintenant, l'exigence que la mesure de courbure soit constante en tous les points et dans toutes les directions de  $M_2$ -éléments passant par ces points, est visiblement nécessaire, lorsque le groupe  $G$  doit être transitif et lorsqu'il doit être en outre constitué de telle sorte qu'après fixation d'un point réel en position générale, chaque  $M_2$ -élément réel passant par ce point peut encore être transformé en tout autre. Inversement, si le groupe est constitué de telle sorte qu'après fixation d'un point réel en position générale, chaque  $M_2$ -élément réel peut encore être transformé en tout autre, on en déduit aisément que le groupe est transitif et que la mesure de courbure a la même valeur en tous les points et dans toutes les directions de  $M_2$ -éléments passant par ces points. Mais il découle de là, d'après Riemann, que les figures peuvent coulisser et tourner librement sans élargissement et à nouveau, cela revient à ce qu'après fixation d'un point réel de position générale, les éléments linéaires passant par ce point sont transformés par  $G$  de la manière la plus générale possible.

Par conséquent, la proposition suivante découle des développements riemanniens :

*Si  $G$  est le plus grand groupe réel continu qui laisse invariante une expression différentielle constamment positive de la forme (5), et si ce groupe est constitué de telle sorte qu'après fixation d'un point réel en position générale, chaque  $M_2$ -élément réel passant par ce point peut être transformé en tout autre, alors il transforme les  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires passant par ce point de la manière la plus générale possible.*

Riemann pose à l'avance que le carré de la longueur d'un élément courbe est une expression différentielle du second ordre constamment positive et il ajoute l'exigence que les figures puissent coulisser et tourner librement sans subir d'élargissement. Cette dernière exigence a, si on l'interprète de la manière dont nous l'avons envisagée, la même signification que l'exigence que l'expression différentielle en question admette un groupe réel continu qui est transitif et qui transforme de la manière la plus générale possible les éléments linéaires réels passant par le point réel de position générale qui a été fixé.

Il est clair que le groupe réel  $G$ , sous ces hypothèses, possède la libre mobilité dans l'infinésimal en chaque point de position générale. D'un autre côté, dans les §§ 97–99, nous avons démontré que chaque groupe réel  $\mathfrak{G}$  de  $R_n$  ( $n > 2$ ), qui possède la libre mobilité dans l'infinésimal en un point réel de position générale peut être transformé, *via* une transformation ponctuelle réelle soit en le groupe des mouvements euclidiens, soit en l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens. Par conséquent, les deux exigences riemanniennes : Existence d'une longueur quadratique d'élément courbe constamment positive, et possibilité pour les figures de coulisser et de tourner librement sans élargissement, ces deux exigences suffisent pour la caractérisation des mouvements euclidiens et non-euclidiens, pourvu qu'on interprète la possibilité de coulisser et de tourner librement comme cela a été fait plus haut. Mais nous voyons en même temps que *l'exigence de libre mobilité dans l'infinésimal, en commun avec l'exigence que les mouvements doivent constituer un groupe, ces deux exigences peuvent apparemment être complètement substituées aux exigences poursuivies par Riemann.*

Nous allons encore montrer que l'on peut déduire l'existence d'une longueur quadratique d'élément courbe constamment positive directement à partir de l'exigence de libre mobilité dans l'infinésimal, sans s'appuyer sur les développements des §§ 97–99.

Tout d'abord, on peut montrer d'une manière essentiellement plus simple que précédemment que chaque groupe *projectif* réel continu, qui possède la libre mobilité dans l'infinésimal en tout les points réels de l'espace, coïncide avec le groupe projectif réel d'une surface imaginaire du second degré, dont l'équation est réelle.

Pour le plan, nous avons démontré cela dans le § 97. Afin de démontrer cette proposition en général, nous supposons que nous l'avons démontrée dans l'espace à  $n - 1 \geq 2$  dimensions et nous démontrons ensuite qu'elle est aussi valide dans l'espace à  $n$  dimensions.

Si donc la proposition est démontrée pour l'espace à  $n - 1$  dimension, il en découle immédiatement que chaque groupe projectif réel  $\gamma$  de  $R_n$  qui possède la libre mobilité dans l'infinésimal en un point de position générale, a  $\frac{1}{2}n(n + 1)$  paramètres et qu'il peut être ramené, *via* une transformation projective réelle, à la forme :

$$p_\mu + \sum_{j,k}^{1\dots n} \alpha_{\mu j k} x_j p_k + \sum_{\tau}^{1\dots n} \beta_{\mu \tau} x_\tau U$$

$$x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \sum_{\tau}^{1\dots n} \gamma_{\mu \nu \tau} x_\tau U$$

$$(\mu, \nu = 1 \dots n; \quad \gamma_{\mu \nu \tau} + \gamma_{\nu \mu \tau} = 0).$$

Mais il s'ensuit de là par des calculs, qui ne diffèrent pratiquement pas de ceux des pages 290 sq., que  $\gamma$  peut recevoir, par une transformation projective réelle, la forme :

$$p_\mu + c x_\mu U, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots n).$$

Si maintenant en particulier  $\gamma$  doit posséder la libre mobilité dans l'infinésimal en tous les points réels de l'espace, alors  $c$  doit être positif, et par suite dans ce cas  $\gamma$  consiste, après un choix approprié des variables, en toutes les transformations projectives réelles qui laissent invariante la variété :

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1 = 0.$$

Ainsi, nous avons démontré directement que notre proposition vaut pour  $R_n$  si elle vaut pour  $R_{n-1}$  et puisqu'elle est vraie dans le plan, elle est donc généralement démontrée.

Considérons maintenant un groupe quelconque de  $R_n$  qui, dans le voisinage d'un point réel en position générale, possède la libre mobilité dans l'infinésimal. On obtient ensuite de la même manière qu'aux pages 267 sq. que  $G$  est transitif, qu'il a  $\frac{1}{2}n(n + 1)$  paramètres et qu'il peut être rapporté à la forme :

$$p_\nu + \dots, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \dots \quad (\mu, \nu = 1 \dots n),$$

*via* une transformation réelle.

Il découle de là qu'après fixation de l'origine des coordonnées, les différentielles  $dx_1 \dots dx_n$  sont transformées de telle sorte que l'expression différentielle :

$$(10) \quad dx_1^2 + \dots + dx_n^2$$

reste invariante. Maintenant, comme l'origine des coordonnées est un point de position générale et comme notre groupe est transitif, nous obtenons donc généralement pour chaque point de position générale une expression différentielle de ce type qui lui est attachée [*zugeordnet*] et pour préciser, nous trouvons l'expression différentielle attachée au point  $x_1^0 \dots x_n^0$ , lorsque nous soumettons l'expression (10) à une transformation quelconque :

$$x'_\nu = f_\nu(x_1 \dots x_n) \quad (\nu=1 \dots n),$$

qui envoie l'origine des coordonnées sur le point  $x_1^0 \dots x_n^0$ , et quand nous effectuons après la substitution :  $x'_\nu = x_\nu^0$  dans les coefficients de l'expression ainsi obtenue.

Les expressions différentielles qui sont attachées de cette manière aux points de l'espace, sont transformées par les transformations de notre groupe exactement comme les points eux-mêmes, et de là, il découle à nouveau, que notre groupe laisse invariante une certaine expression différentielle de la forme :

$$\sum_{k \nu}^{1 \dots n} \alpha_{k \nu}(x_1 \dots x_n) dx_k dx_\nu,$$

qui revêt la forme (10) à l'origine des coordonnées, et qui par conséquent se transforme, pour tous les points réels  $x_1 \dots x_n$  de position générale, en une forme quadratique constamment positive par rapport à  $dx_1 \dots dx_n$ .

Ainsi, sans utiliser le Théorème 42, p. 271, on a démontré que chaque groupe réel qui possède la libre mobilité dans l'infinitésimal en un point de position générale, laisse invariante une expression différentielle du second degré constamment positive, et on a donc démontré qu'avec l'aide de l'axiome de libre mobilité dans l'infinitésimal, on peut déduire l'axiome de Riemann sur la longueur d'un élément courbe, sans même présenter tous les groupes qui possèdent la libre mobilité dans l'infinitésimal\*.

Pour terminer, nous voulons encore prononcer quelques mots au sujet d'un passage de la soutenance orale de Riemann, qui nous paraît inintelligible dans la version déjà présentée [*die uns in der vorliegenden Fassung unverständlich ercheint*].

Nous voulons dire le passage à la page 265 de ses *Œuvres complètes* (1<sup>ère</sup> édition), où Riemann applique ses recherches sur la détermination des rapports métriques d'une grandeur  $n$  fois étendue dans l'espace.

\* Lie a déjà signalé cela en 1890 dans le *Leiziger Berichten* (voir la Remarque p. 292).

Le « premièrement » dans la phrase « *Elles peuvent premièrement s'exprimer etc.* » présente avant tout des difficultés. Ce « premièrement » signale un « deuxièmement » à venir, qui vient aussi, car il vient dans la phrase : « *Si l'on suppose deuxièmement etc.* ». Mais ce « deuxièmement » ne correspond pas du tout au « premièrement ». En effet, tandis qu'après le « premièrement », des conditions sont indiquées qui sont nécessaires et suffisantes pour la détermination des rapports métriques de l'espace (euclidien), lorsque certaines hypothèses sont faites, Riemann ne donne pas après le « deuxièmement », comme on devrait s'y attendre véritablement, une autre version de ces conditions, mais il introduit une hypothèse tout à fait nouvelle. Les mots : « *Si l'on suppose deuxièmement etc.* » ne correspondent donc pas au « premièrement », mais au membre de phrase : « *lorsqu'on admet comme hypothèses ... dans ses parties infinitésimales* ». On voit donc que le « premièrement » n'a rien à voir avec le « deuxièmement », et qu'il est au fond tout à fait superflu. En fait, le passage tout entier devient passablement clair\* si on supprime le « premièrement » entre les mots « dans ses parties infinitésimales » et « Elles peuvent premièrement s'exprimer », si on supprime l'alinéa, et si enfin, on ajoute le mot « euclidien », comme cela a été indiqué plus haut.

D'après une communication que nous devons à la bonté de Monsieur H. Weber, l'éditeur des œuvres de Riemann, il n'y a aucun doute que Riemann a véritablement écrit le « premièrement » ; la possibilité d'une autre version est donc exclue. En conséquence de cela, il ne reste aucune autre possibilité que d'admettre qu'ici se présente une inadvertance stylistique de Riemann

---

\* À vrai dire, il resterait toujours à établir ce que les mots « *Enfin on pourrait troisièmement etc.* » veulent dire, et nous n'y sommes pas parvenus. Du reste, il se trouve par ailleurs aussi encore des passages dans la soutenance orale de Riemann qui nous paraissent pour le moins inintelligibles.



## Chapitre 23.

### **Deuxième solution du problème de Riemann-Helmholtz.**

Souvenons-nous des remarques effectuées tout au début de l'introduction du précédent chapitre (p. 260 sq.). Nous prenons maintenant ici en considération le point de vue annoncé là-bas, *i.e.* nous demandons à nouveau quelles propriétés sont communes au groupe des mouvements euclidiens ainsi qu'aux deux groupes de mouvements non-euclidiens et qui font que ces trois groupes sont remarquables parmi tous les groupes continus possédant des transformations inverses l'une de l'autre par paires. Tandis que dans le précédent chapitre, nous avons considéré des propriétés caractéristiques qui se réfèrent seulement à des points infiniment voisins, nous voulons maintenant utiliser seulement des propriétés qui concernent les rapports mutuels de points finiment éloignés les uns des autres.

Chez Riemann, la différence entre les axiomes qui se rapportent aux points infiniment voisins et ceux qui se rapportent aux points finiment éloignés les uns des autres n'est pas encore faite. Les axiomes utilisés par Riemann, qui à vrai dire ne sont pas formulés expressément par lui, ou en tout cas ne sont cependant formulés ni précisément, ni distinctement, se réfèrent en partie à une espèce de points, en partie à l'autre. L'exigence de Riemann sur l'existence d'une longueur d'élément courbe se réfère à des points infiniment proches. Mais maintenant, comme nous l'avons déjà mis en évidence aux pages 277 sq., l'existence d'une fonction distance entre deux points finiment éloignés l'un de l'autre ne découle pas encore de l'existence d'une longueur d'élément courbe, tant qu'on ne sait rien de plus précis sur la nature de la longueur d'un élément courbe. Tout de même, Riemann suppose aussi sans plus de justification l'existence d'une telle fonction distance, et c'est une hypothèse qui se réfère à des points finiment éloignés les uns des autres. Enfin, les exigences de Riemann — exprimées à vrai dire de manière très indéterminée — sur la mobilité des figures sans élargissement se réfèrent évidemment aussi à des points finiment éloignés les uns des autres, mais, à cause de la nature particulière de la longueur d'un élément courbe, que Riemann déduit de la fonction distance qu'il

a supposée, ces exigences se laissent aussi immédiatement appliquer à des points infiniment voisins (*cf.* pp. 280 sq.).

Les axiomes de Monsieur de Helmholtz se réfèrent, dans la version qu'il leur a donnée au début de son travail, à des points finiment éloignés les uns des autres ; cependant, il les applique non seulement à de tels points, mais encore aussi à des points infiniment voisins, un procédé dont nous avons suffisamment montré l'inadmissibilité dans le Chapitre 21. La différence de nature entre les deux genres d'axiomes, *i.e.* entre ceux relatifs aux points finiment éloignés et ceux relatifs aux points infiniment voisins, apparaît, dans notre exposition, pour la première fois distinctement à l'expression. À vrai dire, Riemann fait des allusions qui peuvent conduire à présumer qu'il a eu des pensées similaires, mais ses expressions \* sont fixées de manière si générale qu'on ne peut pas trancher quant à ce qu'il a voulu dire.

Ce que nous avons appelé notre *première* solution du problème de Riemann-Helmholtz se réfère seulement à des points infiniment voisins, ce que l'on peut exprimer de manière plus précise comme suit : cette solution résout le problème de déterminer tous les groupes qui sont définis par certaines propriétés dans l'infinitesimal. À vrai dire, il faut aboutir à ce que l'exigence, d'après laquelle les mouvements doivent former un groupe, se réfère à des points finiment éloignés les uns des autres, et une telle exigence ne se laisse en général pas éluder, puisqu'il s'agit nécessairement, lorsqu'on considère les mouvements, de changements de lieu finis.

Notre *deuxième* solution traite un problème qui se réfère seulement à des points finiment éloignés les uns des autres ; le concept de points infiniment voisins intervient ici pour autant que nous demandons que les points séparés restent aussi séparés, et donc que deux points finiment éloignés les uns des autres restent finiment éloignés au cours de tous les mouvements, et ne sont jamais transformés en des points infiniment voisins \*\*.

Si, pour le problème de Riemann-Helmholtz, on pose au fondement des axiomes qui se réfèrent à des points finiment éloignés les uns des autres, alors la solution est beaucoup plus difficile que lorsqu'on utilise des axiomes au sujet de points infiniment voisins. C'est sur cette dernière base que notre *première* solution (*voir* le Chapitre 22) a été

---

\* Voir ses *Œuvres Complètes*, 1<sup>ère</sup> Édition, p. 267.

\*\* La solution du problème de Riemann-Helmholtz que nous avons donnée dans le Chapitre 21 sur la base des axiomes de Helmholtz partage le même caractère.

achevée définitivement, y compris pour l'espace à  $n$  dimensions ; mais au contraire, *notre deuxième solution*, qui est exposée dans le présent chapitre, *est achevée définitivement, au moins en un certain sens, seulement pour l'espace, à vrai dire le plus important, de dimension trois*. Pour l'espace à  $n$  dimensions, nous montrons seulement qu'il est suffisant de poser certains axiomes qui se rapportent à *des points finiment éloignés les uns des autres*, et qui en tout cas requièrent moins que les axiomes helmholtziens ; mais nous ne prétendons toutefois pas que pour  $n > 3$  ces axiomes ne contiennent pas d'éléments superflus ; nous estimons même qu'il est vraisemblable qu'ils en contiennent.

Dans le § 101, nous démontrons en premier lieu une proposition générale sur les groupes relativement auxquels deux points possèdent un invariant. Dans le § 102, nous traitons ensuite l'espace à trois dimensions, et à cette occasion, la proposition démontrée dans le § 101 sera de quelque utilité. Dans le § 103 enfin, nous résolvons le cas d'un espace à quatre dimensions et nous indiquons encore pour terminer comment on peut parvenir au but dans les espaces à un nombre de dimensions supérieur à quatre.

### § 101.

Pendant le compte rendu critique du travail de Helmholtz, nous avons déjà mentionné que l'on doit être extrêmement précautionneux lorsqu'on veut déduire quelque chose au sujet du comportement de points infiniment voisins à partir du comportement de points finiment éloignés les uns des autres. Toutefois, nous ne disons pas par là qu'on ne peut rien déduire au sujet du comportement de ces points-là à partir du comportement de ces points-ci. En effet, le théorème suivant est vrai en tout cas.

**Théorème 44.** *Si, relativement à un groupe continu de l'espace  $n$  fois étendu qui est constitué de transformations infinitésimales, deux points finiment éloignés les uns des autres  $x_1 \dots x_n$  et  $y_1 \dots y_n$  ont un invariant, alors aussi, deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  possèdent au moins un invariant relativement au groupe, ou pour s'exprimer de manière plus précise : le groupe laisse invariante au minimum une expression de la forme :*

$$J(x_1 \dots x_n, dx_1 \dots dx_n).$$

Par souci de simplicité, nous démontrons tout d'abord ce théorème pour les groupes finis continus.

Soit :

$$X_k f = \sum_{\nu=1}^n \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k=1 \dots r)$$

un groupe quelconque à  $r$  paramètres ; on peut poser :

$$Y_k f = \sum_{\nu=1}^n \xi_{k\nu}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}.$$

Si ensuite les deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  doivent avoir un invariant  $\Omega(x, y)$ , alors il est nécessaire et suffisant que les  $r$  équations :

$$(1) \quad X_k f + Y_k f = 0 \quad (k=1 \dots r)$$

en les  $2n$  variables  $x_\nu$  et  $y_\nu$  aient une solution en commun, ou, ce qui revient au même, que tous les  $2n \times 2n$  déterminants de la matrice :

$$(2) \quad \left| \begin{array}{cc} \xi_{k1}(x) \dots \xi_{kn}(x) & \xi_{k1}(y) \dots \xi_{kn}(y) \\ & (k=1, 2 \dots r) \end{array} \right|$$

s'annulent identiquement.

Si maintenant cette condition est remplie et si nous posons :  $y_\nu = x_\nu + dx_\nu$ , on obtient immédiatement que les  $2n \times 2n$  déterminants de la matrice :

$$(2') \quad \left| \begin{array}{cc} \xi_{k1}(x) \dots \xi_{kn}(x) & d\xi_{k1}(x) \dots d\xi_{kn}(x) \\ & (k=1 \dots r) \end{array} \right|$$

s'annulent identiquement. Par conséquent, le groupe en les  $2n$  variables  $x_\nu, x'_\nu$  provenant de  $X_1 f \dots X_r f$  par prolongation (voir le Tome I, pp. 524 sq.) :

$$X_k f + \sum_{\nu=1}^n \left\{ \sum_{\tau=1}^n \frac{\partial \xi_{k\nu}(x)}{\partial x_\tau} x'_\tau \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} \quad (k=1 \dots r)$$

est sûrement intransitif, et il laisse invariante au minimum une fonction :  $\omega(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n)$ . Du reste, il est facile de voir que l'on peut toujours choisir cette fonction  $\omega$  de telle sorte qu'elle n'est pas indépendante de tous les  $x'$ . Si en effet les  $r$  équations (1) n'ont pas de solution commune indépendante de  $y_1 \dots y_n$ , alors les équations :

$$(3) \quad X_k f + \sum_{\nu=1}^n \left\{ \sum_{\tau=1}^n \frac{\partial \xi_{k\nu}(x)}{\partial x_\tau} x'_\tau \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} = 0 \quad (k=1 \dots r)$$

n'ont visiblement pas non plus de solution commune indépendante de  $x'_1 \dots x'_n$ . D'autre part, si les équations (1) ont une solution :  $\Omega(x_1 \dots x_n)$  qui est indépendante de tous les  $y$ , alors elles ont aussi la

solution :  $\Omega(y_1 \dots y_n)$  indépendante de tous les  $x$ , et alors il est visible que l'expression :

$$\sum_{\tau=1}^n \frac{\partial \Omega(x_1 \dots x_n)}{\partial x_\tau} x'_\tau$$

est une solution commune des équations (3) qui n'est pas indépendante de tous les  $x'$ .

Il découle de là que les deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  ont toujours un invariant relativement au groupe  $X_1 f \dots X_r f$ , aussitôt que les deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  en ont un, et la véracité de notre Théorème 44 est donc démontrée pour tous les groupes continus finis.

Jusqu'à présent, pour la démonstration du Théorème 44, nous nous sommes limités aux groupes continus finis, mais il n'est pas difficile de voir que notre démonstration s'applique en général à tous les groupes continus finis ou infinis qui sont constitués de transformations infinitésimales.

Si en effet  $Xf$  est la transformation infinitésimale générale d'un groupe et si  $Yf$  a la même signification que ci-dessus, alors les deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  ont un invariant relativement à ce groupe si et seulement si, dans la collection de toutes les équations :

$$Xf + Yf = 0$$

ne sont pas contenues plus que  $2n - 1$  équations qui sont indépendantes les unes des autres. Et si cette condition est remplie, alors dans la collection de toutes les équations :

$$Xf + \sum_{\nu=1}^n \left\{ \sum_{\tau=1}^n \frac{\partial \xi_\nu(x)}{\partial x_\tau} x'_\tau \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} = 0,$$

sont contenues au maximum  $2n - 1$  équations qui sont indépendantes les unes des autres, et par suite, les deux points  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  ont sûrement un invariant.

Avec cela, notre théorème est démontré en général.

On sait déjà que les deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  finiment éloignés l'un de l'autre ont, relativement à un groupe continu donné, l'invariant  $\Omega(x, y)$ , et ceci soulève donc la question de savoir si l'on ne peut pas déduire de  $\Omega$  un invariant pour deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$ ; car ces deux points ont un invariant, comme il suit du Théorème 44. Nous ne voulons pas nous engager en plus pour répondre à cette question, mais seulement mentionner que l'invariant cherché pour les deux points  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  peut toujours être indiqué simplement quand l'expression

$\Omega(x, x + dx)$  est développable en série entière ordinaire par rapport à  $dx_1 \dots dx_n$ ; on obtient en effet alors l'invariant désiré en recherchant la fonction homogène du plus bas degré par rapport à  $dx_1 \dots dx_n$  qui est contenue dans le développement de  $\Omega(x, x + dx)$  par rapport aux puissances de  $dx_1 \dots dx_n$ . Mais quand  $\Omega(x, x + dx)$  n'est pas développable en série entière ordinaire par rapport à  $dx_1 \dots dx_n$ , on ne peut pas déduire immédiatement l'invariant entre  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  à partir de l'expression de  $\Omega(x, x + dx)$ .

Il est souhaitable de posséder un critère simple par lequel on peut vérifier si deux points infiniment voisins ont, ou n'ont pas un invariant relativement à un groupe. Si en effet on s'est convaincu qu'ils n'ont pas d'invariant, alors d'après le Théorème 44, il est immédiatement clair que deux points finiment éloignés l'un de l'autre n'ont pas non plus d'invariant. Nous allons montrer pour cela comment on peut parvenir à un tel critère.

Considérons un groupe continu quelconque  $G$ , fini ou infini, qui est constitué de transformations infinitésimales. Parmi les transformations infinitésimales de  $G$ , qui laissent invariant un point  $x_1^0 \dots x_n^0$  de position générale, il y en a un certain nombre, disons exactement  $m \leq n^2$ , indépendantes les unes des autres :

$$(4) \quad \sum_{\mu \nu}^{1 \dots n} \alpha_{k \mu \nu} (x_\mu - x_\mu^0) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \dots \quad (k=1 \dots m),$$

qui sont du premier ordre en les  $x_\mu - x_\mu^0$  et à partir desquelles on ne peut déduire, par combinaison linéaire, aucune transformation du second ordre, ou d'un ordre supérieur, en les  $x_\mu - x_\mu^0$ . Les transformations infinitésimales (4) sont alors visiblement constituées de telle sorte que les termes du premier ordre, dans chaque transformation infinitésimale de  $G$  qui fixe le point  $x_1^0 \dots x_n^0$ , se laissent exprimer par combinaison linéaire à partir des termes du premier ordre des transformations (4).

Il découle de là que les transformations infinitésimales :

$$(5) \quad A_k f = \sum_{\mu \nu}^{1 \dots n} \alpha_{k \mu \nu} x'_\mu \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} \quad (k=1 \dots m)$$

en les variables  $x'_1 \dots x'_n$  engendrent de leur côté un groupe linéaire homogène à  $m$  paramètres, qui est entièrement déterminé par le groupe  $G$  et le point  $x_1^0 \dots x_n^0$ . Ce groupe linéaire homogène, dont l'existence nous est déjà connue dans le cas d'un groupe continu fini, d'après le

Tome I, p. 599 sq., a une signification très simple : il indique notamment de quelle manière les points :

$$x_\nu^0 + dx_\nu = x_\nu^0 + x'_\nu dt \quad (k=1 \dots m)$$

infiniment voisins de  $x_1^0 \dots x_n^0$  sont transformés par le groupe  $G$ , aussitôt que l'on fixe le point  $x_1^0 \dots x_n^0$ . On vérifie cela immédiatement, si l'on pense que les termes du premier ordre dans les transformations infinitésimales (4) sont les seuls par lesquelles sont effectivement transformés\* les points infiniment voisins du point  $x_1^0 \dots x_n^0$ .

Si maintenant les deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  ont, relativement au groupe  $G$ , l'invariant  $\omega(x_1 \dots x_n, dx_1 \dots dx_n)$ , alors il est clair qu'après fixation du point  $x_\nu^0$ , le point infiniment voisin :  $x_\nu^0 + dx_\nu$  est transformé de telle sorte que l'expression :  $\omega(x_1^0 \dots x_n^0, dx_1 \dots dx_n)$  reste invariante, et donc dans ce cas,  $\omega(x_1^0 \dots x_n^0, x'_1 \dots x'_n)$  est un invariant du groupe (5).

Si d'un autre côté le groupe (5) possède un invariant :  $\varphi(x'_1 \dots x'_n)$ , il s'ensuit que deux points infiniment voisins quelconques ont un invariant relativement au groupe  $G$ . En effet, si  $G$  est intransitif et si  $\chi(x_1 \dots x_n)$  est un invariant quelconque de  $G$ , alors l'expression :

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \chi(x)}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

est visiblement un invariant des deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$ . Mais si  $G$  est transitif, alors en s'imaginant que toutes les transformations de  $G$  s'exercent sur l'expression :

$$\varphi(dx_1 \dots dx_n),$$

on obtient une expression complètement déterminée de cette espèce qui est attachée à chaque point de l'espace, et toutes ces expressions sont échangeables l'une avec l'autre par les transformations de  $G$ , ce qui ne veut toutefois rien dire d'autre qu'il y a une expression :

$$\omega(x_1 \dots x_n, dx_1 \dots dx_n)$$

invariante par  $G$ , et par conséquent que deux points infiniment voisins quelconques ont un invariant relativement à  $G$  (cf. p. 287).

---

\* Jusqu'à présent, nous avons habituellement interprété  $x'_1 \dots x'_n$  comme les coordonnées homogènes des  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires passant par le point  $x_1^0 \dots x_n^0$ , mais cependant, l'interprétation du groupe (5) que nous indiquons ici, nous l'avons déjà mentionnée aussi (cf. p. 238).

Nous voyons à partir de là que deux points infiniment voisins quelconques ont un invariant relativement à  $G$  si et seulement si le groupe linéaire homogène (5) défini à l'instant en les variables  $x'_1 \dots x'_n$  possède un invariant. Nous énonçons donc ce résultat de la manière suivante :

**Proposition 1.** *Si l'on souhaite décider si deux points infiniment voisins quelconques ont un invariant, relativement à un groupe continu qui est constitué de transformations infinitésimales, alors il n'est pas nécessaire de connaître les transformations infinitésimales du groupe lui-même, mais il suffit de connaître les termes du premier ordre en les  $x_\nu - x_\nu^0$ , dans les transformations infinitésimales du groupe qui laissent invariant un point  $x_1^0 \dots x_n^0$  en position générale.*

Il est d'une importance particulière de pouvoir décider si deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  possèdent un invariant  $\omega(x, dx)$  qui est homogène du premier ordre en les  $dx_\nu$ . S'ils ont en effet un tel invariant, on peut le considérer comme longueur d'un élément courbe, et l'on trouve par intégration que chaque courbe a une certaine longueur.

Il n'est pas difficile d'établir si un tel invariant existe ou non ; à cette fin, on doit évidemment constater simplement si le groupe (5) possède un invariant qui est homogène du premier ordre en les  $x'_\nu$ . Mais cela est très facile.

Si la transformation :

$$Uf = \sum_{\nu=1}^n x'_\nu \frac{\partial f}{\partial x'_\nu}$$

se laisse exprimer par combinaison linéaire à partir des transformations infinitésimales (5), alors tous les invariants éventuels de (5) sont homogènes d'ordre zéro, et il n'y en aura sûrement aucun qui est homogène du premier ordre. Si au contraire  $Uf$  ne se peut pas s'exprimer par combinaison linéaire à partir des transformations (5) et si le groupe (5) a en général un invariant, alors il en a toujours aussi un qui est homogène du premier ordre ; car, sous les hypothèses posées, les équations :

$$(5') \quad A_k f = \sum_{\mu \nu}^{\dots n} \alpha_{k \mu \nu} x'_\mu \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} = 0 \quad (k=1 \dots m)$$

ont certainement une solution commune. Maintenant, puisque l'équation  $Uf = 0$  n'est pas conséquence de (5') et puisque les  $m$  crochets  $[A_k, U]$  s'annulent identiquement, il est clair que les équations :

$$A_1 f = 0, \dots, A_m f = 0, \quad Uf = f$$



ont également une solution commune.

On voit donc qu'à partir de l'existence d'un invariant de deux points à distance finie on ne peut pas déduire avec certitude l'existence d'une longueur d'élément courbe, *et par conséquent, qu'à deux points finiment éloignés l'un de l'autre peut très bien être associée une fonction distance, sans que les courbes aient une longueur.* Si en effet deux points finiment éloignés l'un de l'autre ont un invariant, il découle du Théorème 44 que deux points infiniment voisins  $x_\nu$  et  $x_\nu + dx_\nu$  ont au minimum un invariant, mais cependant, l'invariant en question peut être homogène d'ordre zéro par rapport à tous les  $dx_\nu$ , alors que les courbes n'ont toutefois une longueur que lorsqu'il existe un invariant  $\omega(x, dx)$  qui est homogène du premier ordre en les  $dx_\nu$ .

Le groupe du plan à trois paramètres :

$$p, \quad q, \quad xp + yq$$

fournit un exemple pour cela. Relativement à lui, deux points finiment éloignés l'un de l'autre ont un et un seul invariant, à savoir :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

et pareillement, deux points infiniment voisins ont un et un seul invariant, à savoir :

$$\frac{dy}{dx}.$$

Ainsi, bien que deux points finiment éloignés l'un de l'autre possèdent une fonction distance, les courbes n'ont cependant pas de longueur relativement à ce groupe.

Inversement, nous avons vu précédemment qu'à partir de l'existence d'un invariant  $\omega(x, dx)$  qui est homogène du premier ordre en  $dx$ , on ne peut en aucune façon déduire l'existence d'une fonction distance entre deux points finiment éloignés l'un de l'autre (*voir p. 277 sq.*). Nous pouvons maintenant exprimer aussi ce dernier fait de la manière suivante : *Même si les courbes ont une longueur, ce n'est pourtant pas pour cette raison que deux points finiment éloignés l'un de l'autre ont une fonction distance, ou qu'ils possèdent une ligne de liaison la plus courte.*

Les considérations précédentes sur les relations entre les invariants de points finiment éloignés les uns des autres et les invariants de points infiniment voisins peuvent encore être complétées d'une manière essentielle ; on peut ainsi les généraliser aussi en introduisant trois points ou

plus, en épuisant les différentielles d'ordre deux et d'ordre supérieur en les  $x_\nu$ , et ainsi de suite. Nous nous réservons le droit de traiter d'une manière détaillée de ces questions à une autre occasion.

Nous nous tournons maintenant vers le problème véritable du présent chapitre, *i.e.* vers la solution du problème de Riemann-Helmholtz, et pour préciser, nous nous limitons tout d'abord, comme cela a été annoncé plus haut, à l'espace trois fois étendu.

### § 102.

Nous affirmons que les mouvements euclidiens et non-euclidiens de  $R_3$  sont entièrement caractérisés, lorsque l'on pose les axiomes suivants :

**I)**  $R_3$  est une variété numérique.

**II)** Les mouvements de  $R_3$  forment un groupe réel continu, qui est engendré par des transformations infinitésimales.

**III)** Si l'on fixe un point réel quelconque :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  en position générale, alors tous les autres points réels :  $x_1, x_2, x_3$ , en lesquels un autre point réel :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  peut encore être transformé, satisfont une équation réelle de la forme :

$$(6) \quad W(y_1^0, y_2^0, y_3^0; x_1^0, x_2^0, x_3^0; x_1, x_2, x_3) = 0,$$

qui n'est pas réalisée pour :  $x_1 = y_1^0, x_2 = y_2^0, x_3 = y_3^0$ , et qui représente (en général) une surface réelle passant par le point :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ .

**IV)** Autour du point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , une région finie trois fois étendue peut être délimitée de telle sorte qu'après fixation du point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , chaque autre point réel :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  de la région peut encore être transformé continûment en chaque autre point réel appartenant à la région qui satisfait l'équation (6) et pouvant être relié au point :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  par une série de points continue et irréductible.

Si l'on raye les deux mots mis entre parenthèses dans l'Axiome III, ces axiomes suffisent sûrement aussi ; ce qui suit le montre, quand on supprime partout les deux mots mis entre parenthèse. Si on conserve dans l'Axiome III et dans la suite les mots mis entre parenthèse, alors la suite montre, si nous ne nous trompons pas, que les axiomes sont encore aussi satisfaits.

Par  $G$ , nous voulons entendre un groupe continu fini ou infini quelconque qui est engendré par des transformations infinitésimales et qui satisfait les Axiomes III et IV.

Puisque les équations (6) sont identiquement réalisées pour :  $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0$ , il y a toujours, parmi l'ensemble de tous les points réels :  $x_1, x_2, x_3$  qui satisfont l'équation (6), une famille continue non divisée en plusieurs parties, dans laquelle est contenu le point :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ . D'après l'Axiome III, cette famille de points forme (en général) une surface passant par le point :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  (il est cependant imaginable aussi qu'elle se réduise à une courbe passant par ce point, voire à ce point lui-même). Quoiqu'il en soit, nous voulons l'appeler une *pseudosphère* appartenant au groupe  $G$ , et pour préciser, une pseudosphère de centre :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  (cf.p. 171).

Notre Axiome III exprime maintenant visiblement qu'une *pseudosphère de centre :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  ne passe jamais par son centre*. En cela réside le fait que deux points séparés restent aussi séparés, quand toutes les transformations de  $G$  agissent, et donc que deux points finiment éloignés l'un de l'autre ne peuvent jamais être transformés en deux points infiniment voisins (cf.p. 290).

Mais notre Axiome IV peut à présent être exprimé de la manière suivante : autour du point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , une région finie trois fois étendue peut être délimitée de telle sorte qu'après fixation du point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , chaque autre point réel de la région peut se mouvoir de manière complètement libre sur la pseudosphère centrée en le point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  qui passe par lui.

Avant de passer à la détermination de tous les groupes  $G$  qui satisfont nos axiomes, nous voulons encore comparer en peu de mots nos axiomes aux axiomes helmholtziens.

Dans ses axiomes, Monsieur de Helmholtz demande réellement plus que nous, même quand on fait complètement abstraction de son axiome de monodromie. Comme cela a été démontré auparavant, il découle en effet de ses trois premiers axiomes que les mouvements forment en général un groupe continu *fini*, qui est engendré par des transformations infinitésimales ; toutefois, nous demandons simplement dans notre Axiome II que les mouvements forment un groupe continu engendré par des transformations infinitésimales, donc nous n'excluons pas depuis le début la possibilité que le groupe soit *infini*. D'autre part, nos Axiomes III et IV exigent essentiellement moins que le troisième axiome helmholtzien.

En effet, alors que Monsieur de Helmholtz exige que chaque point soit mobile d'une manière parfaitement libre, tant qu'il n'est pas restreint par les

équations qui existent entre lui et les points mobiles restants, nous demandons seulement qu'après fixation d'un point, chaque autre point soit parfaitement libre, tant qu'il n'est pas limité par les équations existant entre lui et le point fixé. À vrai dire, nous ajoutons encore l'exigence apparemment nouvelle qu'une pseudosphère ne passe jamais par son centre, mais cette exigence n'est rien de plus qu'une version précise de ce que Monsieur de Helmholtz a aussi demandé implicitement. En effet, ce dernier exige en particulier qu'après fixation du point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , chaque autre point puisse se mouvoir d'une manière complètement libre sur la pseudosphère passant par lui et centrée en le point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ . Si maintenant une des pseudosphères en question passait par son centre, alors, après fixation de :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , aucun point  $P$  de cette pseudosphère ne pourrait se mouvoir de manière parfaitement libre sur sa pseudosphère, car parmi les transformations non-dégénérées de  $G$  qui laissent au repos le point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , il n'y en a aucune qui transforme le point  $P$  en le point invariant :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ .

Venons-en maintenant à la détermination de tous les groupes qui satisfont nos axiomes.

Nous démontrons en premier lieu que chaque groupe de cette espèce est transitif et que deux points finiment éloignés l'un de l'autre ont un et un seul invariant relativement à  $G$ .

Si  $G$  était intransitif, il laisserait sûrement invariantes  $\infty^1$  surfaces réelles dont les équations pourraient être rapportées, au moyen d'une transformation ponctuelle réelle, à la forme :  $x_3 = \text{const.}$  Si maintenant nous fixons un point réel :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  en position générale, alors chaque autre point :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  pourrait évidemment encore occuper seulement les positions qui satisfont l'équation :  $x_3 = x_3^0$ , et par conséquent, l'équation (6) serait nécessairement de la forme :  $x_3 = x_3^0$ . Donc la pseudosphère centrée en le point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  serait représentée par l'équation :  $x_3 = \text{const.}$ , à la suite de quoi une de ces pseudosphères passerait par son centre, ce qui est exclu. Ainsi,  $G$  ne peut pas être intransitif, mais il doit au contraire être transitif.

En outre, il découle de l'Axiome IV qu'après fixation d'un point réel en position générale, chaque autre point réel peut occuper (en général) encore exactement  $\infty^2$  positions différentes. Ainsi, il est clair que par l'action de  $G$ , chaque paire de points de  $R_3$  ne peut pas être transformée en chaque autre paire de points, mais plutôt : une paire de points reçoit, via l'action de  $G$ , au maximum  $\infty^5$  positions différentes. Par conséquent, si  $Xf$  est une transformation infinitésimale quelconque de  $G$ , et si  $Yf$  a la même signification qu'à la page 292, alors il n'y a sûrement, parmi l'ensemble des équations :  $Xf + Yf = 0$ , pas plus que cinq équations qui sont indépendantes les unes des autres, donc ces équations

ont au minimum une solution en commun :  $\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ , c'est-à-dire que les deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  ont en tout cas un invariant relativement à  $G$ , à savoir l'invariant  $\Omega(x, y)$ .

De la transitivité de  $G$  il découle maintenant immédiatement que les deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  ont seulement un invariant relativement à  $G$ ; en effet, s'ils avaient deux ou même trois invariants, alors chaque paire de points occuperait au maximum  $\infty^4$  positions différentes par l'action de  $G$ , et par conséquent, après fixation d'un point en position générale, chaque autre point pourrait se mouvoir au plus sur une courbe, ce qui se trouve être en contradiction avec l'Axiome IV.

Ainsi,  $G$  est réellement transitif et deux points  $x_\nu$  et  $y_\nu$  finiment éloignés l'un de l'autre ont, relativement à  $G$ , seulement un invariant :  $\Omega(x, y)$ . Nous pouvons conclure de là que l'équation (6) peut être ramenée à la forme :

$$(6') \quad \Omega(x_1, x_2, x_3; y_1^0, y_2^0, y_3^0) = \Omega(x_1^0, x_2^0, x_3^0; y_1^0, y_2^0, y_3^0).$$

Nous démontrons maintenant que notre groupe est *réel-primitif*.

(Puisque l'ensemble de toutes les pseudosphères de centre :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  est représenté par *une* équation et puisque, parmi ces pseudosphères, se trouvent  $\infty^1$  surfaces réelles, il est clair que seulement un nombre discret de pseudosphères de centre :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  peut se réduire à des courbes ou à des points.) Comme (de plus) aucune des pseudosphères de centre :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$  ne peut passer par son centre, il paraît clair qu'après fixation du point :  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , aucune courbe ou surface passant par ce point ne peut rester au repos, et par conséquent,  $G$  est effectivement réel-primitif.

À présent, il est facile aussi de démontrer que  $G$  est fini et pour préciser, qu'il a au plus *six paramètres*.

Tout d'abord, il est en effet certain qu'au moins  $\infty^2$  pseudosphères différentes appartiennent à  $G$ . S'il n'y avait en effet que  $\infty^1$  pseudosphères, alors il ne passerait par chaque point qu'une pseudosphère et chaque point serait le centre de la pseudosphère passant par lui; mais ceci ne doit pas être.

Ensuite, soit  $P_1, P_2, P_3$  et  $P$  quatre points réels quelconques qui sont mutuellement en position générale. Puisqu'il y a  $\infty^2$  pseudosphères différentes, les deux pseudosphères centrées en  $P_1$  et en  $P_2$  passant par  $P$  se coupent nécessairement en une courbe réelle  $C$  passant par  $P$ . Si maintenant  $C$  se trouvait aussi dans la pseudosphère centrée en  $P_3$

passant par  $P$ , alors toutes les pseudosphères passant par  $P$  se coupe-  
raient généralement en la courbe  $C$  ; si donc l'on fixait  $P$ , la courbe  $C$   
passant par  $P$  resterait elle aussi nécessairement au repos. Mais nous  
avons démontré à l'instant que cela est impossible. On obtient donc que  
les trois pseudosphères de centres  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  qui passent par  $P$  ont  
seulement le point  $P$  en commun, mais n'ont pas en commun de courbe  
réelle passant par ce point. Si maintenant nous fixons les trois points  $P_1$ ,  
 $P_2$  et  $P_3$ , alors  $P$  peut en tout cas se mouvoir seulement sur la variété-  
intersection [*Schnittmannigfaltigkeit*] des trois pseudosphères passant  
par  $P$  centrées en  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , et comme cette variété-intersection ne  
consiste qu'en le point  $P$ , ce point  $P$  doit rester au repos. En d'autres  
termes : dès qu'on fixe trois points réels qui sont mutuellement en po-  
sition générale, tous les points de  $R_3$  restent généralement au repos.  
Maintenant, puisque  $G$  est transitif et puisqu'après fixation d'un point,  
chaque autre point réel en position générale peut encore décrire une sur-  
face, la fixation de trois points revient à imposer au plus six conditions.  
Donc le groupe  $G$  est fini, et pour préciser, il a au plus six paramètres.

Si nous fixons un point réel  $P$  en position générale, alors la va-  
riété projective des  $\infty^2$  éléments linéaires passant par  $P$  se transforme  
par l'action d'un groupe projectif réel  $g$ , qui a visiblement au plus trois  
paramètres. Mais maintenant, d'après notre détermination de tous les  
groupes projectifs réels du plan (*voir* p. 106 sq. et p. 380 sq.), nous ob-  
tenons que chaque groupe projectif réel du plan qui a moins de trois pa-  
ramètres laisse au repos au moins un point réel. Si donc  $g$  avait moins de  
trois paramètres, il laisserait au repos au minimum un élément linéaire  
réel passant par  $P$ , et il découlerait de là que  $G$  serait réel-imprimitif,  
alors qu'il doit cependant être réel-primitif. Par conséquent  $g$  a exacte-  
ment trois paramètres, à la suite de quoi  $G$  a exactement six paramètres.  
Ainsi :

*Si un groupe réel  $G$  satisfait nos Axiomes III et IV, alors il est réel-  
primitif à six paramètres ; en outre, deux points finiment éloignés l'un  
de l'autre ont, relativement à son action, seulement un invariant ; et par  
ailleurs,  $G$  est constitué de telle sorte que les  $\infty^2$  éléments linéaires  
réels passant par chaque point réel fixé en position générale sont trans-  
formés par l'action d'un groupe à trois paramètres.*

Avant toute chose, nous devons maintenant établir quelles sont les  
différentes formes que peut prendre le groupe  $g$  défini ci-dessus. Nous  
savons que  $g$  a trois paramètres et qu'il ne laisse invariant aucun élé-  
ment linéaire. Si donc nous rapportons projectivement les  $\infty^2$  éléments

linéaires réels passant par  $P$  aux points réels d'un plan, alors  $g$  se transforme en un groupe projectif réel  $\mathfrak{g}$  à trois paramètres de ce plan, et pour préciser, en un groupe par l'action duquel aucun point réel ne reste invariant. Mais d'après les pages 106 et 384, chaque tel groupe  $\mathfrak{g}$  est semblable, *via* une transformation projective réelle du plan, soit au groupe projectif réel d'une conique non-dégénérée qui est représentée par une équation réelle, soit au groupe :

$$p, \quad q, \quad \eta p - \xi q + c(\xi p + \eta q).$$

Par conséquent,  $g$  laisse invariante soit une conique non-dégénérée du second degré formée d'éléments linéaires qui est représentée par une équation réelle, soit il laisse invariant un élément de surface réel et dans cet élément, deux éléments linéaires conjugués.

Lorsque le deuxième cas se produit, à chaque point réel en position générale est associé par  $G$  un élément de surface réel invariant passant par ce point, donc  $G$  laisse invariante une équation de Pfaff réelle, qui naturellement, à cause de la primitivité de  $G$ , ne doit pas être intégrable. Si nous nous imaginons cette équation rapportée à la forme :  $dz - ydx$  par une transformation ponctuelle réelle de  $R_3$ , alors  $G$  se transforme en un groupe réel à six paramètres  $G'$ , par l'action duquel l'équation :  $dz - ydx = 0$  reste invariante. De plus, nous pouvons faire en sorte, *via* une transformation ponctuelle réelle à travers laquelle l'équation de Pfaff en question reste invariante, que l'origine des coordonnées :  $x = y = z = 0$  soit un point de position générale relativement à l'action de  $G'$  (*voir* le Tome II, p. 402 sq.).

Si nous fixons l'origine des coordonnées, alors l'élément de surface :  $dz = 0$  reste invariant, ainsi que deux éléments linéaires imaginaires conjugués contenus en lui ; nous pouvons toujours, *via* une transformation réelle à travers laquelle l'origine des coordonnées et l'équation :  $dz - ydx = 0$  restent invariantes, transformer ces deux éléments linéaires en les éléments linéaires :

$$(7) \quad dz = dx + idy = 0, \quad d\bar{z} = dx - idy = 0.$$

Maintenant, puisque  $G'$  est transitif, et puisque, après fixation de l'origine des coordonnées, les éléments linéaires passant par l'origine sont transformés par l'action d'un groupe à trois paramètres,  $G'$  doit contenir trois transformations infinitésimales du premier ordre en les  $x, y, z$  dans le voisinage de l'origine des coordonnées, mais au contraire, aucune transformation du second ordre, ou d'un ordre supérieur. Mais par ailleurs, nous connaissons toutes les transformations infinitésimales qui laissent invariante l'équation :  $dz - ydx = 0$  et qui sont du premier ordre

en les  $x, y, z$  (*voir* le Tome II, p. 405), et nous reconnaissons immédiatement que parmi ces transformations, il y en a seulement quatre par lesquelles les deux éléments linéaires (7) restent invariants et à partir desquelles on ne peut déduire, par combinaison linéaire, aucune transformation du second ordre ou d'un ordre supérieur, et ce sont les quatre :

$$yp - xq + \dots, \quad xp + yq + 2zr + \dots, \quad zp + \dots, \quad zq + \dots,$$

où les termes supprimés sont d'ordre deux ou supérieur par rapport à  $x, y, z$ . Si nous tenons compte du fait que notre groupe  $G'$  contient précisément trois transformations infinitésimales indépendantes du premier ordre et que celles-ci ne doivent laisser au repos aucun élément linéaire passant par l'origine des coordonnées, alors nous trouvons facilement que les transformations infinitésimales de  $G'$ , qui laissent au repos l'origine des coordonnées, ont la forme :

$$yp - xq + c(xp + yq + 2zr) + \dots, \quad zp + \dots, \quad zq + \dots.$$

En outre, en tant que groupe transitif,  $G'$  contient naturellement encore trois transformations infinitésimales d'ordre zéro de la forme :

$$(8) \quad p + \dots, \quad q + \dots, \quad r + \dots.$$

Le groupe linéaire homogène, que  $G'$  associe à l'origine des coordonnées (*cf.* p. 294), est évidemment de la forme :

$$(9) \quad y'p' - x'q' + c(x'p' + y'q' + 2z'r'), \quad z'p', \quad z'q'.$$

Mais maintenant, deux points finiment éloignés l'un de l'autre doivent avoir un invariant par rapport à  $G'$ , donc d'après les pages 294 sq., le groupe linéaire homogène (9) doit posséder un invariant, ce qui ne peut manifestement se produire que si  $c$  s'annule, et par conséquent on obtient qu'en dehors des transformations (8),  $G'$  en contient encore trois de la forme :

$$(10) \quad yp - xq + \dots, \quad zp + \dots, \quad zq + \dots,$$

et chaque transformation infinitésimale de  $G'$  peut être exprimée par combinaison linéaire à partir de ces six-là.

Rappelons maintenant à ce sujet que les transformations infinitésimales de  $G$  peuvent aussi être interprétées comme transformations de contact infinitésimales du plan  $x, z$ , et qu'à chacune de ces transformations de contact infinitésimales est associée une fonction caractéristique par laquelle elle est parfaitement déterminée. En particulier, les fonctions caractéristiques des transformations (10) s'énoncent de la manière



suivante :

$$x^2 + y^2 + \dots, \quad yz + \beta_3(x, y) + \dots, \quad xz + \alpha_3(x, y) + \dots,$$

où  $\alpha_3$  et  $\beta_3$  sont certaines fonctions entièrement homogènes de degré trois par rapport à  $x$  et à  $y$ , et où les termes supprimés sont à chaque fois d'un rang en  $x, y, z$  qui est supérieur à celui des termes qui sont écrits (*voir* le Tome II, p. 526 sq. et p. 532 sq.). Mais maintenant,  $G'$  doit nécessairement contenir aussi la transformation infinitésimale dont la fonction caractéristique possède la forme :

$$(11) \{ yz + \beta_3 + \dots, \quad xz + \alpha_3 + \dots \} = z^2 + \lambda_2(x, y)z + \lambda_4(x, y) + \dots,$$

où nous entendons par  $\lambda_2$  et par  $\lambda_4$  des fonctions entièrement homogènes de degré 2 et 4 par rapport à  $x$  et  $y$  (*loc. cit.*, p. 321 et p. 526 sq.). La seule transformation infinitésimale dont la fonction caractéristique possède la forme (11) serait du second ordre en  $x, y, z$ , alors que  $G'$  ne contient cependant absolument aucune transformation infinitésimale du second ordre. Par conséquent, nous parvenons au résultat qu'il n'y a pas du tout de groupe  $G'$  à six paramètres ayant la constitution considérée ici, et donc que le deuxième des deux cas distingués à la page 303 ne peut pas du tout se réaliser.

Si l'on veut éviter les calculs avec les fonctions caractéristiques, on peut aussi procéder de la manière suivante :  $G'$  laisse invariante l'équation de Pfaff :  $dz - ydx = 0$  et, quand on fixe un point réel en position générale, alors deux éléments linéaires imaginaires conjugués restent au repos dans l'élément linéaire que l'équation :  $dz - ydx = 0$  attache à ce point. Il découle de là que  $G'$ , interprété comme groupe de transformations de contact du plan  $x, z$ , laisse invariantes deux équations différentielles ordinaires conjuguées du second ordre. Ainsi, grâce à une transformation de contact (imaginaire) du plan, nous pouvons parvenir à ce que les courbes intégrales de l'une de ces deux équations différentielles soient transformées en les points du plan. Nous pouvons donc nous supposer les variables  $x, y, z$  choisies depuis le début de telle sorte que  $G'$ , interprété comme groupe de transformations de contact du plan  $x, z$ , ne consiste qu'en des transformations ponctuelles prolongées, et qui en outre laisse invariante encore une équation différentielle ordinaire du second ordre. Mais maintenant, nous avons vu à la page 76 que chaque groupe continu fini de transformations ponctuelles du plan qui laisse invariante une équation différentielle ordinaire du second ordre est semblable, *via* une transformation ponctuelle, à un groupe projectif du plan. Par conséquent, nous pouvons admettre que  $G'$ , lorsqu'en général il existe, provient par prolongation d'un groupe projectif du plan à six paramètres ; avec cela, nous n'avons naturellement pas besoin de considérer comme différents l'un de l'autre deux groupes projectifs qui, à l'intérieur du groupe projectif général, sont conjugués l'un à

l'autre [*gleichberechtigt sind*], ou sont dualistiques l'un de l'autre ; nous pouvons donc supposer que  $G'$  provient par prolongation du groupe linéaire général :

$$p, \quad r, \quad xp, \quad zp, \quad xr, \quad zr$$

du plan, et ainsi, que dans les variables choisies  $x, y, z$ , il possède la forme :

$$p, \quad r, \quad xp - yq, \quad zp - y^2q, \quad xr + q, \quad zr + yq.$$

Mais nous avons déjà démontré aux pages 191 sq. au sujet de ce groupe que relativement à lui, deux points finiment éloignés l'un de l'autre n'ont aucun invariant. Ainsi, on obtient à nouveau qu'un groupe  $G'$  de la nature ici demandée n'existe pas du tout.

Il reste encore à traiter le premier des deux cas distingués à la page 303.

Si ce cas se produit, les  $\infty^2$  éléments linéaires passant par chaque point réel fixé en position générale sont transformés par l'action d'un groupe à trois paramètres, et pour préciser, de telle façon qu'un cône non-dégénéré du second degré constitué d'éléments linéaires reste invariant. Par conséquent,  $G$  laisse invariante une équation réelle de la forme :

$$\sum_{\mu\nu}^{1,2,3} \alpha_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3) dx_\mu dx_\nu = 0,$$

dont le déterminant ne s'annule pas. Maintenant, puisque notre  $G$  est à six paramètres, on obtient, grâce au Théorème 35 p. 391, qu'il peut être transformé, *via* une transformation ponctuelle réelle de  $R_3$ , soit en le groupe des mouvements euclidiens, soit en l'un des deux groupes des mouvements non-euclidiens, soit en l'un des deux groupes suivants :

$$\begin{aligned} p_1, p_2, p_3, \quad x_1p_2 - x_2p_1, \quad x_2p_3 + x_3p_2, \quad x_3p_1 + x_1p_3; \\ p_1 + x_1U_1, \quad p_2 + x_2U_2, \quad p_3 - x_3U_3, \\ x_1p_2 - x_2p_1, \quad x_2p_3 + x_3p_2, \quad x_3p_1 + x_1p_3. \end{aligned}$$

Cependant, les deux derniers groupes ne satisfont pas notre Axiome III, car pour ces deux-là l'origine des coordonnées est un point en position générale et une des pseudosphères ayant pour centre l'origine des coordonnées, est la conique :

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

mais cette pseudosphère passe par son centre, ce qui est justement exclu par l'Axiome III.

*Ainsi on a démontré que les mouvements euclidiens et non-euclidiens sont effectivement entièrement caractérisés par les axiomes posés à la page 298.*

### § 103.

Nous allons maintenant montrer que les mouvements euclidiens et non-euclidiens de  $R_4$  sont entièrement caractérisés, lorsqu'on pose les axiomes suivants.

**I)**  $R_4$  est une variété numérique.

**II)** Les mouvements de  $R_4$  forment un groupe réel continu, qui est engendré par des transformations infinitésimales.

**III)** Si l'on fixe un point réel quelconque :  $y_1^0 \dots y_4^0$  en position générale, alors tous les autres points réels :  $x_1, x_2, x_3$  en lesquels un autre point réel :  $x_1^0 \dots x_4^0$  peut encore être transformé, satisfont une équation réelle de la forme :

$$(12) \quad W(y_1^0 \dots y_4^0; x_1^0 \dots x_4^0; x_1 \dots x_4) = 0,$$

qui n'est pas réalisée pour :  $x_1 = y_1^0, \dots, x_4 = y_4^0$ , et qui représente en général une variété trois fois étendue passant par le point :  $x_1^0 \dots x_4^0$ .

**IV)** Autour du point :  $y_1^0 \dots y_4^0$ , une région finie quatre fois étendue peut être délimitée de telle sorte que les conditions suivantes sont satisfaites : Si l'on fixe le point :  $y_1^0 \dots y_4^0$ , alors chaque autre point réel :  $x_1^0 \dots x_4^0$  de la région peut encore être transformé continûment en tous les points réels :  $x_1 \dots x_4$  qui satisfont l'équation (12). Si l'on fixe, outre le point :  $y_1^0 \dots y_4^0$ , encore un deuxième point réel :  $z_1^0 \dots z_4^0$  de la région, alors chaque autre point réel :  $x_1^0 \dots x_4^0$  de la région peut encore être transformé continûment en tous les points réels :  $x_1 \dots x_4$  de la région qui satisfont les deux équations : (12) et :

$$(13) \quad W(z_1^0 \dots z_4^0; x_1^0 \dots x_4^0; x_1 \dots x_4) = 0.$$

Avec cela, il est à chaque fois supposé que les deux points :  $x_1^0 \dots x_4^0$  et  $x_1 \dots x_4$  sont reliés l'un à l'autre par une série continue et irréductible de points de cette sorte.

Nous faisons à nouveau remarquer expressément à ce sujet que ces axiomes contiennent peut-être certains éléments superflus, bien qu'ils demandent moins que les axiomes helmholtziens. En effet, Monsieur de Helmholtz demande en plus que lorsque trois points sont fixés, chaque quatrième point est encore complètement libre de se mouvoir, autant que

l'autorisent les équations par lesquelles il est lié avec les points fixés ; à cet effet, c'est même son axiome de monodromie qui se présente.

Soit à nouveau  $G$  un groupe quelconque qui satisfait nos axiomes. La variété passant par le point :  $x_1^0 \dots x_4^0$  qui est définie par l'équation (12), nous l'appellerons naturellement encore une pseudosphère de centre :  $y_1^0 \dots y_4^0$  relative à  $G$ . Notre Axiome III exprime ensuite qu'en général, les pseudosphères sont des variétés réelles trois fois étendues et qu'une pseudosphère ne passe jamais par son centre.

On peut maintenant démontrer, exactement comme dans le précédent paragraphe, que  $G$  est transitif, et que deux points finiment éloignés l'un de l'autre :  $x_1 \dots x_4$  et :  $y_1 \dots y_4$  ont un et un seul invariant :  $\Omega(x, y)$  relativement à  $G$ . Il découle alors immédiatement de là que l'équation (12) peut être ramenée à la forme :

$$(14) \quad \Omega(x_1 \dots x_4; y_1^0 \dots y_4^0) = \Omega(x_1^0 \dots x_4^0; y_1^0 \dots y_4^0).$$

Nous ne devons donc pas nous attarder plus longtemps sur ce sujet.

De même, la démonstration que  $G$  est *réel-primitif* se présente presque exactement comme au § 102. Parmi les pseudosphères de centre :  $y_1^0 \dots y_4^0$ , il y en a seulement un nombre discret qui ne sont pas des variétés réelles à trois dimensions, mais qui sont seulement deux fois ou une fois étendues, voire même se réduisent à un point. Comme par ailleurs aucune pseudosphère ne passe par son centre, alors après fixation du point :  $y_1^0 \dots y_4^0$ , il est certain qu'aucune variété ponctuelle passant par ce point ne peut rester au repos. Par conséquent,  $G$  doit être *réel-primitif*.

Enfin, exactement comme au § 102, on peut aussi démontrer que  $G$  est fini, et pour préciser, qu'il a au plus six paramètres.

Si en effet  $P_1 \dots P_4$  et  $P$  sont cinq points mutuellement en position générale, alors les quatre pseudosphères de centres  $P_1 \dots P_4$  passant par  $P$  ne peuvent se couper qu'en  $P$  ; car si elles se coupaient en une variété  $M$  passant par  $P$  qui ne consistait pas seulement en le point  $P$ , alors toutes les pseudosphères passant par  $P$  se couperaient généralement en la variété  $M$ , par suite de quoi  $M$  resterait aussi en même temps au repos après fixation de  $P$ , ce qui est exclu. Si maintenant nous fixons les quatre points  $P_1 \dots P_4$ , alors  $P$  ne peut visiblement se mouvoir que sur l'intersection des pseudosphères centrées en  $P_1 \dots P_4$  qui passent par  $P$ , et puisque cette intersection consiste seulement en le point  $P$  lui-même,  $P$  doit rester au repos, et parce que  $P$  est un point en position générale, chaque point de l'espace reste en même temps généralement

au repos. Sous les hypothèses posées, la fixation de  $P_1 \dots P_4$  nécessite au plus :  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  conditions, donc on obtient que  $G$  est fini, et pour préciser, qu'il a *au plus dix paramètres*.

Choisissons maintenant, parmi les pseudosphères de centre  $P_1$ , une quelconque d'entre elles en position générale, et appelons-la  $K_1$ . Si  $P_2$  est un point quelconque de  $K_1$ , il y a  $\infty^1$  pseudosphères de centre  $P_2$ , mais dont aucune ne coïncide avec  $K_1$ , car une pseudosphère ne contient jamais son centre.

Si nous fixons  $P_1$ , alors  $P_2$  peut se mouvoir d'une manière complètement libre sur la pseudosphère  $K_1$ , qui, sous les hypothèses posées, est certainement une variété réelle trois fois étendue. Si, hormis  $P_1$ , nous fixons aussi encore  $P_2$ , alors chaque autre point  $P_3$  de  $K_1$  peut seulement se mouvoir sur la variété  $M'$  qui est découpée dans  $K_1$  par la pseudosphère de centre  $P_2$  qui passe par  $P_3$ ; et d'après l'Axiome IV,  $P_3$  peut se mouvoir d'une manière complètement libre sur cette variété. Nous pouvons ajouter que, sous les hypothèses posées,  $M'$  est en général une variété réelle deux fois étendue.

Si nous déterminons les points de  $K_1$  par trois coordonnées :  $x_1, x_2, x_3$  et si nous appelons :  $\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0$  les coordonnées de  $P_2$ , et :  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  celles de  $P_3$ , nous pouvons aussi exprimer tout cela comme suit : Si  $P_1$  est fixé, alors les points :  $x_1, x_2, x_3$  de la pseudosphère  $K_1$  sont transformés de telle sorte qu'après fixation d'un point réel :  $\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0$  de  $K_1$ , chaque autre point réel  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  de  $K_1$  peut encore être envoyé sur tous les points réels :  $x_1, x_2, x_3$  de  $K_1$  qui satisfont une équation de la forme :

$$\mathfrak{W}(\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0; x_1^0, x_2^0, x_3^0; x_1, x_2, x_3) = 0;$$

en général, cette équation détermine une variété réelle deux fois étendue se trouvant sur  $K_1$ . Et maintenant, lorsqu'on fixe  $P_1$ , les points de la variété trois fois étendue  $K_1$  sont visiblement transformés par un groupe  $G_1$ ; d'après ce qui a justement été dit, il s'ensuit de plus que ce groupe satisfait tous les axiomes posés dans le paragraphe précédent, par suite de quoi nous pouvons conclure que  $G_1$  a six paramètres et qu'il peut être transformé en le groupe des mouvements euclidiens, ou en les deux groupes de mouvements non-euclidiens de  $R_3$ , *via* une transformation ponctuelle réelle en les variables :  $x_1, x_2, x_3$ . D'autre part, nous avons vu plus haut que  $G$  est transitif et qu'il a au plus dix paramètres, donc le sous-groupe de  $G$  par lequel  $P_1$  reste invariant n'a certainement pas plus que six paramètres. Par conséquent, on obtient que  $G$  possède exactement dix paramètres, et qu'après fixation de  $P_1$ , les points de  $R_4$  sont transformés par un groupe à six paramètres; en même temps, les points

de chaque pseudosphère de centre  $P_1$  qui est généralement située sont transformés par un groupe isomorphe-holoédrique à six paramètres, qui est semblable, par une transformation ponctuelle réelle de  $R_3$ , soit au groupe des mouvements euclidiens, soit à l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens.

Si nous fixons  $P_1$  et  $P_2$ , alors les points de  $K_1$  sont encore transformés par l'action d'un groupe à trois paramètres, et il en va de même pour les points de chaque autre pseudosphère de centre  $P_1$  qui est généralement située. Les groupes réels à trois paramètres en question sont naturellement isomorphes-holoédriques l'un avec l'autre. Mais si un sous-groupe réel à trois paramètres des mouvements euclidiens ou non-euclidiens de  $R_3$  est isomorphe-holoédrique avec un sous-groupe à trois paramètres qui laisse invariant un point réel, alors il est manifestement lui-même le sous-groupe à trois paramètres qui laisse invariant un certain point réel (*cf.* p. 385 et Chap. 10). Par conséquent, lorsque  $P_1$  et  $P_2$  sont fixés, sur chaque pseudosphère de centre  $P_1$  qui est généralement située, un certain point réel doit en général rester au repos, et pour préciser, les points en question doivent visiblement constituer une courbe qui passe par  $P_2$ . La symétrie montre qu'après fixation de  $P_1$  et de  $P_2$ , il passe aussi en même temps par  $P_1$  une courbe continue dont les points restent entièrement au repos.

Si donc nous fixons  $P_1$  et  $P_2$ , alors il passe par  $P_1$  ainsi que par  $P_2$  une courbe continue dont les points restent au repos. On peut s'imaginer que ces deux courbes coïncident, mais il est aussi possible qu'elles diffèrent l'une de l'autre. Nous voulons laisser en suspens la question de savoir si le deuxième cas peut réellement se produire. Afin de pouvoir nous exprimer d'une manière commode, nous voulons appeler *pseudodroite* l'ensemble des deux courbes. Ainsi nous pouvons dire : Pour chaque paire de points  $P_1$  et  $P_2$  de  $R_4$ , une pseudodroite est déterminée qui passe par  $P_1$  et par  $P_2$  ; si on fixe  $P_1$  et  $P_2$ , alors les points de cette pseudodroite restent entièrement au repos.

Il est clair que chaque point de la pseudosphère  $K_1$  détermine une pseudodroite passant par  $P_1$  et que les pseudodroites ainsi déterminées passent en général toutes par  $P_1$  ; car si nous fixons en même temps que  $P_1$  un point  $P$  en position générale qui ne se trouve pas sur  $K_1$ , alors un point  $P'$  sur  $K_1$  reste aussi au repos et la pseudodroite déterminée par  $P_1$  et par  $P$  coïncide donc avec celle qui est déterminée par  $P_1$  et par  $P'$ . Par conséquent, exactement  $\infty^3$  pseudodroites passant par  $P_1$  sont en général déterminées, mais puisque chacune de ces pseudodroites consiste éventuellement en deux courbes, dont l'une seulement passe

par  $P_1$  lui-même, il n'est pas certain depuis le début que la famille des courbes passant par  $P_1$ , qui est déterminée par ces  $\infty^3$  pseudodroites, est constituée de  $\infty^3$  courbes différentes.

Comme  $\infty^3$  pseudodroites différentes passant par  $P$  sont déterminées et comme, d'autre part,  $\infty^3$  éléments linéaires différents passent aussi par  $P_1$ , il y a parmi ces éléments linéaires un certain nombre, *i.e.*  $\infty^m$  ( $0 \leq m \leq 3$ ) qui sont différents, et qui sont constitués de telle sorte que par chacun d'entre eux passent certaines de ces pseudodroites-là, alors qu'aucune telle pseudodroite ne passe par les éléments linéaires restants. Nous allons démontrer que le nombre  $m$  en question est simplement égal à trois.

En effet, si  $P_1$  est fixé, alors les pseudodroites passant par  $P_1$  sont échangeables l'une avec l'autre, et donc la variété des  $\infty^m$  éléments linéaires définie à l'instant reste au repos. Comme de plus à chaque point de la pseudosphère  $K_1$  est associée l'une des pseudodroites passant par  $P_1$  et comme, après fixation de  $P_1$ , chaque point de  $K_1$  peut être encore transformé en chaque autre, alors, après fixation de  $P_1$ , chacune des pseudodroites déterminées passant par  $P_1$  peut aussi être transformée en chaque autre et par conséquent aussi, chacun des ces  $\infty^m$  éléments linéaires-là peut être transformé en chaque autre. Il découle de là que par chacun de ces  $\infty^m$  éléments linéaires passent  $\infty^{3-m}$  pseudodroites différentes, et que la pseudosphère  $K_1$  se décompose en  $\infty^m$  variétés réelles  $(3 - m)$  fois étendues, de telle sorte que chacun de nos  $\infty^m$  éléments linéaires est associé à l'une de ces variétés ; après fixation de  $P_1$ , ces  $\infty^m$  variétés  $(3 - m)$  fois étendues sont échangeables l'une avec l'autre. Si maintenant on avait  $m = 1$  ou  $= 2$ , alors, après fixation de  $P_1$ , les points de  $K_1$  se transformeraient de manière réelle-imprimitive, ce qui n'est évidemment pas le cas. Si d'un autre côté, on avait  $m = 0$ , alors un nombre discret d'éléments linéaires réels passant par  $P_1$  resterait au repos en même temps que  $P_1$ , et notre groupe  $G$  à dix paramètres serait donc réel-imprimitif, alors qu'il doit cependant être réel-primitif.

Par conséquent, le nombre  $m$  défini plus haut est réellement égal à 3, en conséquence de quoi il passe en général par  $P_1$  une pseudodroite dirigée par chaque élément linéaire réel.

Ainsi, on a démontré qu'il existe, entre les  $\infty^3$  éléments linéaires en  $P_1$  et les  $\infty^3$  points réels de la pseudosphère  $K_1$ , une relation qui en tout cas est univoque et réversible [eindeutig umkehrbar] à l'intérieur d'une certaine région et qui reste maintenue par toutes les transformations de  $G$  qui laissent invariant le point  $P_1$ . Si nous nous rappelons alors qu'après fixation de  $P_1$ , les  $\infty^3$  éléments linéaires passant par  $P_1$

sont transformés par l'action d'un groupe projectif réel  $\mathfrak{g}$ , nous reconnaissons donc immédiatement que ce groupe  $\mathfrak{g}$  est semblable au groupe  $G_1$ , par lequel les points de  $K_1$  sont transformés en même temps, et pour préciser, que  $\mathfrak{g}$  est semblable à  $G_1$  *via* une transformation ponctuelle réelle de  $R_3$ . Mais comme  $G_1$  était de son côté semblable, *via* une transformation ponctuelle réelle de  $R_3$ , soit au groupe des mouvements euclidiens, soit à l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens de cet espace, il en découle donc, en tenant compte du Théorème 19, p. 292, que  $\mathfrak{g}$  est à six paramètres et qu'il peut être transformé au moyen d'une transformation projective réelle en l'un des trois groupes de mouvements mentionnés.

*Ainsi, notre groupe  $G$  à dix paramètres est constitué de telle sorte qu'après fixation d'un point réel en position générale, les  $\infty^3$  éléments linéaires réels passant par ce point sont transformés par l'action d'un groupe à six paramètres, et pour préciser, d'un groupe euclidien ou non-euclidien.*

Si les éléments linéaires en question sont transformés par l'action d'un groupe euclidien, alors, en même temps que chaque point réel en position générale, une botte [Bündel] réelle de  $\infty^2$  éléments linéaires passant par un tel point reste invariante, donc  $G$  laisse invariante une équation de Pfaff réelle :

$$(15) \quad \sum_1^4 \alpha_\nu(x_1 \dots x_4) dx_\nu = 0,$$

qui ne doit naturellement pas être intégrable, parce que sinon  $G$  serait réel-imprimitif. Mais maintenant, il est connu d'après la théorie du problème de Pfaff, qu'à toute équation de Pfaff non intégrable à quatre variables est associée un système invariant simultané. Ce système simultané, qui est également réel pour l'équation réelle (15), devrait naturellement rester invariant par  $G$ , donc dans ce cas  $G$  devrait être réel-imprimitif ; par conséquent, le cas où les  $\infty^3$  éléments linéaires passant par un point réel fixé sont transformés de manière euclidienne n'entre généralement pas en ligne de compte.

D'un autre côté, si les éléments linéaires en question se transforment de manière non-euclidienne, alors à chaque point réel en position générale et associée une conique du second degré réelle ou imaginaire constituée d'éléments linéaires, qui, par un choix approprié des variables, reçoit ou bien la forme :

$$(16) \quad dx_1^2 + \dots + dx_4^2 = 0,$$



ou bien la forme :

$$(17) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = 0.$$

Maintenant, puisque  $G$  a dix paramètres et que les éléments linéaires passant par chaque point réel fixé se transforment par l'action d'un groupe à six paramètres, on obtient grâce aux développements des pages 385 sq., que  $G$  peut être transformé *via* une transformation ponctuelle réelle de  $R_4$  soit en le groupe des mouvements euclidiens, soit en l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens — ces cas sont possibles, lorsque la forme (16) se produit —, ou bien qu'il est semblable, *via* une transformation ponctuelle réelle de  $R_4$  soit au groupe projectif d'une des deux variétés :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \pm 1,$$

soit au groupe :

$$p_1 \dots p_4, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad x_\mu p_4 + x_4 p_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

— ces cas correspondent à la forme (17).

Mais les trois derniers groupes n'entrent pas du tout en ligne de compte, car pour chacun d'entre eux, il y a visiblement, parmi les pseudosphères ayant un centre donné, toujours une pseudosphère qui passe par son centre. *Par conséquent, il ne reste plus que les mouvements euclidiens et non-euclidiens, et on a donc démontré que ces trois familles de mouvements de  $R_4$  sont complètement caractérisées par les axiomes indiqués à la page 307.*

À présent, nous voulons indiquer de quelle manière ces considérations se réalisent pour les espaces de dimension supérieure à quatre.

Dans  $R_n$  ( $n > 2$ ) nous demandons pareillement que l'espace soit une variété numérique et que les mouvements forment un groupe continu engendré par des transformations infinitésimales. Si un point réel :  $y_1^0 \dots y_n^0$  en position générale est fixé, alors tout autre point réel :  $x_1^0 \dots x_n^0$  peut être envoyé encore seulement sur les points réels :  $x_1 \dots x_n$  qui satisfont une certaine équation :

$$W(y_1^0 \dots y_n^0; x_1^0 \dots x_n^0; x_1 \dots x_n) = 0.$$

Avec cela, nous supposons que cette équation représente en général une variété réelle ( $n - 1$ ) fois étendue, et qu'elle n'est pas satisfaite pour :  $x_1 = y_1^0, \dots, x_n = y_n^0$ .

La variété réelle passant par le point :  $x_1^0 \dots x_n^0$  qui est déterminée par l'équation :  $W = 0$ , nous l'appelons bien sûr une pseudosphère

de centre :  $y_1^0 \dots y_n^0$ . Notre dernière exigence exprime alors visiblement qu'une pseudosphère ne peut jamais passer par son centre.

Enfin, nous demandons encore que dans  $R_n$ , puisse être délimitée une région finie  $n$  fois étendue, à l'intérieur de laquelle les exigences suivantes soient satisfaites : Si l'on fixe un point  $P_1$  de la région, alors tout autre point de la région doit pouvoir se mouvoir d'une manière entièrement libre sur la pseudosphère de centre  $P_1$  passant par lui. Si l'on fixe  $q$  points  $P_1 \dots P_q$  de la région qui sont mutuellement en position générale, alors, tant que  $q$  est  $< n - 1$ , chaque autre point en position générale appartenant à la région doit pouvoir se mouvoir d'une manière entièrement libre sur la variété passant par  $P$  qui est l'intersection des  $q$  pseudosphères de centres  $P_1 \dots P_q$ .

Nous affirmons que ces exigences suffisent pour caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens. Mais nous voulons seulement indiquer la démonstration de cette assertion.

Nous supposons que notre assertion est déjà démontrée pour l'espace à  $n - 1$  dimensions et nous démontrons, en prenant cette hypothèse pour base, que notre assertion est vraie aussi pour pour l'espace à  $n$  dimensions. Comme nous avons l'avons déjà démontrée dans les cas  $n = 3$  et  $n = 4$ , sa validité en général sera alors établie.

Mais pour démontrer que notre assertion est vraie dans  $R_n$ , aussitôt qu'elle l'est dans  $R_{n-1}$ , nous procédons comme dans le cas  $n = 4$ . Nous montrons que chaque groupe  $G$  qui satisfait nos axiomes est transitif et que relativement à lui, deux points finiment éloignés l'un de l'autre ont un et un seul invariant ; de plus, chaque groupe tel est fini, réel-primitif, et il contient au plus  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres. Si à présent nous fixons un point réel  $P_1$  en position générale, alors on obtient facilement que les points de chaque pseudosphère de centre  $P_1$  généralement située sont transformés par un groupe qui satisfait tous les axiomes dans  $R_{n-1}$ , et par conséquent, grâce à l'hypothèse prise pour base, ce groupe peut être transformé, *via* une transformation ponctuelle de  $R_{n-1}$ , soit en le groupe des mouvements euclidiens, soit en l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens de cet espace.

Il découle de là tout d'abord que  $G$  contient précisément  $\frac{1}{2}n(n+1)$  paramètres. De plus, exactement comme dans le cas  $n = 4$ , on peut démontrer que deux points de  $R_n$  déterminent une pseudodroite. Pour cela, on peut se baser sur les recherches de Monsieur Werner, qui, à l'initiative de Lie, a déterminé les plus grands sous-groupes qui sont contenus dans le groupe projectif d'une variété non-dégénérée du second degré dans l'espace à  $n > 5$  dimensions.

Après que l'existence des pseudodroites est connue, on montre à nouveau, exactement comme dans le cas  $n = 4$ , que les  $\infty^{n-1}$  éléments linéaires réels passant par chaque point réel fixé en position générale sont transformés par  $G$  de manière euclidienne ou non-euclidienne. Enfin, on démontre facilement qu'ils ne peuvent certainement pas être transformés de manière euclidienne, et grâce à la considération des cas restants, on obtient que  $G$  peut être transformé, *via* une transformation ponctuelle réelle de  $R_n$ , soit en le groupe des mouvements euclidiens, soit en l'un des deux groupes de mouvements non-euclidiens de  $R_n$ .

Nous voulons terminer le présent chapitre en rectifiant une petite erreur qui s'est glissée aux pages 229 sq. À cet endroit-là, nous avons en effet dit que le troisième axiome de Monsieur de Helmholtz est constitué de deux parties, dont la seconde contient certaines exigences qui ne découlent pas de celles qui sont posées dans la première, bien que, d'après sa version, cette seconde partie semble contenir seulement des conséquences de la première. Mais en fait, les choses se passent tout autrement. *Si en effet on comprend ce que nous avons appelé à ce moment-là la première partie du troisième axiome helmholtzien* de telle sorte que, quand un point  $P_1$  est fixé, chaque autre point doit pouvoir se mouvoir d'une manière entièrement libre sur la pseudosphère de centre  $P_1$  qui passe par lui, et si l'on en tire la conclusion qu'une pseudosphère ne peut jamais passer par son centre, alors à vrai dire, ce que nous avons appelé la seconde partie du troisième axiome helmholtzien ne contient rien qui ne découle pas déjà de la première partie ; cela est montré par des considérations similaires à celles que nous avons développées dans le présent chapitre, et par exemple, dans  $R_3$ , afin de démontrer que trois pseudosphères dont les centres sont mutuellement en position générale se coupent généralement en un seul point. Et maintenant, puisqu'au cours de notre recherche sur les axiomes helmholtziens, nous avons toujours interprété cela de telle sorte qu'une pseudosphère ne doit pas passer par son centre (*cf.* p. 253), notre division en deux parties du troisième axiome effectuée aux pages 229 sq. est erronée. À vrai dire, il reste toujours des chances que Monsieur de Helmholtz ait proposé les conséquences qu'il tire de son troisième axiome, sans les justifier, bien que leur justification ne soit pas du tout aussi simple que cela.



## Bibliographie

- [1] Ackerman, M. ; Hermann, R. : *Sophus Lie's 1880 Transformation Group paper*, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975.
- [2] Amaldi, U. : *Contributo alla determinazione dei gruppi finiti dello spazio ordinario*, Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane, I : **39** (1901), 273–316 ;
- [3] Amaldi, U. : *Contributo alla determinazione dei gruppi finiti dello spazio ordinario*, Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane, II : **40** (1902), 105–141.
- [4] Arnol'd, V.I. : *Dynamical systems. I. Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*, Translated from the Russian. Edited by D. V. Anosov and V. I. Arnol'd. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 1. Springer-Verlag, Berlin, 1988. x+233 pp.
- [5] Awane, A. ; Goze, M. : *Pfaffian systems, k-symplectic systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, xiv+240 pp.
- [6] Bao, D. ; Chern, S.-S. ; Shen, Z. : *An introduction to Riemann-Finsler geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 200. Springer-Verlag, New York, 2000. xx+431 pp.
- [7] Barthes, R. : *La préparation du romain, I et II, Cours et séminaires au Collège de France (1978–1979 et 1979–1980)*, texte établi, annoté et présenté par Nathalie Léger, Seuil, Paris, 2003, 478 pp.
- [8] Bell, E.T. : *Les grands mathématiciens*, traduit de l'anglais et préfacé par A. Gandillon, Payot, Paris, 1939.
- [9] Bianchi, L. : *Lezioni sulla teoria dei gruppi finiti di trasformazioni*, Enrico Spoerri Editore, Pisa, 1918.
- [10] Bierman, K.-R. : *Carl Friedrich Gauß. Der "Fürst der Mathematiker" in Briefen und Gesprächen*, C.H. Beck, München, 1990.
- [11] Bluman, G.W. ; Kumei, S. : *Symmetries and differential equations*, Applied mathematical sciences, 81, Springer-Verlag, Berlin, 1989, xiv+412 pp.
- [12] Bochnak, J. ; Coste, M. ; Roy, M.-F. : *Géométrie algébrique réelle*, *Ergenisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (3), 12. Springer-Verlag, Berlin, x+373 pp.
- [13] Boi, L. : *The influence of the Erlangen Program on Italian geometry, 1880–1890 : n-dimensional geometry in the works of D'Ovidio, Veronese, Segre and Fano*, *Arch. Internat. Hist. Sci.* **40** (1990), n° 124, 30–75.
- [14] Boi, L. : *L'espace : concept abstrait et/ou physique ; la géométrie entre formalisation mathématique et étude de la nature*, pp. 65–90 in [18].
- [15] Boi, L. : *Mannigfaltigkeit und Gruppenbegriff. Zu den Veränderungen der Geometrie im 19. Jahrhundert*, *Math. Semesterber.* **41** (1994), n° 1, 1–16.
- [16] Boi, L. : *Le concept de variété et la nouvelle géométrie de l'espace dans la pensée de Bernhard Riemann : l'émergence d'une nouvelle vision des mathématiques et de ses rapports avec les sciences fondamentales*, *Arch. Internat. Hist. Sci.* **45** (1995), n° 134, 82–128.
- [17] Boi, L. : *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*. Préfacé par René Thom. Springer-Verlag, Berlin, 1995, xxiv+526 pp.

- [18] Boi, L.; Flament, D.; Salanskis, J.-M. (eds.) : *1830–1930 : A century of geometry, Epistemology, history, mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+304 pp.
- [19] Bólyai, J. : *Appendix*, Lipsiae, B.G. Teubner, 1903, 40 pp.
- [20] Brechenmacher, F. : *Les matrices : formes de représentations et pratiques opératoires (1850–1930)*, Site expert des Écoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Éducation Nationale, décembre 2006, 65 pp. [www.dma.ens.fr/~culturemath/](http://www.dma.ens.fr/~culturemath/)
- [21] Bryant, R.L.; Chern, S.S.; Gardner, R.B.; Goldschmidt, H.L.; Griffiths, P.A. : *Exterior differential systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 18, Springer-Verlag, New York, 1991, viii+475 pp.
- [22] Campbell, J.E. : *Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups*, The Clarendon Press, Oxford, 1903.
- [23] Cartan, É. : *Sur les variétés à connexion projective*, Bull. Soc. Math. France **52** (1924), 205–241.
- [24] Cartan, É. : *Les problèmes d'équivalence* (Séminaire de Math., 4<sup>e</sup> année, 1936–37), Œuvres complètes, II, 1311–1334, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [25] Cartan, É. : *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, deuxième édition revue et augmentée, 1951.
- [26] Caveing, M. : *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2004, 286 pp.
- [27] Châtelet, G. : *Les enjeux du mobile*, Paris, Le Seuil, 1993.
- [28] Chern, S.-S. : *Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic restriction*, Notices of the Amer. Math. Soc. **43** (1996), n° 9, 959–963.
- [29] Chirka, E.M. : *Complex analytic sets*, Mathematics and its applications (Soviet Series), **46**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. xx+372 pp.
- [30] Chorlay, R. : *Mathématiques globales : l'émergence du couple local/global dans les théories géométriques (1851–1953)*, préface de C. Houzel, à paraître dans la collection « Sciences dans l'Histoire », Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris, 2009.
- [31] Clifford, W.K. : *The postulate of science of space*, 1873; reproduit dans [122], pp. 552–567.
- [32] Clifford, W.K. : *On the hypotheses which lie at the bases of geometry*, pp. 55–69 in *Mathematical papers*, MacMillan, London, 1882.
- [33] Darrigol, O. : *Numbers and measure : Hermann von Helmholtz at the crossroads of mathematics, physics, and psychology*, Stud. Hist. Phil. Sci. **34** (2003), 515–573.
- [34] Darrigol, O. : *A Helmholtzian approach to space and time*, Stud. Hist. Phil. Sci. **38** (2007), 528–542.
- [35] Dedekind, R. : *Bernhard Riemann's Lebenslauf*, in [132], pp. 541–558.
- [36] Desanti, J.-T. : *Les idéalités mathématiques*, Paris, Le Seuil, 1968.
- [37] Do Carmo, M.P. : *Differential geometry of curves and surfaces*, Translated from the Portuguese, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976, viii+503 pp.
- [38] Do Carmo, M.P. : *Riemannian geometry*, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, Boston, 1992, xiv+300 pp.
- [39] Dombrowski, P. : *150 years after Gauss' « disquisitiones generales circa superficies curvas »*, Astérisque, vol. 62, Société mathématique de France, 1979.
- [40] Engel, F.; Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xii+638 pp. (1888). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

- [41] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, viii+559 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)
- [42] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Dritter und letzter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xxix+836 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)
- [43] van den Essen, A. : *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000, xviii+329 pp.
- [44] Escofier, J.-P. : *Galois theory*. Graduate Texts in Mathematics, 204. Springer-Verlag, New York, 2001. xiv+280 pp.
- [45] Farwell, R. ; Knee, C. : *The geometric challenge of Riemann and Clifford*, pp. 98–106 in [18].
- [46] Flament, D. : *La Lineale Ausdehnungslehre (1844) de Hermann Günther Grassmann*, pp. 205–221 in [18].
- [47] Flament, D. : *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, CNRS Éditions, Paris, 2003, 501 pp.
- [48] Flament, D. ; Kouneiher, J. ; Nabonnand, P. ; Szczeciniarz, J.-J. : *Géométrie au XX<sup>ème</sup> siècle, 1950–2000. Histoire et horizons*, Hermann Éditeurs, Paris, 2005, 424 pp.
- [49] Freudenthal, H. : *Riemann, Georg Friedrich Bernhard*, in *Dictionary of scientific biography*, vol. 11, New York, 447–456.
- [50] Freudenthal, H. : *Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems*, Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 374–405 (1956).
- [51] Freudenthal, H. : *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts*, Semesterberichte Münster 7 (1960/61), 2–25.
- [52] Freudenthal, H. : *The main trends in the foundations of geometry in the 19<sup>th</sup> century*, pp. 613–622 in Proceedings of the 1960 international congress for logic, methodology and philosophy of science, Stanford, California, Aug. 24–Sept. 2, 1960, Stanford Univ. Press.
- [53] Freudenthal, H. : *Lie groups in the foundations of geometry*, Advances in Mathematics 1 (1964), n° 2, 145–190.
- [54] Frobenius, G. : *Über das Pfaffsche Problem*, J. für die reine u. angew. Math. 82 (1877), 230–315 [Abhandlungen 1, 249–334].
- [55] Galois, É. : *Œuvres mathématiques*, publiées sous les auspices de la Société Mathématique de France, Gauthier-Villars, Paris, 1897. Deuxième édition revue et corrigée, 1951.
- [56] Gardner, R.B. : *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 58 (SIAM, Philadelphia, 1989), 127 pp.
- [57] Gauss, C.F. : *Anzeige : Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gött. Gel. Anz. (1827), 1761–68. Werke IV, 341–47.
- [58] Gauss, C.F. : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentatio societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6 (1828); Werke, vol. 4, pp. 217–258. Traduction en français par M.E. Roger, Albert Blanchard, Paris, 1967. Reprinted, translated in English and commented in [39].
- [59] Gauss, C.F. : *Werke*, 14 vols., B.G. Teubner, Leipzig, 1863–1933. Reprinted in 12 vols., Hildesheim, Olms, 1981.
- [60] Golubitski, M. : *Primitive actions and maximal subgroups of Lie groups*, J. Differential Geom. 7 (1972), 175–191.
- [61] González López, A. ; Kamran, N. ; Olver, P.J. : *Lie algebras of vector fields in the real plane*, Proc. London Math. Soc. 64 (1992), n° 2, 339–368.

- [62] Gorbatsevich, V.V. ; Onishchik, A.L. ; Vinberg, E.B. : *Foundations of Lie theory and Lie transformation groups*, Encyclopædia of mathematical sciences, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [63] Goze, M. ; Khakimjanov, Y. : *Nilpotent Lie algebras*, Mathematics and its Applications, 361, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996, xvi+336 pp.
- [64] Grassmann, H.G. : *La science de la grandeur extensive, La Lineale Ausdehnungslehre*. Traduit de l'allemand par Dominique Flament et Bernd Bekemeier, avec une préface de Flament. Collection Sciences dans l'Histoire. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1994. 52+xvi+206+xlvi pp.
- [65] Gray, J. : *On the history of the Riemann mapping theorem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 34 (1994), 47–94.
- [66] Gröbner, W. : *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, Math. Monog. Veb Deutschen Verlag der Wissenschaften, 1960.
- [67] Gunning, R. : *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, 3 vol., Wadsworth & Brooks/Cole, I : Function theory, xx+203 pp., II : Local theory, +218 pp, III : Homological theory, +194 pp., 1990.
- [68] Hawkins, T. : *Emergence of the theory of Lie groups, An essay in the history of mathematics 1869–1926*, Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences, Springer-Verlag, Berlin, 2001, xiii+564 pp.
- [69] Hawkins, T. : *Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff*, Arch. Hist. Exact Sci. **59** (2005), 381–436.
- [70] Heinzmann, G. : *Helmholtz and Poincaré's considerations on the genesis of geometry*, pp. 245–249 in [18].
- [71] Heinzmann, G. : *The foundations of geometry and the concept of motion : Helmholtz and Poincaré*, Science in Context **14** (2001), 457–470.
- [72] Helmholtz, H. von : *Über die Thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, in Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. II, pp. 610–617.
- [73] Helmholtz, H. von : *Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen*, Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, n° 9, 3 June 1868. Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. II, pp. 618–639. English translation in [76], pp. 39–58.
- [74] Helmholtz, H. von : *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrische Axiome*, in Vorträge und Reden, vol. II, pp. 1–31. English translation in [76], pp. 1–26.
- [75] Helmholtz, H. von : *Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet*, Philosophische Aufsätze Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet, Leipzig, Fues Verlag, 1887, pp. 17–52. English translation in [76], pp. 72–103.
- [76] Helmholtz, H. von : *Epistemological writings*, The Paul Hertz/Moritz Schlick centenary edition of 1921 with notes and commentary by the editors M.F. Lowe, S. Cohen and Y. Elkana, Boston studies in the philosophy of science, Reidel, Dordrecht, 1977, xxxvii+205 pp.
- [77] Herbart, J.F. : *Über philosophisches Studien*, pp. 227–296 in Sammtliche Werke in chronologischer Reihenfolge, herausgegeben von Karl Kehrbach und Otto Flügel, Erstdruck Langensalza 1899–1912, 19 vols. ; Scientia Verlag, Aalen, 1964.
- [78] Hilbert, D. : *Grundlagen der Geometrie*, B.G. Teubner, Leipzig, 1899.
- [79] Hitchin, N. : *Projective geometry, lecture notes*, 2003, [www2.maths.ox.ac.uk/~hitchin/](http://www2.maths.ox.ac.uk/~hitchin/)
- [80] Houzel, C. : *La géométrie algébrique. Recherches historiques*. Préface de Roshdi Rashed, Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris, 2002, v+365 pp.
- [81] Jordan, C. : *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870. Nouveau tirage. Paris : Librairie Scientifique & Technique Albert Blanchard XVIII, 667 pp., 1957.
- [82] Kant, I. : *Critique de la raison pure*, trad. en français par A. Tremesaygues et B. Pacaud, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.



- [83] Killing, W. : *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Vierter Theil*, Math. Ann. **36** (1890), 161–189.
- [84] Klein, F. : *Zur nicht-Euklidischen Geometrie*, in Gesammelte mathematische Abhandlungen (3 vols., 1921–1923), Vol. 1, pp. 352–383.
- [85] Klein, F. : *Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik*, in Ges. Math. Abh., Bd. 3, Berlin, J. Springer, IX u. 774 u. 36 S., 1923.
- [86] Klein, F. : *Le Programme d'Erlangen : considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, traduit par H.E. Padé ; préface de J. Dieudonné ; postface du P.F. Russo, Paris, Gauthier-Villars, 1974
- [87] Kobayashi, S. : *Transformation groups in differential geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1972.
- [88] Kobayashi, S. ; Nomizu, K. : *Foundations of differential geometry*, I, Interscience publishers, John Wiley & Sons, New York, 1963. xi+329 pp.
- [89] Krantz, S.G. : *Function theory of several complex variables*, Second Edition, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Pacific Grove, CA, 1992, xvi+557 pp.
- [90] Kreyszig, E. : *On surface theory in  $E^3$  and generalizations*, Expo. Math. **12** (1994), 97–123.
- [91] Lafontaine, J. : *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, EDP Sciences, 1996, 299 pp.
- [92] Lang, S. : *Real analysis*. Second edition, Addison-Wesley, xv+533 pp, 1983.
- [93] Laugwitz, D. : *Bernhard Riemann, 1826–1866. Turning points in the conception of mathematics*, traduit en anglais par Abe Shenitzer, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [94] Lautman, A. : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, présentation de Jacques Lautman, étude de Fernando Zalamea, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2006, 315 pp.
- [95] Legendre, A.-M. : *Eléments de géométrie*, Firmin Didot, Paris, 1817.
- [96] Lie, S. : *Über Gruppen von Transformationen*, Göttinger Nachrichten 1874 (1874), 529–542. Reprinted in *Abhandlungen* **5**, 1–8 [3 December 1874].
- [97] Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen III. Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit*, Archiv for Mathematik **3** (1878), 93–128. Reprinted in *Abhandlungen* **5**, 78–133.
- [98] Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528 ; translated in English and commented in [1].
- [99] Lie, S. : *Bemerkungen zu v. Helmholtz's Arbeit : Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Leipz. Ber. 1886, Supplement, abgeliefert 21. 2. 1887, S. 337–342. Vorgelegt in der Sitzung vom 25. 10. 1886. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 374–379.
- [100] Lie, S. : *Über die Grundlagen der Geometrie. I. Abhandlung*. Leipz. Ber. 1890, Heft II, abgeliefert 5. 11. 1890, S. 284–321. Vorgelegt in der Sitzung vom 7. 7. 1890. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 380–413.
- [101] Lie, S. : *Über die Grundlagen der Geometrie. II. Abhandlung*. Leipz. Ber. 1890, Heft III, abgeliefert 26. 2. 1891, S. 355–418. Vorgelegt in der Sitzung vom 20. 10. 1890. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 414–468.
- [102] Lie, S. : *Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie*, Leipz. Ber. 1892, Heft I, abgeliefert 27. 4. 1892, S. 106–114. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. 2. 1892.
- [103] Lie, S. : *Sur les fondements de la géométrie*, Comptes Rendus de l'Académie de Paris **114** (1892), 461–463. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 477–479.
- [104] Lie, S. : *Gesammelte Abhandlungen, Band 2, Teil 1*, Herausgegeben von Friedrich Engel und Poul Heegaard, Geometrische Abhandlungen, Abteilung 2, Teil 1, Leipzig : B. G. Teubner, Oslo : H. Aschehoug & Co. VIII, 479 S, 1935.

- [105] Lobachevskiĭ, N.I. : *Geometrical researches on the theory of parallels*, translated in English by G.B. Halsted, Chicago, Open court publishing company, 1914, 50 pp.
- [106] Malgrange, B. : *Ideals of Differentiable Functions*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No.3, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Oxford University Press, London, 1967, vii+106 pp.
- [107] Merker, J. : *On the local geometry of generic submanifolds of  $\mathbb{C}^n$  and the analytic reflection principle*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) **125** (2005), n° 6, 751–824.
- [108] Merker, J. : *Sur la philosophie des mathématiques de Wittgenstein*, 38 pages, arxiv.org/abs/0801/
- [109] Merker, J. : *Lie symmetries and CR geometry*, 118 pp, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), to appear (2009).
- [110] Merker, J. : *Lie algebras of holomorphic vector fields in dimensions 1, 2 and 3*, evolving version downloadable at [www.dma.ens.fr/~merker/](http://www.dma.ens.fr/~merker/)
- [111] Merker, J. : *Sophus Lie and Friedrich Engel's Theory of Transformation Groups (Vol. I, 1888). Modern Presentation and English Translation*, 650 page, arxiv.org/abs/1003.3202, submitted to Springer-Verlag, Berlin.
- [112] Milnor, J. : *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies, 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, Third Edition, 2006, viii+304 pp.
- [113] Montgomery, D. ; Ziping, L. : *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York-London, 1955. xi+282 pp.
- [114] Nabonnand, P. : *La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie*, Rev. Histoire Math. **6** (2000), n° 2, 219–269.
- [115] Nabonnand, P. : *Cartan et les connexions*, Textes des journées d'études des 17 et 18 mars 2005, *Fibrés, fibrations et connexions*, Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 2005, 1–33.
- [116] Nabonnand, P. : *La théorie des "Würfe" de von Staudt — une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure*, Arch. Hist. Exact Sci. **62** (2008), n° 3, 201–242.
- [117] Neuenschwander, E. *Lettres de Bernhard Riemann à sa famille*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, **2** pp. 85–131, Inst. Henri Poincaré, Paris, 1981.
- [118] Neuenschwander, E. : *über die Wechselwirkungen zwischen der französischen Schule, Riemann und Weierstraß. Eine Übersicht mit zwei Quellenstudien*, Archive for History of Exact Sciences **24** (1981), 221–255. English translation in Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), 87–105.
- [119] Neuenschwander, E. *A brief report on a number of recently discovered sets of notes on Riemann's lectures and on the transmission of the Rieamnn Nachlass*, Historia Mathematica **15** (1988), 101–113 ; also in [134], pp. 855–867.
- [120] Neuenschwander, E. : *Documenting Riemann's impact on the theory of complex functions*, Math. Intelligencer **20** (1998), n° 3, 19–26.
- [121] Neuenschwander, E. ; Burman, H.-W. : *Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Göttingen*, Die Geschichte der Verfassung und der Fachbereiche der Georg-August-Universität zu Göttingen, 141–159, Göttinger Universitätsschr. Ser. A Schr., 16, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1994.
- [122] Newman, J.R. : *The world of mathematics*, vol. 1, New York, Simon & Schuster, 1956.
- [123] Nowak, G. : *Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic a priori status of geometry*, The history of modern mathematics, Vol. I (Poughkeepsie, NY, 1989), 17–46, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [124] Olver, P.J. : *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, 107, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986, xxvi+497 pp.
- [125] Olver, P.J. : *Equivalence, Invariance and Symmetries*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.

- [126] Pasch, M. : *Vorlesungen über neuere Geometrie*, B.G. Teubner Leipzig, 1882.
- [127] Petitot, J. : *Refaire le Timée. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman*, Rev. Histoire Sci. **40** (1987), no. 1, 79–115.
- [128] Portnoy, E. : *Riemann's contribution to differential geometry*, *Historia Mathematica* **9** (1982), 1–18.
- [129] Reich, K. : *Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828–1868)*, Arch. History Exact Sci. **11** (1973/74), 273–382.
- [130] Riemann, B. : *Sur la psychologie et la métaphysique*, traduit en français dans : *Fusion*, n° 92, septembre-octobre 2002.
- [131] Remmert, R. : *The Riemann-file Nr. 135 of the Philosophische Fakultät of the Georgia Augusta at Göttingen*, *Math. Intelligencer* **15** (1993), n° 3, 44–48.
- [132] Riemann, B. : *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, édité avec l'aide de R. Dedekind et H. Weber, Leipzig, Teubner, 1876 ; 2<sup>ème</sup> édition par H. Weber, 1892.
- [133] Riemann, B. : *Œuvres mathématiques*, traduites en français par L. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1898. Réédition J. Gabay, Paris, 1990.
- [134] Riemann, B. : *Gesammelte mathematische werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind, neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan, Springer-Verlag, Berlin & Teubner, Leipzig, 1990, vi+911 pp.
- [135] Rosenfeld, B.A. : *A history of noneuclidian geometry. Evolution of the concept of a geometric space*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, ix+471 pp.
- [136] Rowe, D.E. : *Episodes in the Berlin-Göttingen rivalry, 1870–1930*, *Math. Intelligencer* **22** (2000), n° 1, 60–69.
- [137] Russell, B. : *An essay on the foundations of (modern) geometry*. With a foreword by Morris Kline, Dover Phoenix Editions, Mineola, 1956.
- [138] Samuel, P. : *Projective geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1988, ix+156 pp.
- [139] Schering, E. : *Zum Gedächtniss an B. Riemann*, *Nachr. v. d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1866, S. 339 ; in [134], pp. 828–847.
- [140] Scholz, E. : *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980. 430 pp.
- [141] Scholz, E. : *Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie*, Arch. Hist. Exact Sci. **27** (1982), n° 3, 213–232.
- [142] Scholz, E. : *Herbart's influence on Bernhard Riemann*, *Historia Mathematica* **9** (1982), 413–440.
- [143] Scholz, E. : *Riemann's vision of a new approach to geometry*, pp. 22–34 in [18].
- [144] Scholz, E. : *The concept of manifold, 1850–1950*, *History of topology*, 25–64, North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [145] Scholz, E. : *C.F. Gauss' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren*, In : Folkerts, M. e.a. (eds.) *Form, Zahl, Ordnung ...* Stuttgart : Steiner (2004), 355–380 ; [arxiv.org/abs/math.HO/0409578/](https://arxiv.org/abs/math.HO/0409578/)
- [146] Scholz, E. : *Curved spaces : Mathematics and empirical evidence, ca. 1830 – 1923*. *Oberwolfach Reports* 2 (4), 2006, 3195–3198.
- [147] Scholz, E. : *Another look at Miller's myth*, to appear in *Philosophia Scientiae*.
- [148] Sharpe, R.W. : *Differential Geometry. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, xix+421 pp.
- [149] Siegel, C.L. : *Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B : Studien, Bd. 2, 45–80 ; *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 1, 275–310.

- [150] Sinaceur, M.-A. : *Dedekind et le programme de Riemann*, Rev. d'Histoire Sci. **43** (1990), n° 2-3, 221–235. Suivi de la traduction de 'Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemanns Abhandlungen über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen', par R. Dedekind, *ibidem*, 236–296.
- [151] Smadja, I. : *Essai sur la notion de schématisation en arithmétique*, Thèse de doctorat, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne, juin 2002, 553 pp.
- [152] Smadja, I. : *Équations aux dérivées partielles et philosophie naturelle. Remarques sur l'héritage herbartien de Bernhard Riemann*. Ars Experientiam Recte Intelligenti. Saggi filosofici. Polimetrica, Milan, 2004.
- [153] Speiser, A. : *Naturphilosophische Untersuchungen von Euler bis Riemann*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **157** (1927), 105–114.
- [154] Spivak, M. : *Differential geometry*, volumes one and two, Brandeis university, 1970.
- [155] Stäckel, P. : *Gauß als Geometer*, vol X [59], pp. 1–123.
- [156] Sternberg, S. : *Lectures in differential geometry*, Second edition, Chelsea publishing co., New York, 1983, xviii+442 pp.
- [157] Stormark, O. : *Lie's structural approach to PDE systems*, Encyclopædia of mathematics and its applications, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, xv+572 pp.
- [158] Stubhaug, A. : *The mathematician Sophus Lie*, Spinger-Verlag, Berlin, 2000, xi+555 pp.
- [159] Szczeciniarz, J.-J. : *Copernic et la révolution copernicienne*, Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, Paris, 1998, 438 pp.
- [160] Szczeciniarz, J.-J. : *Le phénomène Hartogs*, pp. 39–58.
- [161] Szczeciniarz, J.-J. : *L'Un et le Multiple : réflexions sur le passage en plusieurs variables complexes*, Paris, Hermann, pp. 269–286.
- [162] Szczeciniarz, J.-J. : *La Terre immobile. Ptolémée, Husserl*, préface de Thibault Damour, Paris Presses universitaires de France, 2003 xii+418 pp.
- [163] de Tannenberg, W. ; Vessiot, E. : *Compte Rendu et analyse de [40]*, Bull. Sci. Math., 2<sup>e</sup> série, **13** (1889), 113–148.
- [164] Tazzioli, R. : *Riemann, le géomètre de la nature*, Les génies de la science, n° 12, Pour la Science, numéro spécial, août-novembre 2002.
- [165] Thiele, R. : *Mathematics in Göttingen (1737–1866)*, Math. Intelligencer **16** (1994), n° 4, 50–60.
- [166] Torreti, R. : *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*, (2nd ed.), Reidel, Dordrecht, 1984.
- [167] Valibouze, A. : *Sur les relations entre les racines d'un polynôme*, Acta Arithmetica **131** (2008), n° 1, 1–27.
- [168] Vuillemin, J. : *La philosophie de l'algèbre*, Presses Universitaires de France, Collection Épiméthée, Paris, 1962.
- [169] Walsh, J.L. : *History of the Riemann mapping theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 270–276.
- [170] Weyl, H. : *Vorwort des Herausgebers. Erläuterungen*. in : [134], pp. 740–768.
- [171] Weyl, H. : *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie* (écrit en 1925), Herausg. von K. Chandrasekharan, Springer, 1988.

## Quatrième de couverture :

Sophus Lie, Friedrich Engel  
et le problème de Riemann-Helmholtz

Est-il possible de caractériser l'espace euclidien tridimensionnel qui s'offre si immédiatement à l'intuition physique au moyen d'axiomes mathématiques simples et naturels ? Plus généralement, est-il possible de caractériser les espaces de Bolyai-Lobatchevskiï à courbure constante négative, ainsi que les espaces de Riemann à courbure constante positive, à l'exclusion de toute autre géométrie contraire à une intuition directe ?

À une époque (1830–50) où l'émergence nécessaire des géométries dites non-euclidiennes devenait incontestable, c'est Riemann qui a soulevé cette question profonde et difficile dans son discours d'habilitation (1854), sans chercher, toutefois, à la résoudre complètement. Helmholtz (1868) l'interprétera en conceptualisant le mouvement des corps dans l'espace et il tentera d'établir rigoureusement que le caractère métrique et localement homogène d'un espace se déduit d'axiomes de mobilité maximale pour des corps rigides.

Mais il fallut attendre les travaux de Sophus Lie, et notamment la *Theorie der Transformationsgruppen* (2100 pages, 1888–93) écrite en collaboration avec Friedrich Engel, pour qu'une solution complète et rigoureuse soit apportée à ce fascinant problème, à la fois au plan local et au plan global. L'introduction historique, philosophique et mathématique ainsi que la traduction que nous proposons ici aspirent à faire connaître un aspect de l'œuvre monumentale de Sophus Lie qui demeure essentiellement peu évoqué au sein de la philosophie traditionnelle de la géométrie.

**Joël Merker**, agrégé de mathématiques et de philosophie, spécialiste d'analyse et de géométrie à plusieurs variables réelles ou complexes, chercheur au CNRS - Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure.