PROGRAMMES DE RECHERCHE

WWW.DMA.ENS.FR/∼MERKER/CANDIDATURE.HTML

JOËL MERKER

RÉSUMÉ. Ces programmes de recherche énoncent une cinquantaine de problèmes ouverts distribués dans cinq domaines d'activité : 1) théorie algébrique des invariants ; 2) courbes entières en géométrie algébrique complexe ; 3) symétries de Lie, systèmes différentiels extérieurs et connexions de Cartan ; 4) géométrie CR locale ; 5) histoire et philosophie des mathématiques.

Table des matières

§1. Théorie algébrique des invariants

> On doit toujours s'embarquer dans une œuvre comme un corsaire dans son navire, avec l'intention d'y faire fortune, des provisions pour vingt campagnes, et un courage intrépide.
>
> [Gustave FLAUBERT, *Lettre à Louise Colet*, 25-26 mars 1854]

Soit G un groupe de Lie agissant de manière linéaire, voire polynomiale, sur $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $x \in \mathbb{C}^n$. On se place ici dans le cas où tout est complexe, pour simplifier.

Soit $\mathbb{C}[x]^G$ l'algèbre des polynômes invariants, *i.e.* des polynômes $P \in \mathbb{C}[x]$ satisfaisant $P(g \cdot x) = P(x)$ pour tout $g \in G$.

Le 14ième problème de Hilbert consiste essentiellement à demander sous quelles conditions $\mathbb{C}[x]^G$ est engendrée, en tant qu'algèbre, par un nombre *fini* de polynômes invariants basiques. On dit alors que $\mathbb{C}[x]^G$ est de *type fini*.

Date: 4-10-2010.

C'est Nagata qui en 1958 a fourni le premier (contre-)exemple, en dimension $n = 32$, d'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x]^G$ qui est de type *infini*. Mais dans ce contre-exemple, on ne sait pas en fait décrire complètement la structure de l'algèbre en question : combien y a-t-il de « branches infinies d'invariants » ? Quelles sont les syzygies ? La série de Hilbert-Poincaré est-elle rationnelle ? Peu de résultats, en théorie des invariants, décrivent complètement les algèbres qui apparaissent.

Dans les années 2000, Van den Essen, Daigle-Freudenburg, Roberts, ont trouvé des (contre-)exemples plus élémentaires que celui de Nagata. Mais à nouveau, l'algèbre complète des invariants n'est pas étudiée en totalité. Je ne connais en fait qu'un seul article, celui du japonais Tanimoto qui a été publié à Transformation Groups en 2006 (cet article a dû lui coûter des années de travail), où une étude complète de la structure algébrique d'une algèbre d'invariants non finiment engendrée a été effectuée. Voici, à mon avis, une très belle direction de recherche ; elle est essentiellement non représentée en France.

Depuis 2000, suite à Van den Essen (*cf.* son livre sur la conjecture du jacobien chez Birkhäuser), s'est développée la théorie dite des dérivations localement nilpotentes. En 2006, G. Freudenburg a écrit un livre entièrement consacré à ce sujet (Springer, Encyclopaedia of Mathematical Sciences). Il s'agit d'opérateurs de dérivation $D = a_1(x)\,\partial_{x_1} + \cdots + a_n(x)\,\partial_{x_n}$ à coefficients polynomiaux dont une puissance assez haute annule tout polynôme donné à l'avance. Le groupe (additif, de dimension 1) de transformations polynomiales $\{\exp(tD)(x)\}$ engendré par l'exponentielle de D a une algèbre d'invariants qui s'identifie à l'algèbre $\mathbb{C}[x]^D$ des polynômes P annulés pas D, *i.e.* tels que $DP = 0$. Au cours de ces cinq dernières années, Kuroda a résolu le problème de savoir si, en petites dimensions 3, 4, 5, il existe des opérateurs D dont le noyau $\mathbb{C}[X]^D$ est (in)finiment engendré.

Problème 1. *Trouver des conditions suffisantes effectives qui prédisent dans quelles circonstances l'algèbre des polynômes annihilés par une dérivation localement nilpotente est de type fini ; trouver également d'autres conditions suffisantes qui prédisent quand elle est de type infini.*

Espérer une condition nécessaire et suffisante est probablement trop ambitieux. Freudenburg que j'ai contacté m'a affirmé dans un courriel que cette question était très signifiante. Car pour l'instant en vérité, on manque même de conditions suffisantes « basiques ». Le terrain n'est pas défriché.

Problème 2. *Édifier une théorie de type Van den Essen (avec "slices" et "preslices") pour des systèmes Frobenius-involutifs de $\nu \geqslant 1$ dérivations localement nilpotentes.*

PRINCIPE. Dans l'univers des groupes de Lie, les groupes de Lie simples complexes (Killing) ou réels (Cartan) sont complètement classifiés, en termes, par exemple de systèmes de racines et de diagrammes de Dynkin. Néanmoins, les groupes simples sont beaucoup moins nombreux que les groupes résolubles ou nilpotents, puisque ces derniers sont en nombre infini et ne peuvent pas être classifiés en totalité. Il apparaissent eux aussi très souvent dans la réalité mathématique.

Les groupes (semi-)simples sont réductifs. On a une très belle théorie des actions de groupes réductifs, et de leurs invariants algébriques, grâce, notamment, à l'opérateur de moyennisation, dit « de Reynolds », qui projette tout polynôme sur un polynôme invariant. Le beau livre de Derksen-Kemper (Springer, Encyclopædia of Mathematical Sciences, 2002) énonce les nombreux algorithmes d'engendrement d'invariants qu'on peut inventer dans le cadre réductif, en caractéristique quelconque d'ailleurs. Mais d'après le principe de prolifération des groupes résolubles et nilpotents, la théorie des invariants ne devrait pas se limiter aux groupes réductifs. Là encore, le terrain est très peu défriché.

Par ailleurs, il y a la fameuse controverse entre Hilbert et Gordan, analogue à celle, plus célèbre d'ailleurs, que Hilbert a eue avec Brouwer : trouver un algorithme qui est n'effectuable qu'« en principe », cela peut-il être considéré comme répondant entièrement à une question-mère ? Les arguments algébriques « abstraits » à la Dedekind ou à la Hilbert peuvent-ils être considérés comme entièrement satisfaisants ? Hilbert disait lui-même en 1900 qu'aucune question mathématique ne devrait, selon lui, pouvoir rester sans réponse, car toute question mathématique aboutit à terme, certes peut-être après des siècles de recherches, à une réponse complètement satisfaisante, fût-ce un théorème d'impossibilité, comme pour la quadrature du cercle. Force est d'admettre qu'en théorie des invariants, le constructivisme conceptuel de Gordan a finalement raison contre Hilbert, d'autant plus qu'à notre époque, nous disposons d'outils nous permettant de déléguer à des machines électroniques certaines tâches de calcul qui sont trop fastidieuses ou très répétitives.

Concluons donc que *de nombreuses questions ne sont pas complètement résolues par des arguments abstraits, ou par des algorithmes qui laissent dans l'ombre leur issue incertaine*. Sans prendre parti ni pour le formalisme, ni pour le constructivisme, sans même se placer, comme le fit Cavaillès, « au-dessus » des controverses philosophiques des années 1900–1940 concernant la possibilité de fonder les mathématiques sur quelque chose d'absolument sûr et certain, retenons l'objection « à la Kronecker » des intuitionnistes : chacun doit prendre conscience que certaines questions ne sont pas complètement résolues par tel ou tel type de théorème abstrait. L'une des capacités principales que l'on doit développer en mathématiques, c'est celle de découvrir les questions non résolues derrière des énoncés qui les donnent pour résolues.

De très nombreux théorèmes mathématiques n'offrent pas vraiment une réponse complète aux questions qu'ils sont censés traiter. C'est ma thèse philosophie principale :

Thèse. *Rémanence, permanence de l'inachevé dans ce qui se donne pour achevé.*

Cette thèse est simple, c'est une thèse de chercheur. D'ailleurs, qu'est-ce que la recherche ? Il est troublant de constater qu'une telle question philosophique, pourtant essentielle, n'est pour ainsi dire jamais abordée, discutée, étudiée, approfondie dans les réunions de pilotage et d'évaluation. Cette question est-elle trop complexe à notre échelle, que ce soit au niveau individuel, ou au niveau social ? Serions-nous incapables d'y répondre, sans que l'opinion, le désir d'influence, et la volonté de puissance ne l'emportent malgré nous ? Gromov, dans une interview que j'apprécie, soulève en substance ces mêmes questions.

Parlons par exemple des algorithmes en théorie des invariants. Récemment, j'ai mis au point un algorithme qui engendre tous les invariants de Demailly en dimension quelconque et pour des ordres de jets arbitraires. Ce fut un progrès notable par rapport à l'état du sujet, où l'on ignorait presque tout de la manière dont ces invariants pouvaient naître. Après étude plus approfondie de la littérature sur la théorie des invariants, il m'est apparu que déjà dans les travaux de Von Gall en 1880 sur les invariants des formes binaires de degré 7, quelque chose comme une réduction du problème à des invariants plus « petits » (analogues à ceux que j'appelle *bi-invariants*), existait déjà. À ma connaissance, les livres de Kraft-Procesi, Olver, Derksen-Kemper, Procesi ne mettent pas cet aspect en lumière, ni même d'ailleurs les articles de Dixmier sur le sujet. C'est l'ukrainien L. Bedratyuk qui m'a appris cela, dans ses articles récents sur `arxiv.org`. De plus, l'algorithme que j'ai mis au point et qui contredisait la conjecture « folklorique » d'après laquelle les crochets entre invariants de Demailly d'un niveau de jets donné suffiraient à engendrer tous les invariants de Demailly du niveau immédiatement supérieur ressemble fort à l'algorithme du noyau mis au point (pour des dérivations localement nilpotentes) par Van den Essen en 1999. Ai-je réduit l'action du groupe de reparamétrisation à l'action d'un groupe de dimension 1 ? Y a-t-il une analogie profonde entre l'algorithme de la méthode d'équivalence mis au point par Élie Cartan dans ses travaux des années 1900–1910, et une vaste théorie nouvelle et systématique des invariants algébriques ? Quelqu'un parviendra-t-il un jour à donner raison à Sophus Lie dans sa controverse contre E. Study, à savoir, parviendra-t-on un jour à ériger une théorie des invariants algébriques valables, au moins dans ses aspects potentiellement algorithmiques, pour toutes les actions de groupes de Lie, sans relocaliser en un point générique ? J'en rêve parfois.

Thèse. *En mathématiques, il y a des caractères démonstratifs universels, des noyaux durs de « réalité » et des « universaux » de la pensée. Chacun les rencontre au hasard sur son trajet de recherche. Seule une pensée spéculative rigoureuse est à même de redécouvrir ces « pépites », indépendamment et de manière purement autonome, aussi bien en s'«* enfonçant dans les calculs *» qu'en pratiquant un «* survol comparé et transhistorique de la littérature internationale *».*

Pour l'algèbre commutative contemporaine donc, elle qui se voit de mieux en mieux assistée par le calcul électronique sur ordinateur, Gordan avait néanmoins raison contre Hilbert. Sans rien enlever au mérite de Hilbert, celui d'avoir découvert un argument simple pour démontrer la finitude de très nombreuses algèbres d'invariants, à savoir lorsque le groupe est réductif, je défends l'idée suivante.

Thèse. *Ce n'est que dans le labyrinthe virtuel du calcul, incertain, long, problématique, cumulatif, pénible, difficile, délicat, que l'on peut espérer se confronter, avec un consentement sans réticence, à des faisceaux de questions nouvelles qui germeront en nous presque à notre insu, et progresser ainsi dans ce qui n'est autre que la* « réalité problématique » *des mathématiques.*

La réalité est problématique, n'en déplaise aux platoniciens, et cette problématicité fait aussi profondément partie de la réalité explorée, voilà ce que nous enseignerait déjà une (re)lecture avertie des travaux de Riemann. C'est en cela, et en cela surtout, que le philosophique imprègne toujours la pensée mathématique. Thèse ancienne, jamais fixée ni mise au point jusqu'à présent, thèse cruciale, et qui s'identifie en dernier recours à une tautologie de l'action mathématique.

Exprimons maintenant en quoi l'algorithme est par nature imprégné d'inachevé.

Thèse. *L'essence d'un algorithme reste purement potentielle. Fût-il démontré complet, puissant, efficace, programmable, l'algorithme n'explore que de manière insatisfaisante la réalité mathématique. Les questions suivantes demeureront toujours brûlantes pour nous qui vivons à une époque historique charnière où des théorèmes mathématiques de plus en plus nombreux seront démontrés par ordinateur : la pensée et l'intuition sont-elles nécessaires à la « compréhension » d'un résultat mathématique ? Quelle valeur conférer à l'exploration par ordinateur quand les structures sous-jacentes demeurent invisibles ?*

Énonçons aussi la thèse « métaphysique » englobante : toutes ces questions resteront toujours présentes de manière indélébile. En particulier, c'est parce qu'elles sont en partie aveugles que les bases de Gröbner s'avèrent si peu efficaces en pratique, par saturation d'une mémoire encombrée d'un désordre entropique. Même les bases de Gröbner les plus performantes qui existent actuellement, programmées par Jean-Charles Faugère, un élève de Daniel Lazard (algébriste-informaticien émérite à Paris 6 qui a travaillé notamment avec Jacques Dixmier dans les années 1980), bloquent assez rapidement. Ainsi, les spécialistes internationaux des bases de Gröbner (ceux qui raffinent et programment des algorithmes de plus en plus performants) en sont « réduits » à des applications de type « cryptographie », c'est-à-dire, ils en sont « réduits » à « jouer » avec des bases de données gigantesques et aléatoires, sans se consacrer à l'exploration d'une *réalité algébrique problématique et en devenir*. La pensée mathématique quant à elle structure, élague, compactifie, et cherche toujours à exprimer l'essentiel. En définitive, on en reste toujours pour l'instant, dans la recherche mathématique, à ces dialectiques, à ces hésitations, à ces limitations. Pour clore ce chapitre, formulons un exemple. Une question mathématique précise, telle que par exemple : *décrire l'algèbre des invariants de Demailly pour les jets d'ordre 5 en dimension 5* (voir ci-dessous), ne peut pas être considérée comme complètement *résolue* par l'application d'un algorithme, parce que la « vraie question derrière », c'est de deviner un jour les structures algébriques générales qu'on ne voit pas encore.

Donc nous nous trouvons dans une situation très claire sur le plan philosophique : la recherche en mathématiques est un combat contre l'Inconnu. Cette affirmation paraît tautologique et ridicule, mais pourtant, nous en sommes toujours à combattre pour l'actualisation du potentiel.

Néanmoins, nonobstant toutes ces pensées lucides, je voudrais formuler un problème général qui me semble pouvoir être fécond et prometteur, bien qu'il en reste au niveau de l'algorithmique.

Problème 3. *Trouver des algorithmes automatiques d'engendrement d'invariants qui dominent vraiment l'explosion symbolique sans reposer sur une utilisation naïve des bases de Gröbner.*

En effet, la taille des polynômes explose, et quand on demande aux bases de Gröbner de trouver l'idéal des relations entre un système de polynômes invariants, très rapidement, les calculs sur ordinateur n'aboutissent pas à cause d'une saturation de la mémoire. J'ai de nombreuses fois fait l'expérience de ce phénomène, y compris en 2003, à l'époque où j'ai interagi avec l'équipe de Michel Petitot du Laboratoire d'Informatique de l'Université de Lille 1.

Par conséquent, il est souhaitable d'injecter dans les algorithmes programmés la plupart des « courts-circuits » de calcul qu'on invente spontanément lorsqu'on travaille « à la main », et de le faire régulièrement, et en parallèle. L'avenir de l'utilisation des ordinateurs repose sur un tel travail de *haute-couture du problématique à l'automatique* : dopons la technique en y introduisant toujours le maximum de questions.

Le calcul manuel est en permanence environné de questions très précieuses parce que ce sont elles qui nous permettent de rebondir en permanence et d'adapter nos stratégies d'exploration. Infléchissons donc et formatons intelligemment notre utilisation balbutiante des ordinateurs afin que puisse s'exprimer en temps réel toute la richesse intuitive dont nous avons l'habitude avec le papier ou le tableau. Il est aisé de prédire que la *recherche* mathématique sur ordinateur mûrira considérablement dans les prochaines décennies, peu de chercheurs ayant actuellement des compétences à la fois en programmation et en calcul manuel.

Pour en revenir rapidement aux invariants de Demailly, dans mes deux mémoires sur le sujet, j'ai essentiellement fait les calculs à la main, et pour cette raison, j'ai eu un certain nombre d'idées astucieuses (non dévoilées dans les textes) permettant de contourner l'explosion des calculs, et en particulier, le blocage mémoire des bases de Gröbner :

□ calcul des syzygies par saturation d'un idéal ;

□ formes normales des invariants restreints à une "tranche" ;

□ tester la propriété de Cohen-Macaulay de manière incrémentale.

Ces idées pourraient un jour être organisées de manière systématique, être retravaillées, appliquées et programmées. Mais il me manque encore une (seule) pièce essentielle pour que *tous* les calculs soient contractés symboliquement, à savoir, j'ignore comment éviter de chercher les nouveaux invariants naissants en complétant les syzygies entre les invariants restreints sans avoir à considérer l'expression complète desdits invariants.

Si jamais je parvenais à court-circuiter cette étape-là, alors les ordinateurs pourraient explorer des algèbres d'invariants constituées de dizaines de milliers d'invariants, ce dont nous sommes très loin aujourd'hui.

En tout cas, l'idée générale, philosophiquement très proche de la méthode d'équivalence d'Élie Cartan, c'est que des contractions symboliques appropriées permettent d'aller beaucoup plus loin car l'on *évite d'effectuer un grand nombre de calculs inutiles*.

Pourquoi ai-je parlé de la « fécondité » de ce Problème 3 ? C'est très simple, revenons-en à notre idée fixe. Si les algorithmes sont performants et bien pensés, tout mathématicien qui est un calculateur manuel averti pourra examiner les résultats intermédiaires des calculs fournis par une machine pour être à même de deviner de belles structures algébriques, dans tel ou tel problème de théorie des invariants par exemple. On aura bien compris qu'il n'est question ici que des calculs qui posent problème, qui posent des questions, qui recèlent l'Inconnu, mais nullement des décimales de π.

Je voudrais faire remarquer en passant qu'un « bon » algorithme devra être un algorithme dans lequel on peut changer un très grand nombre de fois de notations. En effet, dans le travail journalier de calcul manuel, les révisions de notation sont absolument essentielles à la progression de la pensée. Qui plus est, avoir la possibilité de disposer de plusieurs notations souples pour désigner un même être mathématique peut s'avérer extrêmement profitable dans la progression. En définitive, je pressens la vérité suivante.

Thèse. *Dans les années qui viendront, les travaux de recherche proches du calcul formel — algèbre commutative, symétries de Lie, problème d'équivalence de Cartan, géométrie algébrique, théorie classique des invariants par exemple — bénéficieront d'une meilleure fécondation réciproque entre calculs manuels et calculs électroniques, toujours avec l'idée que les calculs doivent être organisés dans une totalité symbolique parcourable afin de susciter des idées nouvelles.*

Qui connaît le *lemme de Cartan* pour les formes différentielles ? Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des 1-formes différentielles locales sur $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes au voisinage d'un point $p \in \mathbb{R}^n$, et soient $\omega_1, \dots, \omega_k$ des 1-formes différentielles quelconques telles que $0 = \alpha_1 \wedge \omega_1 + \cdots + \alpha_k \wedge \omega_k$. Alors les ω_j sont combinaisons linéaires des α_i. Plus précisément, il existe des fonctions $S_{j,i}$ définies près de p telles que $\omega_j = S_{j,1}\, \alpha_1 + \cdots + S_{j,p}\, \alpha_k$.

Élie Cartan avait inventé, utilisé et exploité ce lemme essentiellement trivial afin de court-circuiter de nombreux calculs dans sa théorie du problème d'équivalence pour les structures géométriques. Ce lemme dissimule son ineffectivité indélébile dans les fonctions $S_{j,i}$. L'énoncé est

« existentiel », « abstrait ». Dans la pratique, les fonctions $S_{j,i}$ apparaissent comme coefficients de courbure provisoires et incomplets ; leur expression change à chaque fois que l'on absorbe la torsion, à chaque fois que l'on réduit le groupe, et à chaque fois que l'on prolonge la structure, ces trois procédés pouvant être effectués en boucle un certain nombre de fois. Comme les données de départ dépendent de toute façon déjà d'un grand nombre de variables, il devient presque impossible de suivre à la main la trace explicite de ces fonctions $S_{j,i}$, et donc, si l'on veut quand même pouvoir dire quelque chose, on doit accepter de s'en remettre à cet argument d'algèbre linéaire *non effective* qu'a inventé Élie Cartan. Quand il a commencé, à la fin des années 1930, à travailler en mathématiques en suivant des indications de Cartan, Chern a « pris le geste et continué », comme l'écrivait Cavaillès en parlant de la théorie des ensembles, à peu près à la même époque.

Derrière ce simple lemme dit « de Cartan », que son fils Henri a présenté dans son manuel bien connu sur les formes différentielles, et qu'on voit reproduit dans de nombreux “textbooks” contemporains de géométrie différentielle, derrière cet « énoncé trivial et évident », se joue en fait encore une des grandes dialectiques des mathématiques, à savoir la dialectique entre l'effectivité, le calcul total, les expressions explicites et complètes, d'une part, et d'autre part, les arguments de contournement des calculs lorsqu'il paraît trop difficile de les effectuer en totalité. Il est regrettable, à mon avis, que la structure du formalisme mathématique international n'incorpore pas des moyens rhétoriques automatiques de mentionner cette dialectique, qui me semble absolument fondamentale. Calculateur convaincu, je suis spontanément porté, en effet, à juger de l'aboutissement d'un résultat en fonction de sa *complétude calculatoire*, qu'elle soit ou non encadrée par un appareil conceptuel tout à fait mûr. Le calcul est riche de questions non résolues.

C'est par exemple un long calcul d'élimination à la chasse duquel Gauss est parti pendant de nombreuses années, à savoir le calcul formidable qui lui a permis d'énoncer que la courbure κ d'une surface s'exprime comme une certaine expression différentielle complexe :

$$
\begin{aligned}
\kappa = \frac{1}{4\,(EG-F^2)^2} \bigg\{ & E \left[\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 \right] + \\
& + F \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2\,\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + 4\,\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \\
& + G \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2\,\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right] - 2\,\left(EG-F^2\right) \left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right] \bigg\},
\end{aligned}
$$

en les éléments E, F et G du $ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$ qui exprime la longueur au carré $\|(du,dv)\|^2$ d'un élément infinitésimal sur la surface paramétrée par les deux coordonnées (u,v), c'est un *calcul* que Gauss a placé au début de ses célèbres *Disquistiones generales circa superficies curvas* (1828).

Thèse. *Le calcul* est *pensée. C'est une pensée monadique et continue qui démultiplie les pensées.*

Bien sûr, Riemann, Christoffel, Lipschitz, Frobenius, Weingarten, Ricci, Levi-Civita et d'autres sont repassés sur le terrain inventé par Gauss, et en changeant légèrement de « géodésique conceptuelle », ils ont clarifié les moyens de rendre plus limpide le *Theorema Egregium* de Gauss.

Cependant, cacher ou masquer le calcul de Gauss serait à mon avis une erreur, car Élie Cartan plus tard, grâce à la méthode du repère mobile, a découvert que le calcul de Gauss n'était que le cas le plus élémentaire d'une grande théorie indéfinie, pleine de calculs imprévisibles, pleine de fruits désirables, à savoir le *problème d'équivalence pour les structures géométriques*, qui marie la philosophie riemannienne du différentiel aux essences mobiles et continues qu'avait inventées Sophus Lie.

Restons-en donc à notre principe : l'algorithme n'est pas tout, car le tout, c'est la connaissance adéquate, la connaissance intrinsèque, la connaissance complète, et la « connaissance absolue » (Hegel). Cependant, si l'algorithme est performant, on peut s'en servir pour explorer plus à fond la réalité mathématique inconnue. L'illusion stéréotypée que les ordinateurs « font le travail » provient d'un manque de réflexion, d'un manque de recul, d'un manque de philosophie. Si on y regarde de près, on constatera que ce qui manque cruellement à l'ordinateur, c'est la *capacité de décision*. On doit bien sûr mettre à part ici l'intelligence artificielle, car ses résultats ne sont pas encore assez significatifs pour explorer à notre place l'Inconnu mathématique.

Thèse. *Travaillons-donc avec des ordinateurs, mais découpons les calculs en étapes, suivons chaque détail intermédiaire, interprétons, regardons, réfléchissons, recalculons, changeons de notation, effaçons,* etc.*, comme nous le ferions spontanément si nous calculions à la main.*

Le calcul rend intelligent. Il faudrait donc qu'à l'avenir s'exprime une conscience intersubjective de plus en plus nette de la démarcation entre les machines qui nous entourent et notre capacité humaine à questionner, à décider et à chercher. Ce que j'ai fait au cours de ces dernières années, dans ces travaux remplis de calculs qui apparaissent dans ce dossier, c'est croire que le calcul est nécessaire et rafraîchissant, et que l'homme est de toute façon infiniment plus puissant qu'une machine électronique. Nous nous illusionnons sur les ordinateurs, parce que nous sommes entourés de machines puissantes, voiture, train, avion, *etc.* Mais les ordinateurs ne sont pas sur des rails. « Ordinateur », comme « ordonner », donner des ordres, prendre des décisions à chaque instant, ce qui n'est pas nécessaire au contact des machines industrielles. Et justement, si l'on utilise les ordinateurs de manière trop passive, en ne prenant pas assez de décisions, en n'ayant pas assez d'idées nouvelles, en ne cherchant pas assez la nouveauté, on en reste à un niveau naïf et incomplet. Ainsi faudrait-il utiliser beaucoup plus intelligemment les ordinateurs dans la recherche fondamentale, afin de deviner la réalité mathématique.

Thèse. *Il faudrait que la puissance extraordinaire des ordinateurs soit utilisée de manière plus rusée et plus complexe afin d'être en mesure de mieux deviner les structures mathématiques cachées.*

On aurait besoin pour cela d'une unification internationale des programmes de calculs formels. Les mathématiques de Gauss, Cayley, Sylvester, Lie, Cartan sont remplies de calculs que nul, aujourd'hui, n'aurait le courage de reproduire, croyant à tort que les machines pourraient faire le travail. Mais c'est là une erreur contre laquelle il faut combattre, parce que les mathématiques se complexifient inéluctablement et inexorablement.

Pourquoi donc me suis-je intéressé à la théorie algébrique des invariants en 2008 ? Il y a, à cela, deux raisons. La première vient des travaux de Jean-Pierre Demailly et de Erwan Rousseau sur les polynômes invariants par reparamétrisation. En 1997 (en fait en 1995, à cause bien sûr du décalage publicationnel), Demailly a érigé tout une théorie des jets d'applications holomorphes à valeurs dans une variété projective complexe afin de progresser en direction de la fameuse conjecture d'hyperbolicité de Kobayashi, d'après laquelle toute application holomorphe entière $f\colon \mathbb{C} \to X$ à valeurs dans une hypersurface projective générique de grand degré $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ doit forcément être constante. En raffinant les jets dits de Green-Griffiths, et en relation géométriquement naturelle avec un certain Théorème de type Ahlfors-Schwarz, Demailly a introduit un espace de polynômes en le jet d'ordre $\kappa \geqslant 1$ d'un disque holomorphe local $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ qui sont invariants par reparamétrisation de $\mathbb{D}$. Pour des définitions précises, nous renvoyons au bilan sur les travaux de recherche et aux introductions d'articles. Or sans vraiment le soupçonner à l'époque, Demailly a introduit une algèbre de polynômes qui sont invariants par rapport à l'action d'un certain sous-groupe du groupe unipotent complet, lequel est un groupe non réductif. On ne peut alors bénéficier d'aucune théorie générale existante qui permette de déterminer si l'algèbre des invariants de Demailly est de type fini. Le problème est très ouvert. Persuadé que cette algèbre était géométriquement signifiante, j'ai travaillé intensément pour tenter d'en découvrir la structure, et je renvoie aux travaux afférents. Ce que j'ai fait dans cette direction a essentiellement déçu les spécialistes de géométrie algébrique, d'abord parce qu'il y a beaucoup de calculs (mais Sophus Lie et Élie Cartan ne méprisaient pas les calculs), et ensuite parce que la conclusion obtenue montrait que les syzygies et le nombre d'invariants fondamentaux explosent de manière vraisemblablement incontrôlable. En tout cas, il semble difficile de deviner de belles structures algébriques derrière une algèbre engendrée par 2835 polynômes avec un nombre de syzygies peut-être inaccessible. Et pourtant, il y devrait y avoir de belles structures à deviner !

En 1991, Jacques Dixmier (connu pour être un excellent calculateur manuel), a publié dans la *Gazette des mathématiciens* un article de survol splendide sur la théorie classique des invariants. Contrairement au livre de Olver sur le même sujet, contrairement aux articles de Rota et al., et au livre de Derksen-Kemper, Jacques Dixmier ne cache pas, dans cet article, que la structure des invariants d'une forme binaire de degré d par rapport à l'action de SL_2 est chaotique, même si le groupe est réductif, même si, avec le « σ-process » et le « Ω-process », on dispose de deux procédés algébriques simples qui engendrent tous les invariants de manière essentiellement systématique. En définitive, un examen survolant et comparatif des travaux de Sylvester, de Von Gall, de Springer, de Popov, de Dixmier, de Lazard, de Bedratyuk et d'autres montre que même pour la théorie classique des invariants, qui est encadrée par des procédés d'engendrement symbolique des invariants et de leurs syzygies, on ne comprend pas vraiment ce qu'il se passe, on ne voit pas tout, nos yeux sont impuissants.

FAIT CARACTÉRISTIQUE DE LA THÉORIE DES INVARIANTS, MÊME POUR LES GROUPES RÉDUCTIFS : Prolifération des invariants, prolifération des syzygies, absence d'harmonies facilement devinables.

Demailly est déçu, mais l'observation ci-dessus dit que la complexité est inévitable. Ainsi Jacques Dixmier, qui n'est que très peu cité dans la littérature anglo-saxonne (mais heureusement, notre meilleure amie MathSciNet nous est d'un grand secours), m'a-t-il fait comprendre qu'on ne peut espérer avoir des réponses simples et régulières en théorie des invariants. Pour un métaphysicien comme Leibniz, il n'y a nulle raison pour qu'il n'existe pas, en mathématiques, de sujets intrinsèquement complexes, truffés d'excentricités, et résistant par principe à une investigation complète. Jacques Dixmier a même écrit plusieurs articles pour déterminer quel système d'invariants primaires on peut choisir comme base de transcendance pour les formes binaires d'un certain degré, notamment le degré 7, qui est si retors. On a beau avoir un théorème général qui dit que toutes les algèbres d'invariants pour des actions réductives sont de Cohen-Macaulay, ce théorème n'est presque d'aucun secours lorsqu'il s'agit de déterminer de manière effective et sur des exemples non triviaux, un système d'invariants primaires. Encore une fois, donc, j'insiste :

FAIT ALGÉBRIQUE TROUBLANT : Pour la théorie classique des invariants (très étudiée aussi par Noether sous la direction de Hilbert), on a beau avoir de jolis arguments théoriques, posséder un opérateur de Reynolds, avoir des théorèmes généraux, les objets algébriques restent intrinsèquement complexes.

Ainsi, au sujet des invariants de Demailly, il reste plusieurs questions théoriques tout à fait naturelles qui ont du sens, même lorsqu'on renonce à comprendre l'algèbre en totalité.

Problème 4. *L'algèbre des invariants de Demailly est-elle finiment engendrée ?*

Je crois que c'est le cas. Il suffirait d'avoir une borne, même élevée, sur le nombre d'invariants fondamentaux. On peut aussi tenter d'étudier des asymptotiques du nombre d'invariant secondaires, comme Popov l'a fait pour certaines actions de groupes semi-simples complexes.

Problème 5. *En dehors du crochet entre deux invariants, existe-t-il d'autres procédés qui permettent d'engendrer les invariants de Demailly lorsqu'on passe d'un étage de jet à l'étage suivant ?*

En effet, rappelons que pour la théorie classique des invariants, on dispose de deux procédés symboliques complets qui engendrent tous les invariants.

Toutefois, restons lucides. Il a fallu des décennies de travaux avant que ces structures ait été devinées, puis démontrées comme complètes et adéquates. Si l'on envisage aussi la théorie de Cartan-Killing des algèbres de Lie complexes semi-simples, si répandue dans la littérature mathématique contemporaine, on ne devra pas non plus se leurrer : le mérite de Killing fut immense de découvrir, grâce à la théorie des matrices de Weierstrass, les structures algébriques sous-jacentes ; ceux qui ensuite ont poursuivi et approfondi la voie ouverte par Killing, à commencer par Élie Cartan, ont de plus, pendant des décennies, apporté raffinements et réorganisations, chacun découvrant des vérités subtiles, le tout aboutissant à un édifice magnifique. Deviner de belles structures algébriques, cela se produit rarement, même à l'échelle de l'histoire des mathématiques.

Problème 6. *L'algèbre des invariants de Demailly est-elle de Cohen-Macaulay ?*

Pour les jets d'ordre 3 en dimension 3, ou les jets d'ordre 4 en dimension 2, la réponse est oui, et il est relativement facile de s'en convaincre. J'ai essayé de démontrer la "*cohenmacaulayness*" pour l'algèbre de Demailly des jets d'ordre 4 en dimension 4, mais je n'y suis pas parvenu, croyant même pouvoir démontrer que tel n'est pas le cas.

En tout cas, l'algorithme tout à fait général, valable pour les jets d'ordre quelconque et en dimension arbitraire, que j'ai introduit dans mes travaux, pourrait permettre de traiter la question suivante, à condition d'être encore raffiné dans les étapes qui sont les plus coûteuses en temps de calcul.

Problème 7. *Étudier la structure algébrique des bi-invariants de Demailly pour les jets d'ordre 5 en dimension 5.*

§2. Hyperbolicité (Kobayashi) et dégénérescence algébrique (Green-Griffiths)

Avant de formuler des problèmes ouverts, je présente les grandes lignes de mon parcours de recherche sur l'hyperbolicité des variétés projectives et sur la dégénérescence algébrique des courbes entières.

À la fin du moi de mars 2007, je commence, pour la toute première fois, à réfléchir sur les invariants de Demailly. À cette époque, je me suis dit qu'en travaillant seulement sur Sophus Lie, je m'isolerais de la communauté mathématique française. Aussi ai-je décidé de tenter ma chance sur un sujet prestigieux de géométrie algébrique.

Les premiers mois ont été remplis d'hésitations, de difficultés et d'échecs. Je ne disposais en fait, comme source d'inspiration, que du travail de Erwan Rousseau, publié en 2006 aux Annales de l'Institut Fourier, et j'ignorais tout de ce que Demailly et El Goul connaissaient déjà, puisqu'ils n'avaient encore rien publié à ce sujet.

En mai 2007, j'assiste aux leçons du Cours Peccot au Collège de France qu'Erwan Rousseau dispensait sous les auspices de Jean-Christophe Yoccoz. Nous échangeons quelques idées, et je me rends compte qu'un invariant crucial pour les jets d'ordre 4 en dimension 2, à savoir celui que je note personnellement M^8 parce qu'il est de poids 8, m'avait échappé, alors que Demailly et Rousseau connaissaient déjà les 9 générateurs de cette algèbre d'invariants. Rousseau que je sollicite me transmet l'idéal des relations entre ces 9 générateurs. J'ai appris ultérieurement que Demailly ne prenait pas en compte les idéaux de relations.

Je passe l'été 2007 à continuer à réfléchir, et surtout, à souffrir : impossible d'y voir clair dans cette prolifération d'invariants, impossible de comprendre comment organiser les syzygies, impossible de préserver les combinatoires harmonieuses qui proviennent des algèbres plückériennes et des algèbres de Lie libres. Dès que plusieurs combinatoires bien comprises se mélangent, on n'y voit plus rien.

Maple refuse obstinément de me fournir les idéaux de relations désirés : saturation de mémoire. Je me débrouille donc à la main, je calcule les crochets, je les normalise, j'élimine ceux qui sont redondants, et je couche sur le papier les 210 syzygies que partagent mes 36 invariants par crochets, lorsqu'on développe les identités plückériennes 1 et 2.

En septembre 2007, je participe au colloque de l'Aber Wrac'h consacré aux aspects effectifs sur l'hyperbolicité au sens de Kobayashi. J'y annonce pouvoir démontrer que les jets d'ordre 5 en dimension 2 sont engendrés par 24 invariants mutuellement indépendants (12 exactement parmi 36 étaient redondants), tous obtenus comme crochets normalisés entre les invariants des jets d'ordre 4, comme on s'y attendait. En vérité, je n'avais ni rédigé ni vérifié complètement la véracité de cette assertion, puisque des spéculations prospectives m'avaient convaincu que les jets d'ordre 6 en dimension 2 seraient essentiellement hors d'atteinte (plus de 200 générateurs, plus de 10 000 syzygies) ; alors je me suis essayé à introduire une sous-algèbre sans syzygies, généralisable aux jets d'ordre quelconque et à la dimension arbitraire, croyant pouvoir ainsi, à partir de cette sous-algèbre, construire un sous-fibré du fibré des jets de Demailly, un sous-fibré « dominable », « gentil », « harmonieux ». Mais juste à la fin de mon exposé, Demailly et Diverio ont rétorqué qu'il n'était pas certain du tout que cette sous-algèbre puisse s'organiser en sous-fibré, et ils avaient raison, c'était faux.

Il me restait donc quand même les jets d'ordre 5 en dimension 2, ces 24 invariants, qui de toute façon, intéressaient les spécialistes présents. En septembre-octobre, je me suis donc mis à rédiger la démonstration que je n'avais pas encore réellement examinée de près, et là, ô surprise ! En comparant plusieurs données, manuelles et électroniques, je me suis rendu compte que l'idéal des relations entre bi-invariants restreints que j'avais écrites grâce aux relations jacobiennes et plückériennes 1, 2, cet idéal était plus petit que l'idéal des relations entre bi-invariants restreints fourni par Maple (qui refusait toujours de me donner les relations entre invariants complets). Il y avait exactement 6 relations supplémentaires. Donc il devait me suffire de vérifier que chacune de ces 6 relations était en fait conséquence, par des manipulations algébriques, des 15 relations que je connaissais déjà.

À nouveau, obstacle épistémologique, problème gênant, imprévu contrariant : chacune de ces six relations était bel et bien conséquence des 15 que je connaissais déjà, mais à condition de s'autoriser à diviser par f_1', cet élément rationnel appelé “*slice*” par Van den Essen qui est la cause de l'infinitude des invariants dans les contre-exemples de Nagata, Van den Essen, Daigle-Freudenburg, Roberts, et *al.*

Ce jeudi-là du mois d'octobre, un peu après minuit, mon cerveau a vécu un nouveau choc. Le théorème était faux, les invariants calculés par crochets étaient incomplets, et il y avait *a priori* 6 bi-invariants supplémentaires (en fait 5, l'un d'entre eux étant redondant) qui naissaient naturellement à travers ce procédé de division par f_1'. Je dirai pour ma défense que ceux qui ne prennent pas de risques en mathématiques évitent de se tromper. En tout cas, j'ai découvert ce phénomène inattendu avant de prépublier mes résultats.

Remis de cette émotion, quelques jours après, j'ai rédigé cette découverte *d'autant plus surprenante* (et décevante) *que dans tous les cas précédemment connus, les invariants de Demailly étaient tous engendrés par crochets*. L'histoire des mathématiques offre des exemples remarquables où l'esprit est égaré par une croyance, par une confiance implicite, par un principe de raison insuffisante, ou par une pensée non dialectique.

Fin octobre 2007, j'ai donc posté un article en français sur `arxiv.org`, dans lequel ce surprenant phénomène n'était pas interprété, et dans lequel je cachais (intentionnellement), que le phénomène contrariant qui m'avait fait découvrir de nouveaux invariants pouvait en fait se réinterpréter comme fournissant *l'algorithme adéquat*, susceptible d'engendrer tous les (bi-)invariants.

À cette époque, je me suis dit que j'avais suffisamment dépensé d'énergie dans cette direction, et j'ai décidé de revenir à Sophus Lie, ce maître fascinant qui a progressé tout seul dans l'Inconnu en érigeant vallées, montagnes, contrées mathématiques, en grande partie passées dans l'oubli. J'ai présenté un projet de traduction à Catriona Byrne (Springer-Verlag) le 18 décembre 2007, et pendant les mois de janvier, février, mars et début avril, j'ai travaillé intensément pour lancer ce projet. Mais déjà en février, certains soirs à l'École Normale, je reprenais le combat contre les invariants de Demailly sur Maple, ce logiciel fantastique avec lequel j'ai décidé, à partir de ce moment, de travailler en collaboration plus étroite.

Mon secret espoir était le suivant : puisque les crochets ne suffisent pas pour les jets d'ordre 5 en dimension 2, puisque la conjecture d'hyperbolicité au sens de Kobayashi en dimension 2 est considérée comme optimale en degré supérieur ou égal à 5, c'est donc bien que 5 est un nombre critique. Par ailleurs, tous les spécialistes pensaient que les invariants de Demailly sont un objet géométriquement adéquat (maintenant, certains pensent peut-être qu'il sont trop complexes), donc il se pouvait très bien qu'il y ait eu brutalement une infinité d'invariants fondamentaux quand on passe aux jets d'ordre 5, d'autant plus qu'un tel phénomène aurait été avantageux, parce qu'on aurait alors eu une chance de construire des équations différentielles algébriques globales de degré 5 qui sont satisfaites, *via* un théorème de type Ahlfors-Schwarz, sur toute surface projective algébrique $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ de degré égal au degré optimal attendu, à savoir, de degré 5.

C'est pour cette raison que j'ai commencé à étudier la littérature récente sur le 14ième problème de Hilbert. Ce sont les hasards de la recherche, il faut savoir *rebondir sans a priori*, accepter de visiter de nouveaux sujets et reconnaître la nécessité de nouveaux outils.

Donc en février 2007, certains soirs, comme « récré-action », je m'installais en Salle S à l'ENS, parfois dans mon bureau (ma machine y était moins puissante), afin de faire des calculs sur Maple, et avec le ferme espoir de découvrir une infinité d'invariants mutuellement indépendants. J'y croyais ! J'y croyais vraiment ! Cela aurait été très beau, très spectaculaire, j'aurais découvert le premier exemple géométriquement signifiant, et non *ad hoc*, d'algèbre d'invariants qui ne soit pas de type fini.

Mais malheureusement, après des jours de calculs dans tous les sens, j'ai dû admettre qu'il n'y avait en fait qu'un seul nouveau bi-invariant, à savoir celui que j'appelle maintenant Y^{27} (il est de poids 27, bien entendu), le seul bi-invariant que je n'avais pas encore découvert dans mon travail précédent, où 5 (issus de 6 syzygies supplémentaires) nouveaux bi-invariants étaient venus contredire la conjecture des crochets.

Au total, comme nous le disons entre nous parfois en plaisantant avec Erwan Rousseau, dans ces « fichus invariants » de Demailly, tout ce que l'on croit être vrai à un instant t s'avère toujours être faux à l'instant $t + 1$! En tout cas, la stratégie de démonstration que j'avais mise au point en septembre-octobre fonctionnait toujours. Je pouvais alors démontrer rigoureusement que si aucun bi-invariant nouveau ne se cache derrière les syzygies complétées, l'algèbre est finiment engendrée par les invariants découverts jusqu'à ce point, et en prime, on possède toutes les syzygies récoltées au fur et à mesure, qui sont au final organisées en une belle base de Gröbner réduite. Ensuite, en contractant symboliquement les expressions, on peut changer de base de Gröbner à volonté afin de réduire le nombre de générateurs de l'idéal des relations.

J'ai bien sûr vérifié (en partie à la main et en partie avec Maple) qu'aucun nouveau bi-invariant ne se cachait derrière, pour plusieurs bases de Gröbner, car j'avais toujours l'espoir que l'algèbre soit de type infini. Ce n'est que lors de mon séjour de 20 jours à l'Institut Mittag-Leffler en avril 2008 que j'ai commencé à être vraiment convaincu que ces algèbres d'invariants devaient être de type fini. À ce moment-là, j'ai recommencé à travailler sur les jets d'ordre 4 en dimension 3, en reprenant tous les calculs à zéro. Je savais à l'avance que les jets d'ordre 4 en dimension 4 seraient obtenus tout simplement en ajoutant le wronskien de dimension 4 à cette algèbre des invariants d'ordre 4 en dimension 3, aucune syzygie nouvelle ne venant interférer, parce que le wronskien 4×4 incorpore $f_4^{(4)}$, et pour cette raison, il est algébriquement indépendant de tous les invariants de la dimension 3.

Donc je repars à l'attaque, pensant que cette algèbre serait un peu plus simple que celle des jets d'ordre 5 en dimension 2. J'expose mon algorithme le 16 avril au séminaire de l'Institut devant Yum-Tong Siu qui, à la surprise de l'auditoire, est laudatif dans les remarques survolantes (*et craintes*) qu'il formule *toujours* à la fin des exposés. J'en suis, moi aussi, ébahi. En fait, Siu connaissait de loin les difficultés des invariants de Demailly, parce qu'il a beaucoup travaillé sur l'hyperbolicité, et donc il a été lui aussi confronté au champ immense et tentaculaire de difficultés calculatoires que ce sujet réserve à ses courageux explorateurs. Au bout d'un certain temps, sur un sujet donné, les difficultés que rencontrent toutes les approches actives doivent parfois être interprétées comme le signe que la question visée ne recevra pas une réponse courte et simple.

En tout cas, c'est à partir de ce moment-là, en avril 2008, que j'ai essentiellement laissé en chantier mon projet sur Sophus Lie, trouvant plus urgent de concrétiser mon résultat récent sur les jets d'ordre 4 en dimension 4, qui devait permettre de généraliser à la dimension 4 les résultats de Erwan Rousseau. Burglind Jöricke, co-organisatrice du semestre, ne m'avait pas fait inviter à l'Institut Mittag-Leffler, et c'est grâce à John Erik Fornaess que j'ai pu me glisser dans les places laissées libres par les quelques annulations de séjour.

En Suède, j'ai réussi à discuter un peu (très peu) avec Siu et surtout avec Mihai Paŭn, qui m'a expliqué comment, pour les jets d'ordre 2 en dimension 2, il construisait des champs de vecteurs méromorphes sur l'espace des jets verticaux tangents à l'hypersurface universelle. Erwan Rousseau avait généralisé cette démonstration pour les jets d'ordre 3 en dimension 3. Je savais, parce que j'avais lu l'article d'Erwan publié aux Annales de Toulouse en 2007, que la dernière étape (inspirée de Siu) pour établir les dégénérescence algébrique des courbes entières non constantes reposait sur ces champs de vecteurs.

En cinq semaines, de fin avril 2008 à fin mai, j'ai cherché, trouvé, rédigé et posté sur `arxiv.org` le cas général, à savoir les champs de vecteurs pour les jets d'ordre n en dimension n. Immédiatement, le résultat a circulé.

En 2002–2003, j'avais travaillé en théorie de Lie, et j'avais mis au point des formules explicites de prolongement de champs de vecteurs aux espaces de jets en toute généralité. De telles formules étaient en vérité beaucoup plus complexes que celles qu'il était nécessaire de mettre au point sur l'hypersurface universelle. Aussi ce travail sur les champs de vecteurs méromorphes ne m'a-t-il pas coûté beaucoup d'efforts, *contrairement aux invariants de Demailly*. Mon intention étant de préparer à l'avance en dimension quelconque cette pièce élémentaire qui permettrait en particulier d'obtenir des résultats sur la dégénérescence algébrique en dimension 4.

Jean-Pierre Demailly a immédiatement vu que ce résultat, associé à un résultat tout récent de Simone Diverio, son étudiant co-dirigé avec S. Trapani de *La Sapienza* (Roma), qui montre l'existence (non effective) d'équations différentielles algébriques globales, fournissait comme corollaire presque instantané une dégénérescence algébrique (non effective) des courbes entières en dimension n quelconque. De mon côté, après seulement un an de travail, je n'avais pas encore suffisamment étudié le sujet, ni appris suffisamment de géométrie algébrique, pour m'en rendre compte sur le champ.

En juin 2008, je me suis rendu à Strasbourg (sessions *État de la Recherche du CNRS* sur les variétés rationnellement connexes) pour rencontrer Erwan Rousseau, et nous avons vérifié ensemble que les champs de vecteurs se généralisaient, modulo un travail technique accessible, au cadre logarithmique. Toutefois, nous n'avons pas encore rédigé cette généralisation ; elle fera peut-être l'objet d'un nouvel article.

Depuis le bureau d'Erwan, nous envoyons un courriel à Simone Diverio pour lui proposer de faire un article à trois, ce qu'il accepte.

Début juillet 2008, nous nous rencontrons tous les trois à un colloque de géométrie complexe organisé au CIRM, et nous convenons ensemble que je devrais tenter de rendre effectif le calcul de réduction, en termes des classes de Chern de l'hypersurface X, du produit d'intersection que Simone Diverio avait introduit :

$$\begin{aligned}\big(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + 2|\mathbf{a}|h\big)^{n^2} & - \\ & - n^2\,\big(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + 2|\mathbf{a}|h\big)^{n^2-1} \cdot 2|\mathbf{a}|h\end{aligned}$$

(*voir* les détails dans l'un des documents joints) et qui permettait d'obtenir des équations différentielles en toute dimension.

Je décide, pour éviter toute ambiguïté, de ne m'atteler à cette tâche qu'après la soutenance de thèse de Simone, en septembre 2008. Entretemps, pendant l'été, je rédige mes 103 pages sur les invariants de Demailly, dans le style que j'aime, systématique, englobant, explicite, sans cacher les calculs, puisque c'est cette écriture même qui m'a permis de faire avancer la question. Je poste la prépublication sur `arxiv.org`, je retravaille un peu sur Sophus Lie, le tout au milieu d'entraînements pédestres semi-nocturnes et longs (entre 50km et 72km ; entre 2200m et 4200m de dénivellation positive ; départ entre 2h et 4h du matin, arrivée vers 12h).

Le 28-29 août 2008, je participe à l'Ultra Trail International du Tour du Mont-Blanc, mais j'abandonne au 140$^{\text{ième}}$ kilomètre, malgré un excellent entraînement, à cause d'une déminéralisation causée par une chaleur excessive. Déception difficile à digérer, premier vrai échec en course de montagne.

Fin septembre, j'ai commencé à regarder le problème de Demailly-Diverio. Il ne m'a pas résisté très longtemps. Le 29 octobre, au bout de 150 pages de manuscrit de recherche (à comparer aux 1 300 pages sur les invariants de Demailly), trois jours après une 92$^{\text{ième}}$ place à la Grande Course des Templiers (72km, 3200m+, $\sim$ 2700 inscrits), je fais converger une stratégie d'élimination partielle et néanmoins effective qui donne la minoration doublement exponentielle $d \geqslant n^{(n+1)^{n+5}}$ pour la dégénérescence des courbes entières à valeurs dans une hypersurface projective générique $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. C'est une réponse à la conjecture de Green-Griffiths pour les hypersurfaces génériques, en dimension quelconque, mais en degré non optimal.

Le 4 novembre, je dois exposer à Paris 6. J'y parle surtout d'invariants de Demailly. Puis dès le 5 novembre, je commence à rédiger. Rien, absolument rien dans mes 150 pages manuscrites n'était finalisé. En une petite dizaine de jours, du 5 au 14 novembre, il m'a fallu rédiger ces longs calculs d'élimination presque directement à l'écran de mon ordinateur portable. Qui plus est, je devais souvent retravailler sur le papier afin de réorganiser, de finaliser, et d'affiner. Le 15 novembre en effet, je devais prendre l'avion pour Toronto, où se tenait une conférence spécialement consacrée à l'hyperbolicité au sens de Kobayashi.

J'ai eu l'intuition (correcte *a posteriori*) que ce résultat pourrait remporter un certain succès, puisque ce serait le premier résultat effectif pour la conjecture de Green-Griffiths en dimension quelconque. Bien sûr, les analystes objecteront que la borne est doublement exponentielle, au lieu d'être linéaire, mais j'ai entendu dire que les théoriciens des nombres proches de l'hyperbolicité trouvaient une telle borne tout à fait normale, analogue à celles qu'ils obtiennent, et en adéquation avec l'état actuel de nos connaissances.

En tout cas, j'ai déployé toute mon énergie pour être en mesure de poster le résultat sur `arxiv.org` juste avant de prendre l'avion. Et le vendredi 14 novembre vers 13h, j'avais achevé une première rédaction présentable, dans laquelle tous les aspects techniques et rigoureux pouvaient être vérifiés, quoique la présentation résumée ne fît aucun rappel de la théorie de Demailly.

Observation générale. Je ne peux cacher ma satisfaction d'avoir démontré assez efficacement le théorème remarquable énoncé au tout début de mon *Rapport sur les travaux de recherche*, et qui peut être considéré comme une solution à la conjecture de Green-Griffiths (en degré non optimal) pour les hypersurfaces projectives génériques de grand degré.

En effet, j'ai consacré 5 semaines au mois d'avril-mai pour construire les champs de vecteurs méromorphes, et 7-8 semaines pour le calcul d'élimination dans la tour de Demailly-Diverio. Ce temps de travail peut paraître court, mais en vérité, *j'avais rencontré tellement d'obstacles ardus en étudiant les invariants de Demailly*, et auparavant aussi, *j'avais vaincu tellement de difficultés dans mes travaux en géométrie CR*, que sur ces deux problèmes où de vrais comportements réguliers me souriaient, j'ai pu achever le travail rapidement. De plus, *c'était la première fois de ma vie qu'un de mes résultats allait être reconnu.*

C'était la première fois qu'un de mes résultats allait être cité et qu'on allait en parler. La première fois après plus de dix années de recherche en géométrie CR où les aînés ne citent pas les travaux de leurs cadets. Aussi, ne vois-je aucune raison de dissimuler cette joie intérieure tant attendue.

Revenir aux jets de Green-Griffiths. C'est donc après avoir dépensé une énergie folle à les étudier, que je suis convaincu maintenant qu'il faut éviter les invariants de Demailly. En effet, l'existence d'équations algébriques différentielles s'obtient tout aussi bien avec les jets de Green-Griffiths, qui sont beaucoup plus réguliers que les jets de Demailly, parce qu'ils ne prolifèrent pas de manière incontrôlable et parce qu'ils ne sont pas encombrés de syzygies excentriques. En fait, en septembre 2008, avant même de commencer à travailler en direction de la borne doublement exponentielle $d \geqslant n^{(n+1)^{n+5}}$, j'ai découvert qu'il ne serait pas difficile de répondre à la question suivante.

Problème 8. *Décomposer en somme directe de fibrés de Schur le fibré des jets de Green-Griffiths.*

En vérité, à cette époque, je m'étais décidé à abandonner tout pour poursuivre cette piste très prometteuse, puisqu'elle me permettrait vraisemblablement de traiter les jets d'ordre κ quelconque, en dimension arbitraire. Personne, parmi Siu, Demailly, El Goul, Paŭn, Rousseau, Diverio, ne soupçonnait que les jets de Green-Griffiths se ramenaient aux algèbres plückériennes bien connues, après avoir quotienté par l'action du groupe unipotent. Partant d'un autre point de vue, Erwan Rousseau m'a dit avoir tenté de faire cette décomposition de Schur, mais être tombé sur un problème difficile impliquant les nombres de Kostka.

En vérité, une autre approche est possible, plus naturelle et plus directe. En effet, pour décomposer le fibré des jets de Green-Griffiths, il suffit d'être en mesure d'expliciter une expression normalisée d'un polynôme en les mineurs d'une matrice, modulo les syzygies que partagent lesdits mineurs. Et cela, dans la littérature de théorie des invariants, c'est déjà connu. Ou presque : dans les livres de Sturmfels, Manivel, Miller-Sturmfels, *etc.*, on ne voit que des énoncés en termes de tableaux de Young, mais en retravaillant un peu, et en négligeant certains termes qui disparaîtront de toute façon dans l'asymptotique de la caractéristique d'Euler-Poincaré, on peut préciser explicitement les multiplicités des fibrés de Schur qui apparaissent dans la décomposition du fibré de Green-Griffiths.

D'un seul coup, *toute la déception insupportable que l'on avait d'être totalement incapable de comprendre les décompositions en fibrés de Schur du fibré de jets de Demailly, cette déception cruelle s'évanouit*, car pour les jets de Green-Griffiths, la première étape, celle si ardue qui repose sur la théorie des invariants, est parcourue presque sans effort, *en dimension arbitraire et pour des jets d'ordre quelconque*. Après avoir fourni des efforts gigantesques sur les invariants de Demailly qui ne seront vraisemblablement pas appréciés à leur juste valeur (cela arrive fréquemment à tout le monde, les travaux qui ont demandé le plus d'efforts étant rarement ceux qui ont du succès), je (re)découvre un champ d'exploration beaucoup plus accessible et prometteur.

Paradoxe étonnant : il me faut maintenant arrêter de travailler sur la question, parce que le résultat récent de dégénérérescence algébrique en degré $d \geqslant n^{(n+1)^{n+5}}$ serait « annulé trop rapidement » par un progrès substantiel dans la borne δ_n qui utiliserait les jets de Green-Griffiths. Interdiction de l'améliorer trop vite, pourrait-on dire. Paradoxe, donc, car un second résultat meilleur sera de toute façon jugé moins spectaculaire que le premier résultat initial. Paradoxes de la *doxa*.

Fin septembre 2008 à vrai dire, j'ai hésité plusieurs jours : faire aboutir, ou bien ne pas faire aboutir l'approche de Demailly à travers la thèse de Simone Diverio ? Au fond de moi-même, il me semblait inutile de dépenser de l'énergie dans cette direction, puisque le retour à Green-Griffiths aboutirait à de meilleurs résultats.

Mais après quelques jours de tergiversations, en tenant compte du fait que retourner à Green-Griffiths me prendrait de toute façon trop de temps pour être au point lors de la conférence du 17 novembre, et en argumentant qu'il me fallait tenir l'engagement pris au CIRM au début du mois de juillet, je me suis convaincu de me réserver Green-Griffiths pour plus tard, et j'ai décidé de m'atteler au calcul d'élimination de Diverio, lequel avait quand même coûté 20 gigas de mémoire à une machine de Rome, sans aboutir pour la dimension 6.

Ensuite, à Toronto, je n'ai pas pu m'empêcher d'annoncer en privé qu'il faudrait définitivement revenir à Green-Griffiths, mais Erwan Rousseau et Simone Diverio m'ont « intimé l'ordre » de ne plus travailler sur cette décomposition de Green-Griffiths avant que notre article ne soit accepté. Faisons donc durer le suspens.

De mon côté, cela me donne du temps libre pour retourner tranquillement à Sophus Lie, dans le cadre de ma thèse de philosophie des mathématiques. Sur `arxiv.org`, j'ai déjà posté plus de 170 pages (en trois articles) sur le sujet depuis mai 2008, il est grand temps que je fasse une pause jusqu'en juin 2009. Rien ne m'empêche, pendant les récré-actions, de faire progresser la décomposition de Schur du fibré de Green-Griffiths.

En résumé, j'ai voulu être clair dans la description de ce nouveau programme de recherche. J'espère que les idées que je révèle ici ne feront pas obstacle à la publication dans une revue de haut niveau du résultat en collaboration avec Simone Diverio et Erwan Rousseau. Pourquoi sanctionnerait-on une originalité qui porte ses fruits en recherche ?

Une fois que la décomposition de Schur du fibré de Green-Griffiths sera connue, on devra étudier indépendamment la cohomologie de ces briques élémentaires.

Problème 9. *Calculer la cohomologie des fibrés de Schur* $\Gamma^{(\lambda_1,\lambda_n,\dots,\lambda_n)}T_X^*$ *sur une hypersurface projective algébrique lisse* $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$.

Ce problème a du sens en lui-même, et une bonne étude cohmologique aurait de très nombreuses applications en géométrie algébrique complexe. Brückmann et ses collaborateurs, puis Demailly, Manivel et d'autres ont étudié ces cohomologies surtout dans des circonstances où on a des théorèmes d'annulation. En vérité, les théorèmes d'annulation ne couvrent que certains cas spéciaux qui ne sont pas les plus significatifs. Le vrai problème général serait de connaître tous les groupes cohomologiques, dans toutes les circonstances. Est-ce faisable ? Je l'ignore. C'est sûrement optimiste.

En tout cas, grâce aux inégalités de Morse de Demailly et sans passer par des suites spectrales, il semble très vraisemblable pour l'instant, qu'on puisse atteindre des énoncés qui bornent les groupes de cohomologie, au moins de manière asymptotique. En vue d'applications à la dégénérescence algébrique des courbes entières, il suffirait de le faire pour les groupes de cohomologie paire. Je renvoie, pour des informations plus précises, aux transparents de mon exposé du 18 juin au CIRM, compilé à la fin de ce document.

Problème 10. *Majorer, asymptotiquement quand m tend vers l'infini, les dimensions des groupes de cohomologie* paires $h^{2i}\big(X,\, \mathsf{E}^{\mathsf{GG}}_{\kappa,m} T^*_X\big)$ *du gradué de poids m du fibré des κ-jets de Green-Griffiths, sur une hypersurface projective $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$.*

Si une bonne majoration est accessible, j'ai le ferme espoir d'atteindre les hypersurfaces projectives de type général, *i.e.* de degré $d \geqslant n + 3$, pour l'existence d'équations différentielles algébriques globales (en faisant tendre l'ordre des jets vers l'infini, bien entendu), ce qui serait assez spectaculaire, parce que les meilleurs résultats effectifs, basés sur les jets de Demailly, qui sont connus actuellement sont *très loin d'atteindre cette borne optimale*, à savoir : $d \geqslant 9$ pour $n = 2$ (M.) ; $d \geqslant 72$ (M.), $d \geqslant 74$ (Diverio), $d \geqslant 97$ (Rousseau) pour $n = 3$; $d \geqslant 259$ (M.), $d \geqslant 298$ (Diverio) pour $n = 4$; $d \geqslant 1222$ pour $n = 5$ (Diverio). Erwan Rousseau et moi-même, une fois que notre article avec Simone Diverio sera accepté, devrions vraisemblablement collaborer sur cette question. J'apporterai la décomposition du fibré de Green-Griffiths (je n'ai aucun doute que je l'ai), et il apportera ses idées pour les majorations des cohomologies paires. Peut-être collaborerons-nous avec d'autres personnes sur la question.

Problème 11. *Démontrer l'engendrement par des sections méromorphes globales du fibré tangent à l'espace des κ-jets verticaux quelconques de l'hypersurface universelle, en dimension n arbitraire.*

Pour ces champs de vecteurs, j'ai traité les jets d'ordre n en dimension n. Je renvoie au rapport sur les travaux de recherche pour de plus amples informations. Au début du mois de décembre 2008, d'ailleurs, j'ai renforcé le résultat, obtenant l'engendrement par des sections globales en dehors du lieu où tous les jets d'ordre un s'annulent, le *lieu dit des jets singulier* dans la théorie de Demailly. Il semble clair qu'un tel résultat est optimal, on ne peut pas espérer mieux abstraitement parlant, et dans les applications, cet énoncé donnera la dégénérescence algébrique *forte* des courbes entières.

Cet article amélioré a été resoumis vers le 10 décembre 2008 pour examen de sa correction aux Annales de l'Institut Fourier, alors qu'il avait été accepté sans une telle amélioration, bien que le rapporteur eût suggéré d'étudier le problème ci-dessus, ce que je n'ai pas fait, estimant que le terrain n'était pas encore prêt pour des jets d'ordre arbitraire, puisqu'on ne sait presque rien faire pour l'instant. Mais avec une étude de la cohomologie des jets de Green-Griffiths, effectuer une telle généralisation aura une application certaine, la borne doublement exponentielle sera à coup sûr considérablement améliorée. En tout cas, il ne me sera pas très difficile de généraliser mes calculs aux jets verticaux d'ordre quelconque $\kappa \geqslant n$ sur l'hypersurface universelle. J'y reviendrai en temps voulu.

Problème 12. *Généraliser aux intersections complètes tous les résultats déjà obtenus ainsi que ceux qui seront obtenus dans un avenir proche.*

Des experts de géométrie algébrique complexe m'ont affirmé que de telles généralisations sont en principe toujours accessibles à des techniciens patients, ou a des étudiants.

Je termine en formulant deux problèmes inspirés des travaux récents de Rousseau et Pacienza-Rousseau, pour montrer que le sujet est encore très riche de virtualités prometteuses.

Problème 13. *Traiter la dégénérescence des applications holomorphes entières de $\mathbb{C}^p$, pour un certain p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, à valeurs dans une variété projective algébrique lisse de dimension n.*

Problème 14. *Transférer tous les résultats acquis au cadre logarithmique.*

Problème 15. *Généraliser toute la théorie aux orbifoldes.*

Mon sentiment sur le sujet est qu'il est encore très riche de résultats potentiels, et qu'il n'a pas encore atteint le degré de maturité qui exige un renouvellement thématique. Mais d'autres tâches vis-à-vis desquelles j'avais contracté un engagement auparavant se rappellent maintenant à moi, pour la première moitié de l'année 2009.

§3. Principes de travail

> We have to assume that we are very stupid and our natural questions are stupid, and only by hard work, by conceptualizing, working hard, calculating, whatever, we can make good questions or good mathematics. And it's naive to think that we all have intuition or something. It's a stupid opinion. That's what I believe.
>
> Mikhail GROMOV.

☐ Diversifier ses thématiques de recherche.

☐ Travailler sur plusieurs sujets en parallèle.

☐ Privilégier les théorèmes longs et difficiles.

☐ Réfléchir constamment sur l'écriture mathématique.

☐ Confronter sa vision des mathématiques à leur histoire.

☐ Privilégier l'explicite, privilégier l'effectif.

☐ Affronter les difficultés mathématiques.

☐ Calculer, calculer, *calculer*.

☐ Réfléchir constamment sur l'essence du calcul.

☐ Surfer régulièrement MathSciNet afin d'apprendre à connaître d'autres galaxies de chercheurs.

☐ Ne jamais mépriser un sujet mathématique.

☐ Se ressourcer au contact des mathématiques de la charnière du XIX-XX ième siècle.

☐ Admirer les travaux de Sophus Lie et d'Élie Cartan.

☐ Maintenir son originalité.

§4. TRADUCTION DE LA THEORIE DER TRANSFORMATIONSGRUPPEN

Problème 16. *Traduire en anglais les 3 volumes de la* Theorie der Transformationsgruppen*, de Sophus* LIE *rédigés principalement par Friedrich* ENGEL.

Le 18 décembre 2007, j'avais soumis un projet de traduction ciblée des 176 premières pages du Volume III qui devait être suivi d'une traduction et d'une modernisation des travaux de Amaldi : *classification of complex local Lie group actions in dimensions 2 and 3, after Lie, Engel and Amaldi*.

En progressant, je me suis rendu compte que l'ouvrage en trois volumes de Lie et Engel était doté d'une architecture particulièrement bien pensée. Aujourd'hui, je me dirige donc plutôt dans un premier temps vers une traduction commentée complète du Volume I. Avec l'objectif éventuel de traduire les trois volumes.

Voici une copie de la lettre que j'ai envoyée à Springer fin août 2008 et qui explique les raisons qui me poussent à donner plus d'ampleur au projet. Je n'ai pas reçu de réponse aux questions que je soulève, ce qui signifie sûrement que je dois prendre les décisions seul.

Joël MERKER
Département de Mathématiques
et Applications

Besançon, 20 August 2008

UMR 8553 du CNRS
École Normale Supérieure
F-75230 Paris Cedex 05
merker@dma.ens.fr

Dear Managing Editor Catriona BYRNE, Dear Editor Ellen KATTNER,

First of all, I apologize for not having sending any information concerning the current status of the project :

Lie algebras
of holomorphic vector fields
in dimensions 2 and 3

about which I became confident and enthusiastic after our meeting in Chevaleret, December 18th 2007.

I then started to work, encountering on my route towards some possible achievement, as was predictable, several puzzling obstacles about the contents, the organization, the style, the architecture, the LaTeX-looking, *etc.*, a somewhat delightful game, often called *mathematical writing*. Only difficulties can keep alive the mathematical pleasure. Full time was devoted to the project until the end of March 2008.

From April 2 to 22, I visited the Institute Mittag-Leffler where a special Semester devoted to Analysis and Geometry in Several Complex Variables was organized. On this occasion, I started to rework on a different topic, the so-called Kobayashi hyperbolicity conjecture, specially because Yum-Tong Siu (from Harvard) and other leading experts of the field were present. I wrote then two papers, the first already posted on the `arxiv.org` site, the second (almost 100 pages long) handling some delicate computations in invariant theory with several new applications to the conjecture. Just the introduction of that paper is still subjected to the writing process, its corpus being already in final prepublishable state since at least two weeks. For this reason, it is only since then that the abovementioned project of book based on the *Theorie der Transformationsgruppen* by Lie and Engel has restarted in my private LaTeX laboratory. In sum, I count 4 complete month of full work on this project. Two students of the École Normale (first year) have defended their *diploma thesis* in June about Lie's classification in dimension 2, based on my preliminary draft, and I also gave a talk in the Mathematical Department of the Oslo University the 4 April 2008 … in front of two very impressive busts of the proud Sophus Lie ! Another talk at the *Seminar Riemann* I co-organize at the École Normale in history and philosophy of differential geometry is downloadable on my web site.

In the middle of May, I have posted in the front page of my website something like more than 200 pages, 80% of which are, in my views, quite finalized[1]. Since two weeks, I am finalizing the text from Chapter D up to Chapter F.

Now I overview somehow and I try to describe the state of the enclosed currently evolving draft "engel-lie.pdf".

My original goal was to select Chapters 1 to 8 of Volume III and to translate them, just summarizing and recollecting the needed material from Volume I (and sometimes, but seldom, from Volume II). Having decided to learn German expressly to read Lie[2], I progressed, and also, I was curious to understand more from Volume I, especially to grasp Lie's original presentation of the group adjoint to a continuous transformation group, in Chapter 16 near p. 270 of Volume I. But it then appeared that many of the preceding considerations were useful to this Chapter 16, which is afterwards heavily used in Chapter 2 of Volume III. After all, the organization of the three volumes is extremely well thought. Hence I decided to attack Volume I, with the intention of extracting something like 100 pages about the background material, in the way Lie had thought it, *not at all succumbing to the temptation of referring the reader to contemporary textbooks*. This is the current Part I, still much under construction.

On the other hand, I translated fully Chapters 1 to 4 of Volume III. I followed your suggestion, Catriona Byrne, to make a frame around the translated text. Pierre Cartier with whom I discussed twice (and who said he finds the project worthwile) told me, when, by the end of January, I gave him a very preliminary version in which such a framing was absent, that it would really be necessary to build a text which marks clearly the distinction between the translation of the original text, on one hand, and the comments or reformulations on the other hand. Then I struggled for days to find out a possibility to do that in LaTeX, especially in order that frames are allowed to continue from one page to the next, which is strictly forbidden by all box-packages in LaTeX, as far as I know. Although not available on the LaTeX packages, I found something thanks to Google, but the framing kills

[1] Not being in Paris during the Summer period, I cannot update the downloadable version ; enclosed you will find the most recent version.

[2] Although my name sounds German, my father (from the Grand-Duché de Luxembourg) wanted me not to learn this language in high school.

footnotes and headings of pages. That is a minor detail, but I yet cannot fix it.

By the way, it would be very convenient for me that the Editors advise me to build the LaTeX in one way, and not in another way. *Finding firm conventions is crucial in the progression of a publication project*, just because when you change your mind about something in the typography, as the project grows, the amount of material the looking of which you have to remodel increases proportionally. In fact, I already struggled a lot just for LaTeX-looking, being very conscious that electronic battles always go on, almost even after hard paper publications, I would say ! So please, do not hesitate to suggest modifications, it will help me a lot.

Main observation about Volume I. The very first 15 pages of the *Theorie der Transformationsgruppen* do not meet contemporary standards, especially the theorem about essentiality of parameters, at the very, very beginning of this 2100 pages-long treatise. The first 50-70 pages are quite arid, abstract[3], hidding somehow the geometrical thought (which was nonetheless very lively in Lie's head). So in my views, one cannot just translate the beginning. Many required comments would then just double the amount of material to be read. This why I decided to modernize the material, especially in Chapters A to F.

Chapter A about essentializing the parameters is close to a piece of what I already published in Cauchy-Riemann geometry. I worked here a lot the clarity of proofs (possible improvements are anyway always visible). At the end of this Chapter A, Engel's counterexample is discussed. It shows that, contrary to one of Lie's *Idées fixes*, the axiom of inverse cannot be deduced from the axiom of composition. I copy here the last remark which explains somewhat why the beginning of Volume I is difficult to digest.

Observation. In Vol. I of the *Theorie der Transformationsgruppen*, Engel's counterexample appears only in Chapter 9, on pp. 163–165, and it is written in small characters. In fact, Lie still believed that a deep analogy with substitution groups should come out as a theorem. Hence *the structure of the first nine chapters insist on setting aside*, whenever possible, *the two axioms of existence of identity element and of existence of inverses*. To do justice to this great treatise, we shall explain in Chapter D how Master Lie managed to produce the Theorem 26 on p. 163, which he considered to provide the sought analogy with finite group theory, after taking Engel's counterexample into account.

---

[3] Needless to say, this is not a defect. The two writers wanted to erect a very systematic theory, and they spent a lot of time in the fundational material, starting from essentially almost nothing. It is a kind of injustice that the current "doxa" bases its (widespread) opinion on just the first pages of Volume I. Reading a brilliant mathematician should make everybody humble.

The paradox I see : Although the basic fundamental theory (say the pages 1–165 of Volume I by Lie-Engel) is presented with a certain complexity, difficult to read, and perhaps disheartening to many readers, the rest is beautifully transparent and understandable. I really like this style, and it seems it should pass well in English.

The tournant I feel : So after having reorganized pages 1–165 with say half of modernizing paragraphs, and half of purely translated paragraphs (a task which could be finished by the end of September), I feel that the rest of Volume I could be translated without touching much, including from time to time a few commentaries.

Why to do that ? Why to enlarge the project ? Again as I said in December in Chevaleret, just because many of the mathematical results are absent from the modern literature, and alas they are also unread, just because they are written in German.

The possibility I have : To engage myself fully towards Volume I, coming back to Volume III afterwards. Translating the text now takes (much) less time to me than rewriting and modernizing. Although Volume I is xii+632 pages long, I now know how to be efficient when all conventions concerning LaTeX-looking are stabilized. My own glossary adapted to the Engel-Lie mathematical German language grows and will soon attain some kind of maturity, a state where translating can become quite very expeditious, so to say.

Evaluating language correctness of the translation : It would be crucial that at this stage, the translation would be looked at, say at least partly, say 10 pages here or there, say by an English or by an American mathematician. Peter J. Olver wrote me he would be interested to follow the project, and I recently met Jeremy Gray (Open University London) at the conference *Mathematical Understanding* (June, Paris) who told me he would be ready to have a look at. Possibly, Springer could officially sends a draft for partial, overviewal inspection. Jeremy Gray is a leading Historian of Mathematics and Thomas Hawkins, *the* leading Historian of Lie groups, is a distinguished writer I admire and whom I tried (unsuccessfully) to invite in Paris. You certainly have ideas of experts and I would like to say that my mathematical trajectory in Complex Analysis and in Cauchy-Riemann geometry assures that I have not yet had evaluational contact with experts of Lie theory.

Finalized chapters : Prologue for Part I, A, B, C, D, E, N, 2, 3, 4. Here, Chapter N is the last Chapter 29 of Volume I of the *Theorie der Transformationsgruppen* (maybe just a few comments are not yet finalized in N, 2, 3, 4).

Other chapters : The exact content of Prologue for Part II (still quite floating) will adapt to the rest. Also Chapter 1 will probably be accompanied by much less comments if Part I is thicker, or even almost all comments could disappear if we agree on the extended project that the full Volume I (~ 650 pages) is modernized-translated, on the agreement that anyway, an English version should be as thick as ~ 650 pages, or say ~ 600 with thinner characters ? Chapter F is almost finished. The fate of Chapters H, L, M will depends on the following

August 2008 question : Do I engage now towards a finalization of the full Volume I (desire and courage exist) with a possibility that an Editor finds the project interesting (taking costs and other parameters into account), or not ?

Surely, an evaluation of the draft at its current state would be helpful to make a decision.

In the meanwhile, I continue to finalize Chapters F, H, L, M and the comments to Chapters 1 and 2.

With sincere thanks for your attention,

Yours faithfully,

Joël Merker

DMA, École Normale Supérieure

`www.dma.ens.fr/~merker/`

§5. PROBLÈME DE RIEMANN-HELMHOLTZ-LIE

Problème 17. *Traduire, commenter mathématiquement, présenter philosophiquement et rendre accessible à un large public d'épistémologues de la géométrie les travaux de Sophus* LIE *sur le problème de* RIEMANN-HELMHOLTZ.

À partir du 6 janvier 2009, je vais m'engager exclusivement dans cette direction, tout en continuant la traduction en anglais. J'ai déjà traduit en français la Division 5 du Tome III, et je vais élaborer un commentaire pour soumettre un projet de 200–250 pages aux éditions Hermann en mai 2009. Ce travail, encadré par Jean-Jacques Szczeciniarz (éditeur), apparaîtra dans la thèse de philosophie des mathématiques que je déposerai au plus tard à l'automne 2009, étant actuellement inscrit en troisième et dernière année. Mes travaux sur les invariants de Demailly et sur la conjecture de Green-Griffiths m'ont fait prendre un retard que je vais rattraper au cours des six à huit prochains mois.

§6. CONSTRUCTIONS DE CONNEXIONS AU SENS D'ÉLIE CARTAN

Voici le texte d'une recension que j'ai soumise à MathSciNet vers le 15 décembre 2008.

V. BELOSHAPKA, V. EZHOV, G. SCHMALZ, *Canonical Cartan connection and holomorphic invariants on Engel CR manifolds*, Russian J. of Math. Phys., 2007.

Let $M \subset \mathbb{C}^3$ be a CR, generic, real analytic submanifold, which is 2-codimensional, hence of CR dimension 1. If the Levi form of M is not identically zero and if M is almost everywhere minimal (*i.e.* of finite Bloom-Graham type), then locally in some neighborhood $\mathscr{U}_p \subset M$ of a Zariski-generic point p of M, the Levi-form is nonzero, the distribution $D' := T^cM + \big[T^cM, T^cM\big]$ is 3-dimensional and furthermore, the distribution $D'' := D' + \big[D, D'\big]$ spans $TM\big|_{\mathscr{U}_p}$. A decade ago and in the same journal [Russian J. Math. Phys. **5** (2), 399–404 (1997); MR1605653 (99f :32014)], Beloshapka exhibited the cubic generic submanifold $\operatorname{Im} w_1 = z\bar{z}$, $\operatorname{Im} w_2 = z\bar{z}(z + \bar{z})$ as the "simplest model" among these generic manifolds, and showed that its infinitesimal CR Lie algebra consists of a certain semi-direct product of $\mathbf{R}$ with the unique irreducible 4-dimensional nilpotent real Lie algebra $\underline{\mathbf{n}}_1^4$. For such a class of CR manifolds, the paper under review provides a complete analog of Cartan's construction of a (projective) connection for deformations of the Heisenberg sphere $\mathrm{Im}\, w = z\bar{z}$, the above model being *a posteriori* characterized by the vanishing of exactly 4 functionally independent curvature tensors.

In fact, the three authors study more generally what they call *Engel CR manifolds*, which are only $\mathscr{C}^\infty$ and are not necessarily embedded in $\mathbb{C}^3$. By definition, these consist of a $\mathscr{C}^\infty$ 4-dimensional manifold M equipped with a 2-dimensional (sub)distribution $D \subset TM$ together with an almost complex structure $J : D \to D$, $J^2 = -\mathrm{Id}$, the Frobenius-like integrability condition being automatically satisfied in CR dimension one. Further, the "Engelian" nature [*cf.* F. Engel's ancient study under Sophus Lie's supervision in Leipz. Ber. **41** (1889), 157–176] requires that $D' := D + [D, D]$ consists of a 3-dimensional distribution, and that $D'' := D' + [D, D'] = TM$, uniformly at all points of M. Then there is a unique direction field $\ell \subset D$ with $[\ell, D'] \equiv 0 \mod D'$. The equivalence problem for Engel manifolds respecting such a direction field identifies with the equivalence problem for a third order ordinary differential equation $y''' = F(x, y, y', y'')$ under contact transformations. H. Sato and A.Y. Yoshikawa [J. Math. Soc. Japan **50** (1998), no. 4, 993–1013 ; MR1643383] constructed a normal Cartan connection with structure group $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$, the equivalence to $y''' = 0$ being characterized by the vanishing of two fundamental differential invariants. However, the existence of a supplementary complex structure J on D changes completely the structure Lie algebra to $\mathbb{R} \ltimes \underline{\mathfrak{n}}_1^4$, the factor $\mathbb{R}$ corresponding to dilations of the cubic.

Then at a fixed point $p \in M$, one defines the (initial) Levi-Tanaka algebra by $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \simeq \mathfrak{n}_1^4$, where $\mathfrak{g}_{-1} := D_p$, where $\mathfrak{g}_{-2} := D'_p \big/ D_p$ and where $\mathfrak{g}_{-3} := T_pM \big/ D'_p$. Following Tanaka [Japan J. Math. **2** (1976), no. 1, 131–190 ; MR0589931 (58 #28645)] or a more recent restitution given D.V. Alekseevsky and F. Spiro [Selected topics in Cauchy-Riemann geometry, 1–37, Quad. Mat., 9, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2001 ; MR2049139 (2004k :53035)], the infinitesimal automorphisms of $\mathfrak{g}_-$ preserving the two distinguished direction $V_y \in \mathfrak{g}_{-1}$ and JV_y identify with $\mathfrak{g}_0 := \mathbb{R}$ and the other prolongations $\mathfrak{g}_\ell$ with $\ell \geqslant 1$ are then zero. Of course, $\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$ identifies with the infinitesimal CR Lie algebra of the cubic.

With M being an arbitrary Engel CR manifold and defining then $\mathscr{G}$ to be the $\mathbb{R}^*$-principal bundle of all distinguished vectors tV_y, $t \in \mathbb{R}^*$, the authors construct a canonical Cartan connection valued in $\mathbb{R} \ltimes \underline{\mathfrak{n}}_1^4$ by making the commutator bracket relations "as close as possible" to the corresponding relations for the cubic model, taking account of the cohomology $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. At then end, 4 functionally independent curvature components, R^x_{y2}, R^y_{y2}, R^2_{x3}, R^y_{x3} are gained by computing the Lie brackets between 5 progressively normalized vector fields $\widehat{V}_0, \widehat{V}_x, \widehat{V}_y, \widehat{V}_2, \widehat{V}_3$ on $\mathscr{G}$ making an absolute parallelism. Local CR equivalence to the cubic holds if and only if all curvatures vanish. By projection, the Cartan connection induces a family of distinguished frames $\widetilde{V}_x, \widetilde{V}_y, \widetilde{V}_2, \widetilde{V}_3$ at any point of M. Vanishing of R^x_{y2} is equivalent to the the integrability of the distribution spanned by $\widetilde{V}_y$ and $\widetilde{V}_2$. Vanishing of R^y_{x3} and of R^2_{x3} is equivalent to the integrability of the distribution spanned by $\widetilde{V}_x, \widetilde{V}_3$.

Reviewer's final appreciation : this paper is presumably the clearest existing reference within CR geometry in which one finds an explicit, geometrically neat, application of the Cartan-Tanaka theory of connections.

Problème 18. *Construire une connexion de Cartan pour d'autres classes de sous-variétés génériques analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$ non dégénérées de dimension CR égale à 1 dont tous les invariants géométriques sont localement constants, par exemple dans $\mathbb{C}^4$, les déformations des deux seuls modèles possibles :*

$$\operatorname{Im} w_1 = z\bar{z}, \qquad \operatorname{Im} w_2 = z\bar{z}(z+\bar{z}), \qquad \operatorname{Im} w_3 = iz\bar{z}(z-\bar{z})$$

$$\operatorname{Im} w_1 = z\bar{z}, \qquad \operatorname{Im} w_2 = z\bar{z}(z+\bar{z}), \qquad \operatorname{Im} w_3 = z\bar{z}(x^2+by^2),$$

où $b \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy$.

Problème 19. *Construire des connexions de Cartan pour une large classe de sous-variétés génériques de dimension CR égale à 1 dans $\mathbb{C}^n$, en liaison avec les algèbres de Lie nilpotentes.*

Dans un article connu pour sa virtuosité technique, Élie Cartan, montre que le problème d'équivalence pour les distributions locales de 2-plans génériques[4] dans $\mathbb{R}^5$. La connexion est à valeurs dans l'algèbre de Lie complexe simple exceptionnelle notée $\mathfrak{g}_2$ qui est de dimension 14.

Problème 20. *Existe-t-il des distributions de k-plans dans $\mathbb{R}^n$, pour un certain k et un certain n, dont le groupe maximal d'automorphismes soit l'un des autres groupes simples exceptionnels, par exemple E_8 ?*

Problème 21. *Conduire le problème d'équivalence et construire des connexions de Cartan pour une distribution locale* quelconque *de k-plans dans $\mathbb{R}^n$. Classifier ces distributions en fonction de leur groupe d'automorphismes.*

[4] Prendre un crochet de Lie $[X, Y]$ donne une direction supplémentaire, et reprendre les deux crochets $[[X, Y], X]$ et $[[X, Y], Y]$ de longueur trois possibles fournit les deux directions manquantes, où les deux champs de vecteurs X et Y engendrent distribution localement dans un ouvert.

Problème 22. *Élaborer une théorie des structures paraboliques (Tanaka, Morimoto, Cap-Schichl), c'est-à-dire des connexions de Cartan à valeurs dans des algèbres de Lie* graduées*, qui ne se restreigne pas aux algèbres de Lie simples, et qui s'applique à une très large classe de structures géométriques.*

Problème 23. *Classifier à biholomorphisme près les hypersurfaces Levi non-dégénérées locales de $\mathbb{C}^3$, y compris celles dont le groupe d'automorphismes CR locaux n'est pas (localement) transitif.*

Les travaux de Loboda sont complets dans le cas localement homogène où les groupes d'isotropie sont de dimensions $\geqslant 1$. Loboda utilise la théorie des formes normales de Moser, mais il serait plus naturel de comprendre les classes possibles, à biholomorphisme près, directement en étudiant la connexion de Cartan associée, introduite par Hachtroudi, Chern puis dans un contexte gradué par Tanaka, Yamaguchi.

Problème 24. *Appliquer en géométrie CR la classification des algèbres de Lie réelles et complexes en petite dimension (résultats de Mubarakzyanov), et spécialement celles qui sont nilpotentes (résultats de Goze). Toutes les algèbres de Lie nilpotentes se réalisent-elles comme algèbres d'automorphismes CR infinitésimaux d'une variété CR locale de dimension CR égale à 1 ?*

Problème 25. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'algébrisabilité locale des sous-variétés CR génériques analytiques réelles locales de $\mathbb{C}^n$.*

Problème 26. *Construire une connexion de Cartan et classifier à biholomorphisme près les hypersurfaces 2-non-dégénérées de $\mathbb{C}^3$ dont la forme de Levi est de rang 1 en tout point, y compris celles qui ne sont pas homogènes.*

L'article de Ebenfelt à Duke en 2001 contient une erreur de normalisation initiale dans l'application de l'algorithme de Cartan ; sa tentative de construction d'une connexion de Cartan est donc inaboutie. Dans un article à paraître à Acta Math., Fels-Kaup classifient de telles hypersurfaces dont le groupe est simplement homogène, avec une autre approche. Construire une connexion de Cartan sans faire d'erreur semble maintenant requis.

Tous ces problèmes sont extrêmement riches. Il serait aussi nécessaire de construire une monographie consacrées spécialement aux problèmes de classification locale, dans l'esprit de Lie et de Cartan.

§7. ALGORITHME DE KOHN (D'APRÈS SIU)

Soit M une hypersurface $\mathscr{C}^\infty$ ou analytique réelle ($\mathscr{C}^\omega$) locale dans $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Lorsque l'un des deux côtés Ω de M est supposé pseudoconvexe, Kohn a étudié en 1979 (Acta Math.) la régularité au bord de l'unique solution u orthogonale aux fonctions holomorphes de l'équation $\overline{\partial} u = f$, où f est une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée $\mathscr{C}^\infty$ dans $\Omega \cup M$, *i.e.* jusqu'au bord préassigné M. La théorie des multiplicateurs sous-elliptiques de Kohn élabore pas à pas une estimée analytique dans des espaces de Sobolev dirigés qui aboutit, au final, après un certain nombre d'étapes, à une inégalité garantissant que la solution u est elle aussi $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'à M, pourvu que M ne contienne pas de courbe holomorphe (si $M \in \mathscr{C}^\omega$) ou que l'ordre de contact des courbes holomorphes locales avec M soit fini (si $M \in \mathscr{C}^\infty$).

C'est cette dernière hypothèse qui est mal comprise.

Problème 27. *Trouver un algorithme vraiment constructif qui décide à coup sûr, étant donné une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ analytique réelle quelconque (pas forcément pseudoconvexe) si elle contient ou non des courbes holomorphes.*

En 2002, j'ai trouvé un procédé (non publié) s'inspirant des modifications de Nash et qui donne une réponse à cette question lorsqu'on s'autorise à *stratifier pas à pas* les lieux où les invariants géométriques dégénèrent.

Il serait préférable de comprendre le problème en un point quelconque fixé, sans s'autoriser à délocaliser dans les éclatements de Nash successifs. J'en ai discuté avec Siu à Toronto. En vérité, l'algorithme de Kohn est purement ponctuel, il consiste à ajouter, selon un certain procédé que l'on peut faire suivre par des inégalités correspondantes dans les espaces de Sobolev, de nouvelles fonctions à la fonction définissante de M jusqu'à obtenir la fonction constante non nulle 1 (je passe les détails exacts). C'est Diederich-Fornaess qui ont démontré en 1978 (Ann. Math.) que l'algorithme de Kohn convergeait comme attendu sous ces deux hypothèses géométriques : non existence de courbes holomorphes contenues dans M (cas $\mathscr{C}^\omega$), ou ordre de contact fini (cas $\mathscr{C}^\infty$). Toutefois, cet article (splendide, célèbre, toujours régulièrement cité) de Diederich-Fornaess n'est pas "constructivisable", il raisonne par l'absurde, et il s'autorise lui aussi à délocaliser. La question de Kohn n'est donc pas réellement résolue. Siu insiste sur cette imperfection, propre à tous les raisonnements par l'absurde.

Déceler des questions non résolues derrière des théorèmes qui les donnent pour résolues, n'est-ce pas à nouveau ici l'une des qualités premières qu'on attend de l'esprit mathématique ?

Encore une fois : cette hypothèse géométrique sur les courbes holomorphes est mal comprise. La littérature contient de nombreux théorèmes basés sur cette hypothèse, mais à chaque fois, des arguments astucieux permettent d'éviter d'avoir affaire à la vraie question : contrôle constructif, invention d'un algorithme. Cela fait des années que j'ai conscience de cette imperfection. J'ai donc été agréablement surpris que Siu ait insisté très récemment sur le problème (*voir* son long mémoire de juin 2007, amélioré en novembre : *Effective termination of Kohn's algorithm for subelliptic multipliers*, arxiv.org/abs/0706.4113/). Dans ce mémoire, seules les hypersurfaces spéciales d'équation $\operatorname{Im} w = \sum_{j=1}^{K} |F_j(z)|^2$ sont traitées, et la réponse n'est déjà pas simple. En toute généralité, le problème suivant est donc encore ouvert depuis une bonne trentaine d'années.

Problème 28. *Rendre constructif l'algorithme de Kohn pour une hypersurface pseudoconvexe* $\mathscr{C}^\omega$ arbitraire *ne contenant pas de courbe holomorphe.*

Dans ses travaux, Yum-Tong Siu recherche toujours l'effectivité et la constructivité. Il a profondément raison. Dans les *Distinguished Lecture Series* qu'il a professées à l'Institut Fields au mois de novembre 2008, Siu a parlé de l'historique des idéaux multiplicateurs en géométrie algébrique complexe. D'après ce qu'il dit, il aurait été directement inspiré des idées de Kohn sur le ∂-Neumann. Je ne connaissais pas cette filiation philosophique, exemple supplémentaire de l'unité (mystérieuse) des mathématiques. J'ai donc été enchanté d'en prendre connaissance. Ainsi sont nés les idéaux multiplicateurs en géométrie algébrique complexe.

À partir de l'été 2009 et peut-être pendant plusieurs années, je pense que je vais tenter ma chance très intensément sur cette question fondamentale réveillée par Siu. À mon avis, tous les outils de géométrie analytique locale existent déjà. Il s'agit de bien les utiliser.

Comme souvent en mathématiques, la difficulté principale, c'est de déceler et d'élaborer les *bons points de vue*. Pour cela, il faut avoir non seulement la tête bien faite, mais encore, il faut l'avoir *remplie de questions bien faites*. Beaucoup de stratégies doivent être testées, puis exclues. L'adéquat est rarissime dans le problématique. Rappelons aussi l'insistance de Grothendieck sur les bons points de vue dans *Récoltes et Semailles*. Ma formation philosophique m'a toujours été d'un grand secours pour interroger (Socrate), problématiser (Platon), mettre en doute (Descartes) et dialectiser (Hegel). C'est pour cette raison que je refuse souvent de m'inscrire dans des cadres prédéfinis avant d'avoir la certitude qu'ils sont réellement appropriés aux questions contre lesquelles ils se battent. Ainsi pour l'algorithme de Kohn d'après Siu, il faudra tester et exclure de nombreuses pistes non adéquates.

Pour conclure, je voudrais ajouter que le problème réveillé par Siu requiert manifestement une expertise en géométrie CR locale. Je suis donc tout à fait compétent pour m'y attaquer, et son incitation orale à Toronto m'y a vivement encouragé. Par ailleurs, je me rapprocherais de la sorte (pour une seconde fois) de problèmes mathématiques qui sont soulevés par une école mathématique plus prestigieuse que celle dont je suis issu, et en cas de réussite, je récolterai peut-être à nouveau (*cf.* Green-Griffiths) plus de reconnaissance que pour mes 7 résultats définitifs en géométrie CR. Soyons optimiste.

§8. ÉCLATEMENTS, APLATISSEMENT ET APPLICATIONS CR

Je reproduis ici les trois premières sections de mon court rapport d'habilitation. Elles contiennent 9 problèmes ouverts délicats en géométrie CR : 1.3 ; 1.6 ; 3.33 ; 3.36 ; 3.37 ; 3.44 ; 3.45 ; 3.48 ; 3.49.

Table des matières

Ce *rapport de chercheur sur ses activités antérieures*[5], présenté sous la forme d'un résumé sélectif, expose des résultats qui sont définitifs ou complets. Certains sont marquants par la complexité intrinsèque de leur démonstration. D'autres résultats, nombreux, n'apparaissent pas ici. Pour des présentations progressives, historiques, dialectiques et motivées, le lecteur se rapportera à la monographie de survol [MP2006c], ainsi qu'aux introductions étendues de [Me2001, Me2002, MP2002, Me2005, Me2006a, MP2006b, MP2006e]. Les contenus étant relativement indépendants les uns des autres, ils peuvent être consultés de manière discontinue.

§1. PROLONGEMENT HOLOMORPHE DES FONCTIONS CR

1.1. Résolution de l'équation de Bishop avec perte minimale de régularité dans les classes de Hölder. Soit $\Delta := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ le disque unité dans le plan complexe et $\partial\Delta := \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ son bord, le cercle unité. Soit $\kappa \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < \alpha < 1$, soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 1$, et soit $U \in \mathscr{C}^{\kappa,\alpha}(\partial\Delta, \mathbb{R}^d)$ une application de classe $\mathscr{C}^\kappa$ sur le cercle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont les dérivées d'ordre κ par rapport à θ satisfont une condition höldérienne d'exposant α. L'opérateur *transformation de Hilbert* T_1 associe à $U \in \mathscr{C}^{\kappa,\alpha}(\partial\Delta, \mathbb{R}^d)$ son *conjugué harmonique*

[5] — reprise du texte qui accompagnait la soutenance d'habilitation le 6 avril 2006 —

$\mathsf{T}_1 U$, tel que $U(e^{i\theta}) + i\,\mathsf{T}_1 U(e^{i\theta})$ se prolonge holomorphiquement à Δ et tel que $\mathsf{T}_1 U(1) = 0$. Cet opérateur est borné dans les espaces de Lebesgue $L^{\mathsf{p}}(\partial\Delta, \mathbb{R}^d)$ pour $1 < \mathsf{p} < \infty$ (théorème de M. Riesz[6]) ainsi que dans les espaces de Hölder $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$, d'après un théorème dû à Privalov. La norme exacte $\|\!|\mathsf{T}_1|\!\|_{\kappa,\alpha}$ a été calculée par A.B. Aleksandrov (1975), elle fait intervenir la fonction beta d'Euler, et l'information significative est résumée par les deux inégalités

$$\frac{1/C}{\alpha(1-\alpha)} \leqslant \|\!|\mathsf{T}_1|\!\|_{\kappa,\alpha} \leqslant \frac{C}{\alpha(1-\alpha)},$$

$C > 0$ étant une constante absolue. L'opérateur T_1 annihile les constantes, c'est-à-dire $\mathsf{T}_1(\mathrm{cst}) = 0$ et satisfait $\mathsf{T}_1(\mathsf{T}_1 U) = -U + U(1)$. On note $\square_\rho^m := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < \rho\}$. La résolution de l'équation de Bishop dans les classes de Hölder a été étudiée pour la première fois par Hill-Taiani (1978). En 1996, Tumanov résout une équation de Bishop dans les classes $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$ avec une perte de régularité nulle sur la solution. Nous reprenons sa démonstration, nous élaborons des estimations höldériennes exactes, nous précisons explicitement les constantes et nous corrigeons au passage quelques imprécisions de la démonstration originale (Théorème 3.7(IV) de [MP2006c]).

Théorème 1.2. ([MP2006c]) *Soit $\Phi = \Phi\left(u, e^{i\theta}, s\right)$ une application à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$, $\kappa \geqslant 1$, $\boxed{0 < \alpha < 1}$, définie pour $u \in \mathbb{R}^d$, $|u| < \rho_1$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}^b$, $|s| < \sigma_1$, où $0 < \rho_1 < 1$ et $0 < \sigma_1 < 1$. Supposons que dans son domaine de définition $\square_{\rho_1}^d \times \partial\Delta \times \square_{\sigma_1}^b$, l'application Φ et ses dérivées d'ordre 1 par rapport à u et par rapport à θ satisfont les trois inégalités (rien n'est demandé sur Φ_s) :*

$$\|\Phi\|_{0,0} \leqslant \mathsf{c}_1, \qquad \|\Phi_u\|_{0,0} \leqslant \mathsf{c}_2, \qquad \|\Phi_\theta\|_{0,0} \leqslant \mathsf{c}_3,$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes positives petites telles que

$$\mathsf{c}_1 \leqslant C\,\alpha\,\rho_1, \qquad \mathsf{c}_2 \leqslant C^2\alpha^2 \left[1 + \sup_{|s|<\sigma_1} \|\Phi|_s\|_{1,\alpha}\right]^{-2}, \qquad \mathsf{c}_3 \leqslant \rho_1^2\,\mathsf{c}_2,$$

où $0 < C < 1$ est une constante absolue. Alors pour tout U_0 fixé satisfaisant $|U_0| < \rho_1/16$ et pour tout $s \in \square_{\sigma_1}^b$ fixé, l'équation fonctionnelle sur $\partial\Delta$ de type Bishop à paramètres :

$$\boxed{U(e^{i\theta}) = -\mathsf{T}_1\left[\Phi\left(U(\cdot), \cdot, s\right)\right](e^{i\theta}) + U_0}$$

[6] Pichorides (1972) calcule la valeur exacte de la norme d'opérateur $\|\!|\mathsf{T}_1|\!\|_{L^{\mathsf{p}}(\partial\Delta)}$, égale à $\tan\frac{\pi}{2\mathsf{p}}$ pour $1 < \mathsf{p} \leqslant 2$ et égale à $\cot\frac{\pi}{2\mathsf{p}}$ pour $2 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Il en découle les deux inégalités significatives $\frac{1}{C}\,\frac{\mathsf{p}^2}{\mathsf{p}-1} \leqslant \|\!|\mathsf{T}_1|\!\|_{L^{\mathsf{p}}(\partial\Delta)} \leqslant C\,\frac{\mathsf{p}^2}{\mathsf{p}-1}$.

possède une unique solution :

$$\partial\Delta \ni e^{i\theta} \longmapsto U(e^{i\theta}, s, U_0) \in \mathbb{R}^d$$

satisfaisant $\|U\|_{0,0} \leqslant \rho_1/4$ *qui est de classe* $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$ *sur* $\partial\Delta$*. De plus, cette solution est de classe* $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha-0} = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathscr{C}^{\kappa,\beta}$ *par rapport à toutes les variables, y compris les paramètres, c'est-à-dire que l'application complète*

$$\partial\Delta \times \square^b_{\sigma_1} \times \square^d_{\rho_1/16} \ni \big(e^{i\theta}, s, U_0\big) \longmapsto U(e^{i\theta}, s, U_0) \in \mathbb{R}^d$$

est de classe $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha-0}$.

Problème Ouvert 1.3. *Résoudre constructivement l'équation de Bishop à paramètres dans les espaces de Sobolev.*

Soit M une sous-variété générique de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$), de codimension non nulle $d \geqslant 1$ et de dimension CR strictement positive $m := n - d \geqslant 1$. On note $\mathscr{O}^{loc}_{CR}(M,p)$ l'orbite CR locale d'un point $p \in M$. Trépreau (1986) dans le cas hypersurface puis Tumanov (1988) en codimension quelconque ont prouvé qu'en tout point $p \in M$, il existe un CR-wedge $\mathscr{W}^{CR,e_p}_p$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ et de dimension $2m + d + e_p$, où

$$e_p := \dim\, \mathscr{O}^{loc}_{CR}(M,p) - 2m,$$

tel que toute fonction CR continue sur M se prolonge comme fonction CR continue sur $\mathscr{W}^{CR,e_p}_p$. De plus, $\mathscr{W}^{CR,e_p}_p$ contient une sous-variété complexe conique $\mathscr{W}^{an,e_p}_p$ de dimension $(m + e_p)$ attachée à un voisinage S_p de p dans $\mathscr{O}^{loc}_{CR}(M,p)$ telle que pour tout $q \in S_p$, on a :

$$T_q\mathscr{W}^{an,e_p}_p = T_qS_p + J\,T_qS_p.$$

À la suite des travaux de Sjöstrand (1982) sur la propagation des singularités pour certaines classes d'opérateurs (pseudo-)différentiels, de Baouendi-Chang-Treves (1983) et de Hanges-Treves (1983), Trépreau démontra en 1990 que le front d'onde hypoanalytique d'une distribution CR se propage de manière contrôlée le long des courbes complexes tangentielles de M.

Voici un corollaire remarquable de cette approche. Étant donné une sous-variété générique $M \subset \mathbb{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, si $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ se prolonge holomorphiquement à un wedge local $\mathscr{W}_p$ d'edge M en un point p, alors en tout point $q \in \mathscr{O}_{CR}(M,p)$ de l'orbite CR globale de p, il existe un wedge local $\mathscr{W}_q$ d'edge M en q tel que $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ se prolonge holomorphiquement à $\mathscr{W}_q$. Grâce au champ hamiltonien associé au symbole d'une section locale de T^cM, Trépreau contrôle la variation de direction des wedges en présence d'une sous-variété $S \subset M$ de même dimension CR que M. Par la méthode des disques, Tumanov généralise ces résultats de propagation. Mon premier résultat (1993) précise explicitement comme suit cette variation de direction.

Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ générique et $\mathscr{C}^{2,\alpha}$. En tout point $p \in M$, définissons

$$\begin{aligned}\mathsf{CR\text{-}ext}(p) :=& T_p^c M \oplus \mathrm{Vect}\big\{v_p \in T_pM/T_p^cM : \\ & \mathscr{C}^0_{CR}(M) \text{ se prolonge de manière CR} \\ & \text{à une variété à bord attachée à } M \text{ en } (p, Jv_p)\big\}.\end{aligned}$$

C'est un sous-espace vectoriel de T_pM et grâce au théorème de Tumanov local :

$$\boxed{\mathsf{CR\text{-}ext}(p) \text{ contient } T_p\mathscr{O}^{loc}_{CR}(M,p) \text{ en tout point } p \in M.}$$

La variation de la direction de l'extension CR est contrôlée par la différentielle du flot d'une section locale de T^cM.

Théorème 1.4. ([MP2006d]) *Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ générique $\mathscr{C}^{2,\alpha}$. Soit $p \in M$, soit S_p un voisinage de p in $\mathscr{O}^{loc}_{CR}(M,p)$ contenu dans l' edge du CR-wedge $\mathscr{W}_p^{CR,e_p}$ construit par Tumanov, de telle sorte que $\mathsf{CR\text{-}ext}(q) \supset T_qS_p$ pour tout $q \in S_p$. Soit L une section locale de T^cM définie sur un voisinage de S_p dans M. Supposons que deux points $q_0, q_1 \in S_p$ satisfont $q_0 = \exp(s_0L)(p)$ et $q_1 = \exp(s_1L)(p)$ avec $s_0 < s_1$. S'il existe un sous-espace vectoriel $\mathsf{E}(q_0) \subset T_{q_0}M$ tel que*

$$\mathsf{CR\text{-}ext}(q_0) \supset \mathsf{E}(q_0) \supset T_{q_0}S_p,$$

alors pour tout $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$, on a :

$$\mathsf{CR\text{-}ext}(L_{s-s_0}(q_0)) \supset (L_{s-s_0})_*\big(\mathsf{E}(q_0)\big) \supset T_{L_{s-s_0}(q_0)}S_p.$$

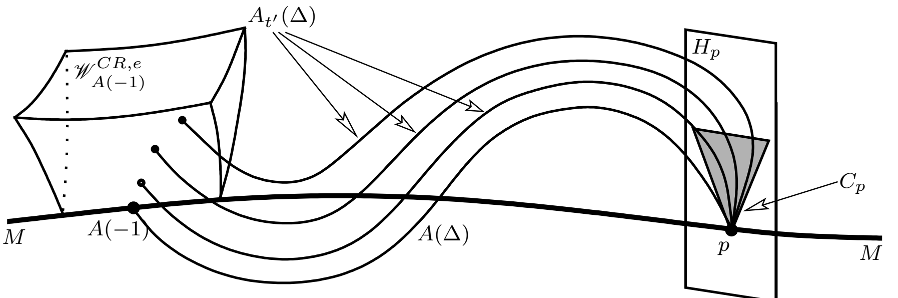
De plus, le sous-espace vectoriel $(L_{s_1-s_0})_*(\mathsf{E}(q_0)) \subset T_{q_1}M$ dépend seulement de la courbe complexe-tangentielle $\{L_s(q_0) : \ s_0 \leqslant s \leqslant s_1\}$ allant de q_0 à q_1, et non du champ L.

Grâce à cet énoncé explicite, j'ai obtenu en 1994 une version globale du théorème de Tumanov, résolvant ainsi une conjecture de Trépreau (1990). Simultanément, Jöricke a obtenu le même résultat avec des arguments de minimalisation dans des cônes CR locaux.

Théorème 1.5. ([MP2006c]) *Si $M \subset \mathbb{C}^n$ générique $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ est globalement minimale,* i.e. *consiste en une seule orbite CR, il existe un domaine de type wedge global $\mathscr{W}$ attaché à M tel que toute fonction CR continue $f \in \mathscr{C}^0_{CR}(M)$ possède un prolongement holomorphe $F \in \mathscr{O}(\mathscr{W}) \cap \mathscr{C}^0(M \cup \mathscr{W})$, $F|_M = f$. De plus, toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}_{loc,CR}$, $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, possède un prolongement holomorphe dans l'espace de Hardy $\mathsf{H}^{\mathsf{p}}_{loc}(\mathscr{W})$.*

Problème Ouvert 1.6. *Transférer ce théorème au cadre pseudoholomorphe.*

Un examen de la démonstration simplifiée reconstruite dans la Partie V de [MP2006c] montre que la seule étape ne jouissant pas d'un transfert direct et immédiat aux structures presque complexes est l'assertion suivante (Proposition 3.14(V) de [MP2006c]).



DÉFORMATIONS NORMALES D'UN DISQUE ANALYTIQUE

Proposition 1.7. (Propagation le long d'un disque) ([MP2006c]) *Soit A un petit disque analytique $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ attaché à M qui est un plongement de $\overline{\Delta}$ dans $\mathbb{C}^n$. Soit $e \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant e \leqslant d$. Supposons qu'il existe un CR-wedge $\mathscr{W}^{CR,e}_{A(-1)}$ au point $A(-1)$ de dimension $2m+d+e$ et de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ tel que $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ se prolonge de manière CR à $\mathscr{W}^{CR,e}_{A(-1)}$. Alors il existe un CR-wedge $\mathscr{W}^{CR,e}_{A(1)}$ au point $A(1)$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ et de la même dimension $2m+d+e$ tel que $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ se prolonge de manière CR à $\mathscr{W}^{CR,e}_{A(1)}$.*

Le CR-wedge $\mathscr{W}^{CR,e}_{A(1)}$ est construit en translatant une certaine famille de disques analytiques $A_{t'}$ ayant les propriétés suivantes. Posons $p := A(1)$. Il existe une famille de disques analytiques $A_{t'}$, $t' \in \mathbb{R}^e$, $|t'| < t'_1$, $t'_1 > 0$, de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ satisfaisant $A_{t'}|_{t'=0} = A$, $A_{t'}(1) = p$ et $A_{t'}(e^{i\theta}) \in M$ pour $|\theta| \leqslant \frac{3\pi}{2}$ à bords $A_{t'}(\partial\Delta) \subset M \cup \mathscr{W}^{CR,e}_{A(-1)}$ lorsque t' appartient à un certain cône $\mathsf{C}' \subset \mathbb{R}^e$, et telle que l'application direction de sortie *du disque* :

$$\mathbb{R}^e \ni t' \longmapsto \mathsf{ex}(A_{t'}) = \mathsf{proj}_{H_p}\left(-\frac{\partial A_{t'}}{\partial r}(1)\right) \in \mathbb{R}^d$$

est de rang maximal égal à e en $t' = 0$, où $H_p \simeq \mathbb{R}^d$ est un sous-espace linéaire de $T_p\mathbb{C}^n$ tel que $H_p \oplus T_pM = T_p\mathbb{C}^n$, et où proj_{H_p} est la projection linéaire parallèle à T_pM.

§2. ÉLIMINATION DES SINGULARITÉS

2.1. Trois notions d'éliminabilité et deux théorèmes. Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ générique $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ de codimension $d \geqslant 1$ et de dimension CR $m \geqslant 1$.

Définition 2.2. ([MP2006b]) Un sous-ensemble fermé $C \subset M$ est dit :

- *CR-éliminable* s'il existe un domaine de type wedge $\mathscr{W}$ attaché à M tel que toute fonction CR continue $f \in \mathscr{C}^0_{CR}(M\backslash C)$ se prolonge holomorphiquement à $\mathscr{W}$;
- *$\mathscr{W}$-éliminable* si pour tout domaine de type wedge $\mathscr{W}_1$ attaché à $M\backslash C$, il existe un domaine de type wedge $\mathscr{W}_2$ attaché à M et un domaine de type wedge $\mathscr{W}_3 \subset \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$ attaché à $M\backslash C$, tels que pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\mathscr{W}_1)$, il existe une fonction holomorphe $F \in \mathscr{O}(\mathscr{W}_2)$ qui coïncide avec f dans $\mathscr{W}_3$;
- *L^{p}-éliminable*, où $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, si toute fonction localement intégrable $f \in L^{\mathsf{p}}_{loc}(M)$ qui est CR au sens des distributions sur $M\backslash C$ est en fait CR sur tout M.

Les deux énoncés qui suivent éliminent des singularités *a priori* contenues dans des sous-variétés N d'une variété générique M de codimension arbitraire.

Théorème 2.3. ([MP2006b]) *Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ générique $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ de codimension $d \geqslant 1$, de dimension CR $m \geqslant 1$ et globalement minimale. Soit $N \subset M$ une sous-variété connexe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$. Supposons que $M\backslash N$ est aussi globalement minimale. Un sous-ensemble fermé $C \subset N$ est CR-, $\mathscr{W}$- et L^{p}-éliminable dans chacune des trois circonstances suivantes* :

(i) $\mathrm{codim}_M\, N \geqslant 3$ *et* $m \geqslant 1$;

(ii) $\mathrm{codim}_M\, N = 2$, $m \geqslant 1$ *et C est un sous-ensemble strict de N* ;

(iii) $\mathrm{codim}_M\, N = 2$, $m \geqslant 2$ *et il existe au moins un point $p \in N$ en lequel N est générique.*

Dans **(ii)** et dans **(iii)**, les conditions suffisantes sont en général nécessaires pour l'éliminabilité. En effet, pour tout $m \geqslant 1$, toute intersection locale transverse $C = N = \Sigma \cap M$ de M avec une hypersurface complexe $\Sigma = \{g(z) = 0\}$ constitue une singularité non (localement) éliminable, parce que $\frac{1}{g(z)}\big|_{M\backslash C}$ ne se prolonge à aucun wedge. Observons alors qu'une telle singularité $C = N$ de codimension deux dans M ne peut pas être générique et n'est pas un sous-ensemble strict de N.

Dans l'énoncé suivant, l'hypothèse $m \geqslant 2$ est fortement utilisée : la sous-variété $M^1 \subset M$ de codimension 1 est alors de dimension CR égale à $m - 1 \geqslant 1$, ce qui assure l'existence de petits disques de Bishop à bords dans M^1.

Théorème 2.4. ([MP2006b]) *Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ générique $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ de codimension $d \geqslant 1$, de dimension CR $m \geqslant 1$ et globalement minimale. Supposons $m \geqslant 2$. Soit $M^1 \subset M$ une sous-variété connexe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ de codimension 1 qui est générique dans $\mathbb{C}^n$. Un sous-ensemble fermé $C \subset M^1$ est CR-, $\mathscr{W}$- et L^{p}-éliminable s'il ne contient aucune orbite CR de M^1.*

L'étude plus délicate des singularités éliminables en dimension CR égale à 1 sera présentée dans le §2.9 ci-dessous.

2.5. Extension méromorphe des fonctions CR-méromorphes. Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété générique de classe $\mathscr{C}^1$ à singularités maigres (au sens de Hausdorff, *voir* Définition 6.15(VI) dans [MP2006c]) de codimension $d \geqslant 1$ et dimension CR égale à $m = n - d \geqslant 1$.

Définition 2.6. *Une fonction CR-méromorphe* sur M à valeurs dans $P_1(\mathbb{C})$ consiste en un triplet $(f, \mathscr{D}_f, \Gamma_f)$ tel que :

1) $\mathscr{D}_f \subset M$ est un ouvert dense de M et $f : \mathscr{D}_f \to P_1(\mathbb{C})$ est une application $\mathscr{C}^1$;

2) la fermeture Γ_f dans $\mathbb{C}^n \times P_1(\mathbb{C})$ du graphe $\{(p, f(p)) : p \in \mathscr{D}_f\}$ définit une sous-variété orientée CR à singularités maigres de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{C}^n \times P_1(\mathbb{C})$ de même dimension CR que M dont le bord au sens des courants est nul.

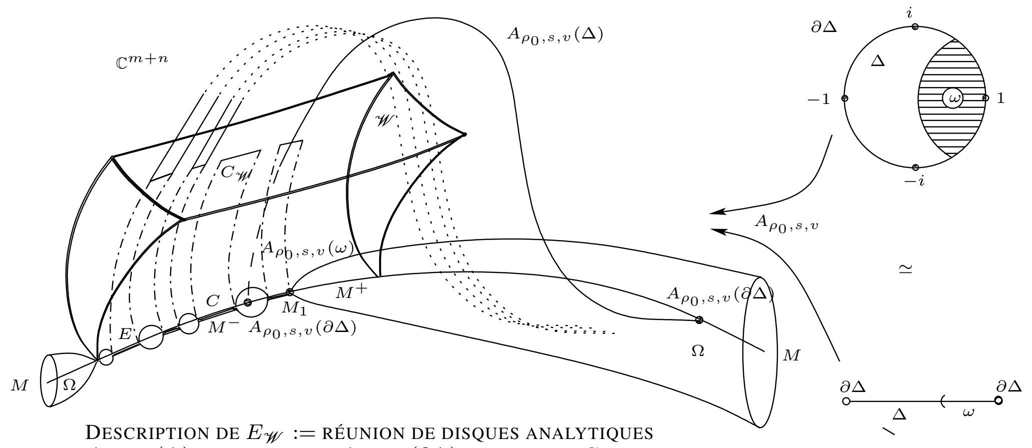
Le *lieu d'indétermination* de f est défini par

$$I_f := \big\{p \in M : \{p\} \times P_1(\mathbb{C}) \subset \Gamma_f\big\}.$$

D'après Dolbeault-Henkin et Sarkis, I_f est un sous-ensemble d'intérieur vide d'une sous-variété $N_f \subset M$ de classe $\mathscr{C}^1$ à singularités maigres et de codimension 2. De plus, le lieu singulier sc_{N_f} de N_f est toujours de codimension 2^{+0} dans M, *i.e.* satisfait $\mathsf{H}^{\dim M}(\mathsf{sc}_{N_f}) = \mathsf{H}^{2m+d-2}(\mathsf{sc}_{N_f}) = 0$, où l'on note $\mathsf{H}^\ell(\cdot)$ la mesure ℓ-dimensionnelle de Hausdorff. Il existe alors une unique mesure CR, T_f, définie sur $M \backslash I_f$, telle que $\mathsf{T}_f|_{\mathscr{D}_f}$ coïncide avec la fonction $f : \mathscr{D}_f \to P_1(\mathbb{C})$. Ansi T_f jouit-elle des propriétés de prolongement holomorphe des fonctions CR. La démonstration de l'énoncé suivant (Theorem 6.26(VI) de [MP2006c]) marie les techniques de déformations normales de disques (Proposition 1.7) avec la théorie des indices partiels développée par Forstnerič et Globevnik.

Théorème 2.7. ([MP2002, MP2006c]) *Supposons $M \subset \mathbb{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$, de codimension $d \geqslant 1$ et de dimension CR $m \geqslant 1$. Alors tout sous-ensemble fermé C de M tel que les deux variétés génériques M et $M \backslash C$ sont globalement minimales et tel que $\mathsf{H}^{2m+d-2}(C) = 0$ est CR-, $\mathscr{W}$- et L^{p}-éliminable.*

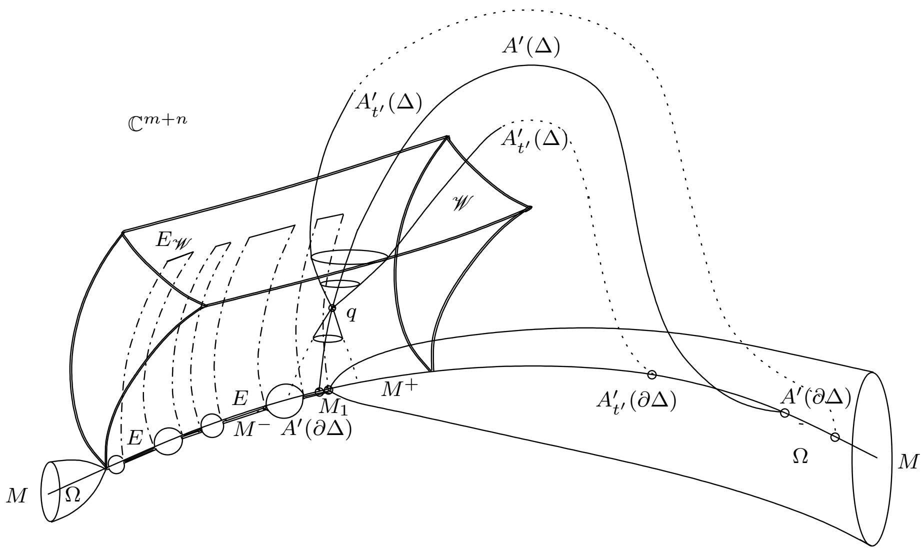
L'éliminabilité de I_f, assurée par le Théorème 2.3**(ii)** et par le théorème précédent, jointe à l'identification des enveloppes de méromorphie aux enveloppes d'holomorphie conduit à l'énoncé définitif suivant (Théorème 6.28(VI) de [MP2006c]).



DESCRIPTION DE $E_{\mathscr{W}} :=$ RÉUNION DE DISQUES ANALYTIQUES $A_{\rho_0,s,v}(\Delta)$ DONT LE BORD $A_{\rho_0,s,v}(\partial\Delta)$ RENCONTRE C

Théorème 2.8. ([MP2002, MP2006c]) *Supposons que $M \subset \mathbb{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ est localement minimale en tout point. Alors il existe un domaine de type wedge $\mathscr{W}$ attaché à M tel que toute fonction CR-méromorphe sur M se prolonge méromorphiquement à $\mathscr{W}$.*

Voici un diagramme extrait de [MP2002] illustrant la nécessité d'utiliser la théorie de Globevnik pour éliminer un point q dans un wedge d'extension partielle.



DÉFORMATIONS D'UN DISQUE A' ET BALAYAGE D'UN CÔNE OUVERT DE SOMMET q

2.9. Singularités de codimension 1 en dimension CR égale à 1. En 1988, grâce à un Kontinuitättsatz global, Jöricke démontre un théorème d'élimination géométrique remarquable : *les disques totalement réels fermés contenus dans un bord strictement pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^2$ *sont éliminables*. En appliquant le théorème de remplissage de sphères dû à Bedford-Klingenberg et à Kruzhilin (1991), Forstnerič -Stout (1991) généralisent cet énoncé en admettant des points hyperboliques. Plus récemment, Porten (2003) se dispense d'hypothèse de stricte pseudoconvexité, mais sans pouvoir admettre des points hyperboliques, car l'existence de bases de voisinages de Stein reste conjecturale à ce jour. Grâce à une localisation astucieuse, l'énoncé suivant fournit la synthèse attendue entre tous ces énoncés. On se dispense de toute hypothèse quant à la courbure de Levi et on admet des points hyperboliques.

Théorème 2.10. ([MP2006b]) *Soit* $M \subset \mathbb{C}^2$ *une hypersurface* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ *globalement minimale et soit* $D \subset M$ *une surface* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ *qui est*

- *difféomorphe au disque unité ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et*
- *totalement réelle hors d'un nombre fini de points qui sont des points complexes tangentiels hyperboliques au sens de Bishop.*

Sous ces hypothèses, tout compact K *de* D *est* CR-, $\mathscr{W}$- *et* L^{p}*-éliminable.*

Puisque D est totalement réel, la distribution de droites $D \ni p \mapsto \ell_p := T_pD \cap T_p^cM$ ne s'annule pas. En l'intégrant, on obtient le *feuilletage caractéristique* $\mathscr{F}_D^c$ sur D. Le compact K est contenu dans un disque légèrement plus petit $D' \Subset D$ à bord $\partial D'$ de classe $\mathscr{C}^1$. Le théorème de Poincaré-Bendixson assure alors que toute courbe caractéristique qui entre dans D' doit en sortir. Il en découle l'observation topologique suivante, qui est au cœur de l'éliminabilité de K :

$\mathscr{F}_D^c\{K\}$: *pour tout sous-compact* $K' \subset K$*, il existe un arc de Jordan* $\gamma : [-1,1] \to D$ *de classe* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$*, contenu dans une unique courbe caractéristique et satisfaisant* $\gamma(-1) \notin K'$, $\gamma(0) \in K'$, $\gamma(1) \notin K'$*, tel que* K' *se situe entièrement d'un seul côté de* $\gamma[-1,1]$ *dans un voisinage de* $\gamma[-1,1]$ *dans* D.

L'énoncé suivant constitue l'étape principale de la démonstration du Théorème 2.10. De par sa nature locale (alors que tous les travaux précédents utilisaient des arguments globaux), cet énoncé s'avère valable sur des surfaces ayant une topologie arbitraire.

Théorème 2.11. ([MP2006b]) *Soit* $M \subset \mathbb{C}^2$ *une hypersurface générique* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ *globalement minimale et soit* $S \subset M$ *une surface* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$*, ouverte ou fermée, avec ou sans bord, et qui est totalement réelle en tout point. Un sous-ensemble fermé* $C \subset S$ *est* CR-, $\mathscr{W}$- *et* L^{p}*-éliminable si* :

$\mathscr{F}_S^c\{C\}$: *pour tout sous-ensemble fermé* $C' \subset C$*, il existe un arc de Jordan* $\gamma : [-1,1] \to S$ *de classe* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ *contenu dans une unique* *courbe caractéristique de* $\mathscr{F}_S^c$ *et satisfaisant* $\gamma(-1) \notin C'$, $\gamma(0) \in C'$, $\gamma(1) \notin C'$, *tel que* C' *se situe entièrement d'un seul côté de* $\gamma[-1,1]$ *dans un voisinage de* $\gamma[-1,1]$ *dans* S.

2.12. Passage en codimension supérieure. L'intérêt principal de la localisation réside dans son applicabilité à la codimension quelconque. Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$) générique $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ de codimension $(n-1)$, donc de dimension CR égale à 1. Soit $M^1 \subset M$ une sous-variété $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ de codimension 1 qui est générique dans $\mathbb{C}^n$, donc maximalement réelle. Comme dans le cas hypersurface, M^1 possède un *feuilletage caractéristique* $\mathscr{F}_{M^1}^c$, dont les feuilles sont les courbes intégrales de la distribution de droites $p \mapsto T_pM^1 \cap T_p^cM|_{M^1}$.

Théorème 2.13. *Soit* M, M^1, $\mathscr{F}_{M^1}^c$ *comme ci-dessus et soit* C *un sous-ensemble fermé strict de* M. *Supposons satisfaite la condition suivante, qui exprime que* C *n'est pas transverse au feuilletage caractéristique* :

$\mathscr{F}_{M^1}^c\{C\}$: *pour tout sous-ensemble fermé* $C' \subset C$, *il existe un arc de Jordan* $\gamma : [-1,1] \to M^1$ *de classe* $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ *contenu dans une une unique courbe caractéristique et satisfaisant* $\gamma(-1) \notin C'$, $\gamma(0) \in C'$, $\gamma(1) \notin C'$, *il existe une sous-variété locale* $R^1 \subset M^1$ *de dimension* $(n-1)$ *transversale à* γ *passant par* $\gamma(0)$ *et il existe un voisinage allongé* V_1 *de* $\gamma[-1,1]$ *dans* M^1 *tels que, si* $\pi_{\mathscr{F}_{M^1}^c} : V_1 \to R^1$ *désigne la projection semi-locale parallèle aux courbes caractéristiques de* $\mathscr{F}_{M^1}^c$, *alors le point* $\gamma(0)$ *appartient au bord, relativement à la topologie de* R^1, *de* $\pi_{\mathscr{F}_{M^1}^c}(C' \cap V_1)$.

Sous ces hypothèses, C *est CR-,* $\mathscr{W}$*- et* L^{p}*-éliminable.*

Pour illustrer $\mathscr{F}_{M^1}^c\{C\}$, voici une figure extraite de [MP2006b].

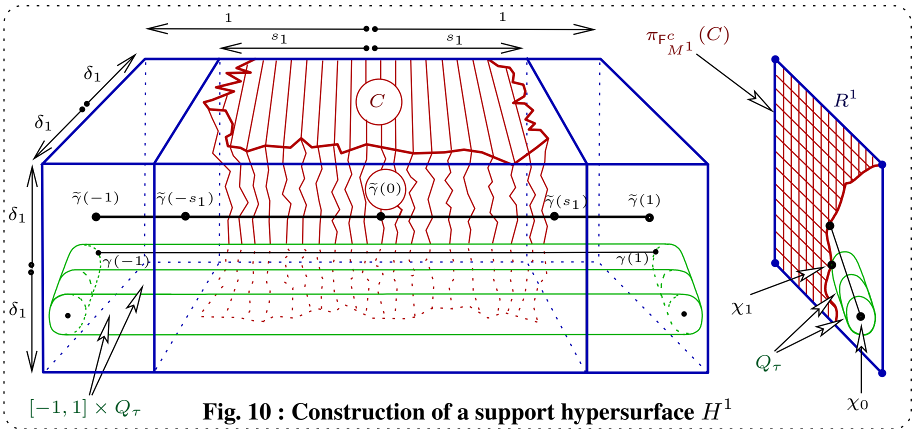


Fig. 10 : Construction of a support hypersurface H^1

En raisonnant par contradiction, il suffit de montrer qu'il existe au moins un point spécial $p'_{\rm sp}$ situé dans un voisinage de $C' \cap \gamma(-1,1)$ qui est *localement* CR-, $\mathscr{W}$- et L^{p}-éliminable. Le choix d'un tel point $p'_{\rm sp}$ constitue le point-clé de toute la démonstration, parce qu'en vérité, la plupart des points de C' ne sont pas localement éliminables. Voici une figure extraite de [MP2006c] qui illustre le choix de ce point, renommé $p_{\rm sp}$.

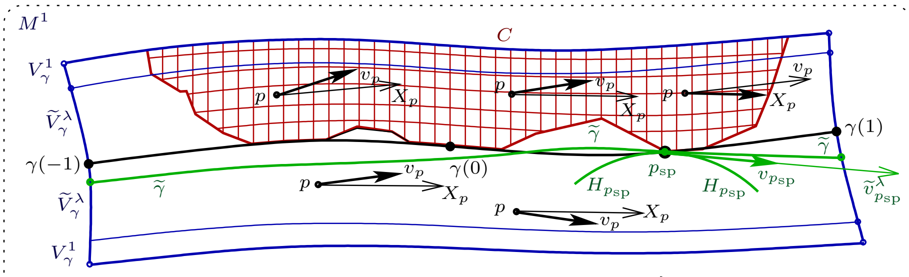


Fig. 13 : Dotted integral curve of the vector field $p \mapsto v_p^\lambda$ and choice of $p_{\rm sp}$

Ensuite, en un tel point spécial renommé à nouveau p_1, grâce à une construction de disques attachés en partie à M^1,

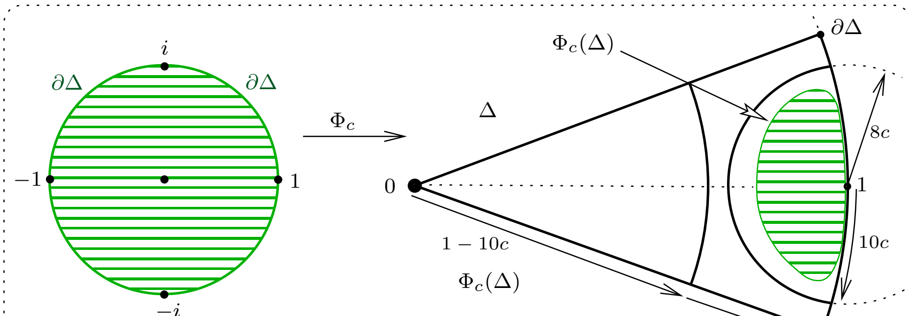


Fig. 17 : A sub-half-disc

l'élimination de p_1 conduit à un sous-ensemble fermé $\mathscr{C}_{p_1}$ d'un wedge $\mathscr{W}_{p_1}$ en p_1 dessiné comme suit :

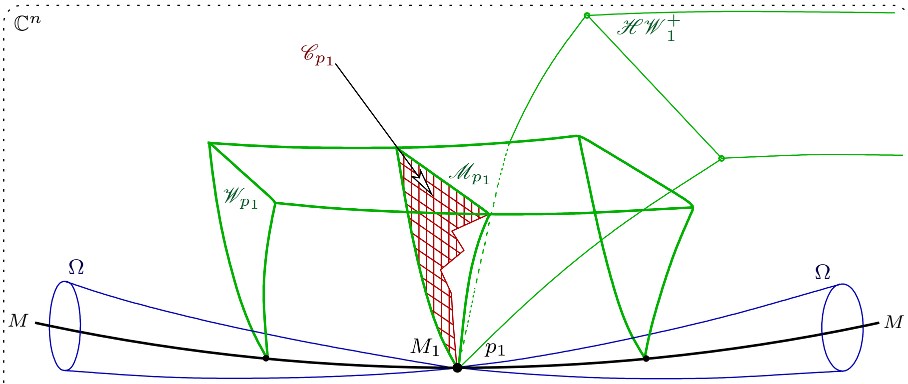


Fig. 20 : The proper closed subset $\mathscr{C}_{p_1}$ of the hypersurface $\mathscr{M}_{p_1} \subset \mathscr{W}_{p_1}$

La démonstration du Théorème 2.10 exige d'analyser la disposition des orbites CR au voisinage d'un point hyperbolique.

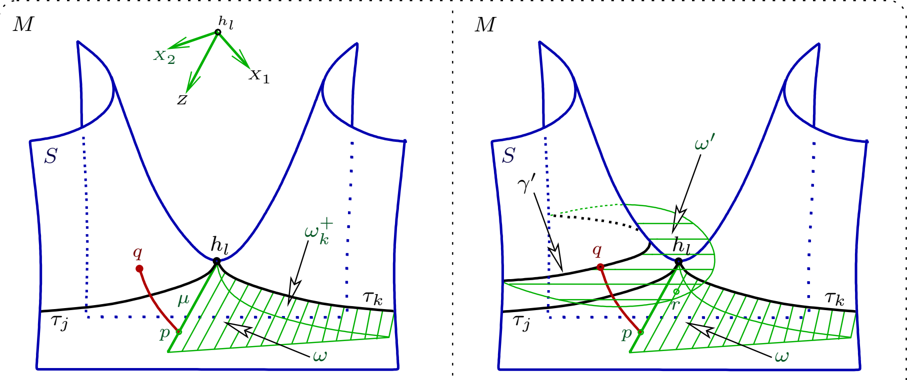


Fig. 25 : Behavior of the complex curve orbit around a hyperbolic point

2.14. Nécessité de la condition de non-transversalité au feuilletage caractéristique. L'énoncé suivant fournit l'analogue en dimension CR égale à 1 d'un théorème topologique obtenu par Jöricke-Shcherbina (Duke Math. J., 2000) en dimension CR $\geqslant 2$ (voir Théorème 7.6(VI) de [MP2006c])

Théorème 2.15. ([MP2006c]) *Il existe un triplet* (M, M^1, C)*, où*

- **(i)** $M \subset \mathbb{C}^3$ *est une sous-variété générique* $\mathscr{C}^\infty$ *de dimension CR égale à* 1 *difféomorphe à une boule réelle de dimension* 4 ;
- **(ii)** $M^1 \subset M$ *est une sous-variété* $\mathscr{C}^\infty$ *de codimension* 1 *qui est maximalement réelle et difféomorphe à une boule réelle de dimension* 3 ;
- **(iii)** C *est un compact de* M^1 *difféomorphe à un tore réel de dimension* 2 *qui est transverse en tout point au feuilletage caractéristique* $\mathscr{F}^c_{M^1}$*, donc viole la condition de non-transversalité* $\mathscr{F}^c_{M^1}\{C\}$;
- **(iv)** M *est de type* 4 *en tout point, donc globalement minimale,*

tel que C *n'est ni CR- ni* $\mathscr{W}$*- ni* L^{p}*-éliminable.*

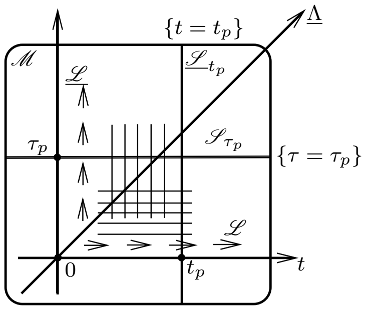
Nous pouvons donc conclure que le Théorème 2.13 apporte une réponse complète au problème principal soulevé par Jöricke en 1999.

§3. Analyticité d'applications de réflexion lisses ou formelles

La Partie II de [MP2006c] expose sans démonstrations nos résultats sur le principe de réflexion formel. Nous en proposons l'adaptation suivante. Les trois théorèmes principaux sont numérotés 3.23, 3.35 et 3.47. Pour une mise en perspective de la littérature concurrente, on se reportera à l'introduction étendue de [Me2005].

3.1. Sous-variétés génériques algébriques ou analytiques et leur complexification extrinsèque. Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ générique, algébrique réelle (au sens de Nash) ou analytique réelle, représentée par $v = \varphi(z, \bar{z}, u)$ dans des coordonnées $(z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, $w = u + i\, v$. Le théorème des fonctions implicites appliqué à $\frac{w - \bar{w}}{2i} = \varphi\left(z, \bar{z}, \frac{w+\bar{w}}{2}\right)$ permet de résoudre en les variables $\bar{w} \in \mathbb{C}^d$, ou bien en les variables $w \in \mathbb{C}^d$. On obtient ainsi deux collections équivalentes de d équations définissantes conjuguées, que l'on notera $w = \overline{\Theta}(z, \bar{z}, \bar{w})$ et $\bar{w} = \Theta(\bar{z}, z, w)$, où Θ est une série entière qui converge normalement dans un polydisque $\Delta_{2\rho_1}^{2m+d}$, pour $\rho_1 > 0$ suffisamment petit.

Les coordonnées $(z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ seront aussi notées $t \in \mathbb{C}^n$. Soit $\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ de nouvelles variables complexes. On définit la *complexification extrinsèque* $\mathscr{M} = (M)^c$ *de* M comme étant la sous-variété algébrique ou analytique complexe définie par $\xi - \Theta(\zeta, t) = 0$, ou, de manière équivalente, par $w = \overline{\Theta}(z, \tau)$.



La complexification d'une sous-variété analytique réelle porte une paire de feuilletages invariants qui sont les sous-variétés intégrales des complexifiés des champs de vecteurs de types $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et qui s'identifient aussi aux sous-variétés de Segre complexifiées.

GÉOMÉTRIE DE LA COMPLEXIFICATION $\mathscr{M}$

3.2. Variétés de Segre complexifiées et champs CR complexifiés. Soit $\tau_p, t_p \in \Delta_{\rho_1}^n$ fixés. Définissons la *variété de Segre complexifiée* $\mathscr{S}_{\tau_p}$ et la *variété de Segre complexifiée conjuguée* $\underline{\mathscr{S}}_{t_p}$ par :

$$\begin{cases} \mathscr{S}_{\tau_p} := \left\{(t,\, \tau) \in \Delta_{\rho_1}^n \times \Delta_{\rho_1}^n \,:\, \tau = \tau_p,\; w = \overline{\Theta}(z,\, \tau_p)\right\} & \text{et} \\ \underline{\mathscr{S}}_{t_p} := \left\{(t,\, \tau) \in \Delta_{\rho_1}^n \times \Delta_{\rho_1}^n \,:\, t = t_p,\; \xi = \Theta(\zeta,\, t_p)\right\}. \end{cases}$$

Géométriquement, on a $\mathscr{S}_{\tau_p} = \mathscr{M} \cap \{\tau = \tau_p\}$ et $\underline{\mathscr{S}}_{t_p} = \mathscr{M} \cap \{t = t_p\}$.

Définissons aussi les deux collections de champs de vecteurs :

$$\begin{cases} \mathscr{L}_k := \dfrac{\partial}{\partial z_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z, \zeta, \xi)\, \frac{\partial}{\partial w_j}, \quad k = 1, \ldots, m, & \text{et} \\ \underline{\mathscr{L}}_k := \dfrac{\partial}{\partial \zeta_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta, z, w)\, \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

On vérifie que $\mathscr{L}_k \left(w_j - \overline{\Theta}_j(z, \zeta, \xi)\right) \equiv 0$, ce qui montre que les champs $\mathscr{L}_k$ sont tangents à $\mathscr{M}$. De manière similaire, $\underline{\mathscr{L}}_k \left(\xi_j - \Theta_j(\zeta, z, w)\right) \equiv 0$, donc les champs $\underline{\mathscr{L}}_k$ sont aussi tangents à $\mathscr{M}$. De plus, $[\mathscr{L}_k,\, \mathscr{L}_{k'}] = 0$ et $[\underline{\mathscr{L}}_k,\, \underline{\mathscr{L}}_{k'}] = 0$ pour $k,\, k' = 1, \dots, m$, donc le théorème de Frobenius s'applique. En fait, les variétés intégrales de dimension m de chacune des deux collections $\{\mathscr{L}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$ et $\{\underline{\mathscr{L}}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$ ne sont autres que les $\mathscr{S}_{\tau_p}$ et les $\underline{\mathscr{S}}_{t_p}$. En résumé, $\mathscr{M}$ porte une paire fondamentale de feuilletages.

Observons que les champs $\mathscr{L}_k$ sont les complexifications des champs $L_k := \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z, \bar{z}, \bar{w}) \frac{\partial}{\partial w_j}$, $k = 1, \dots, m$, qui engendrent $T^{1,0}M$.

Introduisons les flots multiples de la collection $\{\mathscr{L}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$ et de la collection $\{\underline{\mathscr{L}}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$. Si $p \in \mathscr{M}$ a pour coordonnées $(w_p, z_p, \zeta_p, \xi_p) \in \Delta_{\rho_1}^m \times \Delta_{\rho_1}^d \times \Delta_{\rho_1}^m \times \Delta_{\rho_1}^d$ satisfaisant $w_p = \overline{\Theta}(z_p, \zeta_p, \xi_p)$ et $\xi_p = \Theta(\zeta_p, z_p, w_p)$ et si $z_1 := (z_{1,1}, \dots, z_{1,m}) \in \mathbb{C}^m$ est un petit paramètre multi-temporel, on définit le flot multiple de $\mathscr{L}$ par :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{z_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) &:= \exp\left(z_1 \mathscr{L}\right)(p) \\
&:= \exp\left(z_{1,1} \mathscr{L}_1 (\cdots (\exp(z_{1,m} \mathscr{L}_m(p))) \cdots)\right) \\
&:= \left(z_p + z_1, \overline{\Theta}(z_p + z_1, \zeta_p, \xi_p), \zeta_p, \xi_p\right).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Évidemment, $\mathscr{L}_{z_1}(p) \in \mathscr{M}$. De manière similaire, pour $p \in \mathscr{M}$ et pour $\zeta_1 \in \mathbb{C}^m$, si on définit :

$$
\underline{\mathscr{L}}_{\zeta_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := (z_p, w_p, \zeta_p + \zeta_1, \Theta(\zeta_p + \zeta_1, z_p, w_p)),
\tag{3.4}
$$

on aura $\underline{\mathscr{L}}_{\zeta_1}(p) \in \mathscr{M}$. Clairement, $(p, z_1) \mapsto \mathscr{L}_{z_1}(p)$ et $(p, \zeta_1) \mapsto \underline{\mathscr{L}}_{\zeta_1}(p)$ sont des applications algébriques ou analytiques locales.

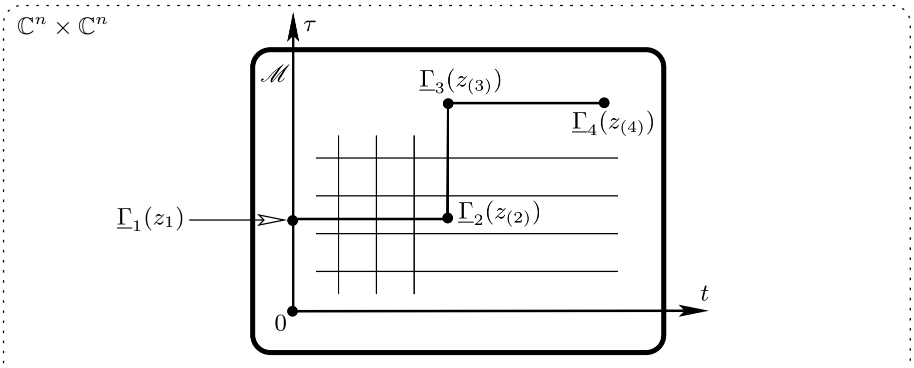
3.5. Chaînes de Segre. Partons de l'origine $p = 0$ et déplaçons-nous le long de la variété de Segre conjuguée complexifiée $\underline{\mathscr{S}}_0$ d'une hauteur de $z_1 \in \mathbb{C}^m$, *i.e.* considérons le point $\underline{\mathscr{L}}_{z_1}(0)$, que nous noterons aussi $\underline{\Gamma}_1(z_1)$. On a $\underline{\Gamma}_1(0) = 0$. Soit $z_2 \in \mathbb{C}^m$. Repartons du point $\underline{\Gamma}_1(z_1)$, déplaçons-nous horizontalement le long de la variété de Segre complexifiée d'une longueur de $z_2 \in \mathbb{C}^m$, *i.e.* considérons le point

$$\underline{\Gamma}_2(z_1, z_2) := \mathscr{L}_{z_2}(\underline{\mathscr{L}}_{z_1}(0)).$$

Ensuite, définissons $\underline{\Gamma}_3(z_1, z_2, z_3) := \underline{\mathscr{L}}_{z_3}(\mathscr{L}_{z_2}(\underline{\mathscr{L}}_{z_1}(0)))$, et encore

$$\underline{\Gamma}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) := \mathscr{L}_{z_4}(\underline{\mathscr{L}}_{z_3}(\mathscr{L}_{z_2}(\underline{\mathscr{L}}_{z_1}(0)))),$$

et cætera. Dessinons un diagramme :



CHAÎNES DE SEGRE DANS $\mathscr{M}$

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, nous obtenons des applications algébriques ou analytiques locales $\underline{\Gamma}_k(z_1, \dots, z_k)$, à valeurs dans $\mathscr{M}$, qui sont définies pour $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}^m$ suffisamment petits et qui satisfont $\underline{\Gamma}_k(0, \dots, 0) = 0$. L'application $\underline{\Gamma}_k$ est appelée *k-ième chaîne de Segre conjuguée* ([Me2005, MP2006c]).

Si nous avions conduit cette procédure en commençant par $\mathscr{L}$ à la place de $\underline{\mathscr{L}}$, nous aurions obtenu des applications $\Gamma_1(z_1) := \mathscr{L}_{z_1}(0)$, $\Gamma_2(z_{(2)}) := \underline{\mathscr{L}}_{z_2}(\mathscr{L}_{z_1}(0))$, *etc.*, et généralement $\Gamma_k(z_{(k)})$. Les applications Γ_k sont appelées *k-ièmes chaînes de Segre*.

Il y a une relation de symétrie entre Γ_k et $\underline{\Gamma}_k$. En effet, soit $\overline{\sigma}$ l'involution antiholomorphe $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ définie par $\overline{\sigma}(t, \tau) := (\bar{\tau}, \bar{t})$. Puisque l'on a $w = \overline{\Theta}(z, \zeta, \xi)$ si et seulement si l'on a $\xi = \Theta(\zeta, z, w)$, cette involution est une bijection de $\mathscr{M}$. En appliquant $\overline{\sigma}$ aux définitions (3.3) et (3.4) des flots multiples de $\mathscr{L}$ et de $\underline{\mathscr{L}}$, on peut vérifier que $\overline{\sigma}(\mathscr{L}_{z_1}(p)) = \underline{\mathscr{L}}_{\bar{z}_1}(\overline{\sigma}(p))$. On en déduit la relation de symétrie générale $\overline{\sigma}\left(\Gamma_k(z_{(k)})\right) = \underline{\Gamma}_k\left(\overline{z_{(k)}}\right)$.

3.6. Minimalité de $\mathscr{M}$ à l'origine et orbites CR locales complexifiées. Puisque $\Gamma_k(0) = \underline{\Gamma}_k(0) = 0$, pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe $\delta_k > 0$ suffisamment petit tel que $\Gamma_k(z_{(k)})$ et $\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})$ appartiennent à $\mathscr{M}$ pour tout $z_{(k)} \in \Delta_{\delta_k}^{mk}$.

Théorème 3.7. ([Me2001, Me2005, MP2006c]) *Il existe deux entiers e avec $0 \leqslant e \leqslant d$ et ν_0 avec $0 \leqslant \nu_0 \leqslant d$, caractérisés par la propriété que $\nu_0 + 1$ est le plus petit entier k tel que les applications Γ_k et $\underline{\Gamma}_k$ sont de rang générique maximal égal à $2m + e$, pour tout $k \geqslant \nu_0 + 1$. De plus, pour $k = \mu_0 := 2\nu_0 + 1$, les applications Γ_{μ_0} et $\underline{\Gamma}_{\mu_0}$ sont de rang $2m + e$ en des points $z^*_{(\mu_0)} \in \Delta^{m\mu_0}_{\delta_{\mu_0}}$ et $\underline{z}^*_{(\mu_0)} \in \Delta^{m\mu_0}_{\delta_{\mu_0}}$ satisfaisant $\Gamma_{\mu_0}(z^*_{(\mu_0)}) = 0$ et $\underline{\Gamma}_{\mu_0}(\underline{z}^*_{(\mu_0)}) = 0$ qui sont arbitrairement proches de l'origine dans $\Delta^{m\mu_0}_{\delta_{\mu_0}}$. Si ω^* ou $\underline{\omega}^*$ est un petit voisinage ouvert connexe de $z^*_{(\mu_0)}$ ou de $\underline{z}^*_{(\mu_0)}$, l'image $\Gamma_{\mu_0}(\omega^*)$ ou $\underline{\Gamma}_{\mu_0}(\underline{\omega}^*)$ constitue une feuille de Nagano passant par l'origine du système $\{\mathscr{L}, \underline{\mathscr{L}}\}$.*

Soit $\pi_t(t,\tau) := 0$ et $\pi_\tau(t,\tau) := \tau$ les deux projections canoniques associées au produit $\Delta^n_{\rho_1} \times \Delta^n_{\rho_1}$. Soit $\underline{A} := \{(t,\bar{t})\}$ la diagonale antiholomorphe.

- La complexification extrinsèque $\left[\mathscr{O}_{L,\overline{L}}(M,0)\right]^c = \mathscr{O}_{\mathscr{L},\underline{\mathscr{L}}}(\mathscr{M},0)$.
- La projection $\pi_t\left(\underline{A} \cap \mathscr{O}_{\mathscr{L},\underline{\mathscr{L}}}(\mathscr{M},0)\right) = \mathscr{O}_{L,\overline{L}}(M,0)$.

Théorème 3.8. ([Me2001]) *L'orbite CR locale $\mathscr{O}_{L,\overline{L}}(M,0)$ est algébrique si M l'est.*

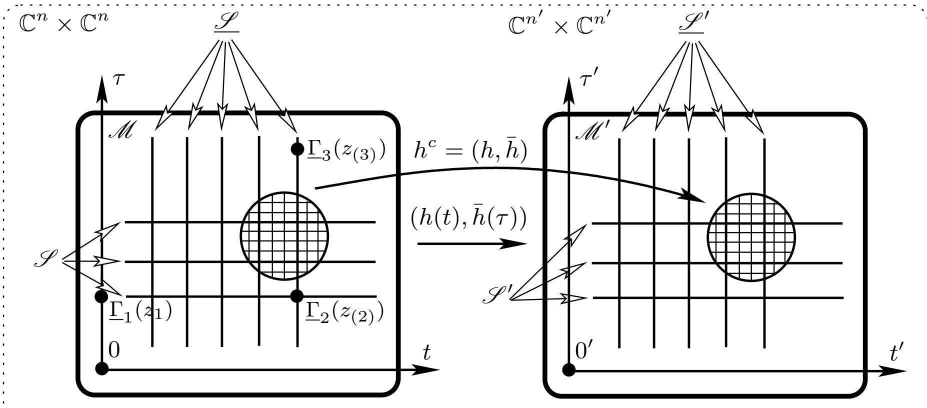
Définition 3.9. La variété générique M (ou sa complexification extrinsèque $\mathscr{M}$) est dite *minimale à l'origine* si $\mathscr{O}_{L,\overline{L}}(M,0)$ contient un voisinage de 0 dans M, ou de manière équivalente si $\mathscr{O}_{\mathscr{L},\underline{\mathscr{L}}}(\mathscr{M},0)$ contient un voisinage de 0 dans $\mathscr{M}$.

3.10. Les applications formelles complexifiées respectent les paires de feuilletages. Soit $n' \in \mathbb{N}$ avec $n' \geqslant 1$ et soit $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ une deuxième sous-variété générique de codimension $d' \geqslant 1$ et de dimension CR $m' = n' - d' \geqslant 1$. Soit $p' \in M'$. Il existe des coordonnées locales $t' = (z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ centrées en p' dans lesquelles M' est représentée par $\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}', t')$, ou de manière équivalente par $w' = \overline{\Theta}'(z', \bar{t}')$. Si $(\bar{t}')^c = \tau' = (\zeta', \xi') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$, la complexification extrinsèque de M' est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$, ou de manière équivalente par $w' = \overline{\Theta}'(z', \tau')$.

Soit $t \in \mathbb{C}^n$ et soit $h(t) = (h_1(t), \dots, h_{n'}(t)) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{n'}$ une application formelle sans terme constant, *i.e.* $h(0) = 0'$. On a $(\overline{h(t)})^c = \overline{h}((\bar{t})^c) = \overline{h}(\tau)$. Définissons $h^c(t,\tau) := (h(t), \overline{h}(\tau))$.

Posons $r(t,\tau) := \xi - \Theta(\zeta, t)$, posons $\overline{r}(\tau, t) := w - \overline{\Theta}(z,\tau)$, posons $r'(t',\tau') := \xi' - \Theta'(\zeta', t')$ et posons $\overline{r}'(\tau', t') := w' - \overline{\Theta}'(z', \tau')$. On dit que h est une *application CR formelle* entre $(M,0)$ et $(M',0')$ s'il existe une matrice de taille $d' \times d$ de séries formelles $\overline{b}(\bar{t}, t)$ telle que $\overline{r}'\left(\overline{h}(\bar{t}), h(t)\right) \equiv \overline{b}(\bar{t},t)\, \overline{r}(\bar{t}, t)$ dans $\mathbb{C}[\![t,\bar{t}]\!]^{d'}$. Cette condition est indépendante du choix des coordonnées locales et du choix des équations définissantes pour $(M,0)$ et pour $(M',0')$. Puisque h n'est que formelle, nous écrirons $h : (M,0) \to_{\mathscr{F}} (M',0')$. Lorsque h est convergente, c'est une vraie application ponctuelle d'un voisinage de 0 dans M à valeurs dans un voisinage de $0'$ dans M'.

Par complexification, on a $\overline{r}'\left(\overline{h}(\tau), h(t)\right) \equiv \overline{b}(\tau,t)\, \overline{r}(\tau,t)$ dans $\mathbb{C}[\![t,\tau]\!]^{d'}$, *i.e.* $h^c(t,\tau) = (h(t), \overline{h}(\tau))$ est une application formelle entre $(\mathscr{M},0)$ et $(\mathscr{M}',0')$. Si h est holomorphe dans un polydisque $\Delta^n_{\rho_1}$, $\rho_1 > 0$, sa complexification h^c envoie les espaces de coordonnées $\{t = \mathrm{cst.}\}$ et $\{\tau = \mathrm{cst.}\}$ vers les espaces de coordonnées $\{t' = \mathrm{cst.}\}$ et $\{\tau' = \mathrm{cst.}\}$. De manière équivalente, h^c envoie les variétés de Segre complexifiées (conjuguées) de la source vers les variétés de Segre complexifiées (conjuguées) de la cible.



LES APPLICATIONS FORMELLES COMPLEXIFIÉES RESPECTENT LES PAIRES DE FEUILLETAGES

Définition 3.11. Une application formelle $h(t)$ de composantes $h_{i'}(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$, $i' = 1, \ldots, n'$, est dite :

(1) *inversible* si $n' = n$ et $\det\left([\partial h_{i_1} / \partial t_{i_2}](0)\right)_{1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant n} \neq 0$;

(2) *submersive* si $n \geqslant n'$ et s'il existe des entiers $1 \leqslant i(1) < \cdots < i(n') \leqslant n$ tels que $\det\left([\partial h_{i'_1} / \partial t_{i(i'_2)}](0)\right)_{1 \leqslant i'_1, i'_2 \leqslant n'} \neq 0$;

(3) *finie* si l'idéal engendré par les composantes $h_1(t), \ldots, h_{n'}(t)$ est de codimension finie dans $\mathbb{C}[\![t]\!]$; ceci implique $n' \geqslant n$;

(4) *dominante* si $n \geqslant n'$ et s'il existe des entiers $1 \leqslant i(1) < \cdots < i(n') \leqslant n$ tels que $\det([\partial h_{i'_1} / \partial t_{i(i'_2)}](t))_{1 \leqslant i'_1, i'_2 \leqslant n'} \not\equiv 0$ dans $\mathbb{C}[\![t]\!]$;

(5) *transversale* s'il n'existe pas de série formelle non nulle $G(t'_1, \ldots, t'_{n'}) \in \mathbb{C}[\![t'_1, \ldots, t'_{n'}]\!]$ telle que $G(h_1(t), \ldots, h_{n'}(t)) \equiv 0$ dans $\mathbb{C}[\![t]\!]$.

3.12. Jets de variétés de Segre. La variété de Segre complexifiée conjuguée associée à un $t' \in \mathbb{C}^{n'}$ fixé est $\underline{\mathscr{S}}'_{t'} := \{(\zeta', \xi') \in \mathbb{C}^{n'} : \xi' = \Theta'(\zeta', t')\}$. Pour $k' \in \mathbb{N}$, définissons le *morphisme des k'-jets des variétés de Segre complexifiées conjuguées* par :

$$\varphi'_{k'}(\zeta', t') := J^{k'}_{\tau'} \underline{\mathscr{S}}_{t'} := \left(\zeta',\ \left(\frac{1}{\beta'!} \, \partial^{\beta'}_{\zeta'} \Theta'_{j'}(\zeta', t') \right)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\ \beta' \in \mathbb{N}^{m'},\ |\beta'| \leqslant k'} \right).$$

On dira que M' (ou $\mathscr{M}'$) est :

(nd1) *Levi non-dégénérée à l'origine* si φ'_1 est de rang $m' + n'$ en $(\zeta', t') = (0', 0')$;

(nd2) *finiment non-dégénérée à l'origine* s'il existe un entier ℓ'_0 tel que $\varphi'_{k'}$ est de rang $n' + m'$ en $(\zeta', t') = (0', 0')$, pour $k' \geqslant \ell'_0$;

(nd3) *essentiellement finie à l'origine* s'il existe un entier ℓ'_0 tel que $\varphi'_{k'}$ est une application holomorphe finie en $(\zeta', t') = (0', 0')$, pour $k' \geqslant \ell'_0$;

(nd4) *Segre non-dégénérée à l'origine* s'il existe un entier ℓ'_0 tel que la restriction de $\varphi'_{k'}$ à la variété de Segre complexifiée $\mathscr{S}'_0$ est de rang générique m', pour $k' \geqslant \ell'_0$;

(nd5) *holomorphiquement non-dégénérée* s'il existe un entier ℓ'_0 tel que l'application $\varphi'_{k'}$ est de rang générique maximal possible, égal à $m' + n'$, pour $k' \geqslant \ell'_0$.

Théorème 3.13. ([Me2005, MP2006c]) *Ces cinq conditions de non-dégénérescence sont invariantes par biholomorphisme local et l'on a* : **(nd1)** $\Rightarrow$ **(nd2)** $\Rightarrow$ **(nd3)** $\Rightarrow$ **(nd4)** $\Rightarrow$ **(nd5)**.

La dernière condition **(nd5)**, non ponctuelle, est la plus fine.

Pour expliquer l'invariance biholomorphe de $\varphi'_{k'}$, considérons un biholomorphisme local $t' \mapsto h'(t') = t''$, où $t', t'' \in \mathbb{C}^{n'}$, qui fixe l'origine, $h'_{i'}(t') \in \mathbb{C}\{t'\}$, $h'_{i'}(0) = 0'$, pour $i' = 1, \dots, n'$. Si on décompose les coordonnées $t'' = (z'', w'') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$, l'image M'' est représentée de manière similaire par $\bar{w}'' = \Theta''(\bar{z}'', t'')$ et il existe une matrice $b'(t', \tau')$ de taille $d' \times d'$ de fonctions holomorphes locales telle que

$$r''\big(h'(t'), \overline{h}'(\tau')\big) \equiv b'(t', \tau')\, r'(t', \tau'),$$

dans $\mathbb{C}\{t', \tau'\}^{d'}$, où $r'_{j'}(t', \tau') := \xi'_{j'} - \Theta'_{j'}(\zeta', t')$ et $r''_{j'}(t'', \tau'') := \xi''_{j'} - \Theta''_{j'}(\zeta'', t'')$, pour $j' = 1, \dots, d'$. Si l'on pose $h'(t') := (f'(t'), g'(t')) \in \mathbb{C}\{t'\}^{m'} \times \mathbb{C}\{t'\}^{d'}$ et si l'on remplace ξ' par $\Theta'(\zeta', t')$ dans cette identité, le membre de droite s'annule identiquement et on obtient l'identité formelle suivante dans $\mathbb{C}\{\zeta', t'\}^{d'}$:

$$\overline{g}'\,(\zeta', \Theta'(\zeta', t')) \equiv \Theta''\big(\overline{f}'(\zeta', \Theta'(\zeta', t')), h'(t')\big).$$

Lemme 3.14. ([Me2005, MP2006c]) *Pour tout $j' = 1, \dots, d'$ et tout $\beta' \in \mathbb{N}^{m'}$, il existe une application rationnelle universelle $Q'_{j',\beta'}$ dont l'expression ne dépend ni de $\mathscr{M}'$, ni de h', ni de $\mathscr{M}''$, telle que les identités suivantes sont satisfaites dans $\mathbb{C}\{\zeta', t'\}$* :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta'!}\,\frac{\partial^{|\beta'|}\Theta''_{j'}}{\partial(\zeta'')^{\beta'}}\Big(\overline{f}'(\zeta', \Theta'(\zeta', t')),\ h'(t')\Big) \equiv \\
&\equiv Q'_{j',\beta'}\bigg(\Big(\partial_{\zeta'}^{\beta'_1}\Theta'_{j'_1}(\zeta', t')\Big)_{1 \leqslant j'_1 \leqslant d',\, |\beta'_1| \leqslant |\beta'|},\ \Big(\partial_{\tau'}^{\alpha'_1}\overline{h}'_{i'_1}(\zeta', \Theta'(\zeta', t'))\Big)_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n', |\alpha'_1| \leqslant |\beta'|}\bigg) \\
&=: R'_{j',\beta'}\bigg(\zeta',\ \Big(\partial_{\zeta'}^{\beta'_1}\Theta_{j'_1}(\zeta', t')\Big)_{1 \leqslant j'_1 \leqslant d',\, |\beta'_1| \leqslant |\beta'|}\bigg).
\end{aligned}$$

Ici, $Q'_{j',\beta'}$ est holomorphe dans un voisinage du jet constant

$$\Big((\partial_{\zeta'}^{\beta'_1}\Theta'_{j'_1}(0,0))_{1 \leqslant j'_1 \leqslant d',\, |\beta'_1| \leqslant |\beta'|},\ (\partial_{\tau'}^{\alpha'_1}\overline{h}'_{i'_1}(0,0))_{1 \leqslant i'_1 \leqslant n,\, |\alpha'_1| \leqslant |\beta'|}\Big).$$

L'existence de $R'_{j',\beta'}$ montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{M},0) & \xrightarrow{(h')^c} & (\mathscr{M}',0') \\ {\scriptstyle J^{k'}_\bullet \mathscr{L}_\bullet}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J^{k'}_\bullet \mathscr{L}'_\bullet} \\ \mathbb{C}^{m+N_{d',m',k'}} & \xrightarrow{R'_{k'}((h')^c)} & \mathbb{C}^{m+N_{d',m',k'}} \end{array},$$

où l'application $R'_{k'}((h')^c)$ est définie par ses composantes $R'_{j',\beta'}$ pour $j' = 1, \dots, d'$ et pour $|\beta'| \leqslant k'$. Grâce à l'inversibilité de $R'_{k'}((h')^c)$, on déduit l'invariance des cinq conditions **(nd1)**, **(nd2)**, **(nd3)**, **(nd4)** et **(nd5)** ([Me2005, MP2006c]).

Présentons maintenant l'*application de Segre* de M'. En développant $\Theta'_{j'}(\zeta', t')$ en puissances de ζ', on peut écrire les équations de $\mathscr{M}'$ sous la forme $\xi'_{j'} = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \, \Theta'_{j',\gamma'}(t')$ pour $j' = 1, \dots, d'$. L'*application de Segre infinie* de M' est alors :

$$\mathscr{Q}'_\infty : \ \mathbb{C}^{n'} \ni t' \longmapsto \big(\Theta'_{j',\gamma'}(t')\big)_{1 \leqslant j' \leqslant d', \ \gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \in \mathbb{C}^\infty.$$

Si $k' \in \mathbb{N}$, on définit la *k'-ième application de Segre* de M' :

$$\mathscr{Q}'_{k'} : \ \mathbb{C}^{n'} \ni t' \longmapsto (\Theta'_{j',\gamma'}(t'))_{1 \leqslant j' \leqslant d', \, |\gamma'| \leqslant k'} \in \mathbb{C}^{N'_{d',n',k'}},$$

où $N'_{d',n',k'} = d' \, \frac{(n'+k')!}{n'! \; k'!}$. Si $k'_2 \geqslant k'_1$, on a $\pi'_{k'_2,k'_1}\big[\mathscr{Q}'_{k'_2}(t')\big] = \mathscr{Q}'_{k'_1}(t')$. On vérifie ([Me2005, MP2006c]) les caractérisations suivantes.

(nd1) M' est *Levi non-dégénérée à l'origine* si et seulement si $\mathscr{Q}'_1$ est de rang n' en $t' = 0'$.

(nd2) M' est *finiment non-dégénérée à l'origine* si et seulement si il existe un entier ℓ'_0 tel que $\mathscr{Q}'_{k'}$ est de rang n' en $t' = 0'$, pour tout $k' \geqslant \ell'_0$.

(nd3) M' est *essentiellement finie à l'origine* si et seulement si il existe un entier ℓ'_0 tel que $\mathscr{Q}'_{k'}$ est une application holomorphe finie en $t' = 0'$, pour tout $k' \geqslant \ell'_0$.

(nd4) M' est *Segre non-dégénérée à l'origine* si et seulement si il existe un entier ℓ'_0 tel que la restriction de $\mathscr{Q}'_{k'}$ à la variété de Segre complexifiée $\mathscr{S}'_{0'}$ est de rang générique m', pour tout $k' \geqslant \ell'_0$.

(nd5) M' est *holomorphiquement non-dégénérée à l'origine* si et seulement si il existe un entier ℓ'_0 tel que l'application $\mathscr{Q}'_{k'}$ est de rang générique égal à n', pour tout $k' \geqslant \ell'_0$.

3.15. Conditions CR-horizontales de non-dégénérescence. Soit $h = h(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{n'}$ une application CR formelle $(M,0) \to_{\mathscr{F}} (M',0')$. Décomposons $h(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{m'} \times \mathbb{C}[\![t]\!]^{d'}$. Si on remplace w par $\overline{\Theta}(z,\tau)$ dans l'identité fondamentale $\overline{r}'\big(\overline{h}(\tau), h(t)\big) \equiv \overline{b}(\tau,t)\,\overline{r}(\tau,t)$, le membre de droite s'annule identiquement et on obtient l'identité formelle suivante dans $\mathbb{C}[\![z,\tau]\!]^{d'}$:

$$g\big(z, \overline{\Theta}(z,\tau)\big) \equiv \overline{\Theta}'\left(f(z,\overline{\Theta}(z,\tau)), \overline{h}(\tau)\right).$$

Posant $\tau := 0$, on obtient $g\left(z, \overline{\Theta}(z,0)\right) \equiv \overline{\Theta}'\big(f(z,\overline{\Theta}(z,0)), 0\big)$. En d'autres termes, $h|_{\mathscr{S}_0}$ est une application formelle entre $\mathscr{S}_0$ et $\mathscr{S}'_{0'}$. La restriction $h|_{\mathscr{S}_0}$ coïncide avec l'application formelle :

$$\mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathscr{F}} \Big(f\left(z, \overline{\Theta}(z,0)\right),\ \overline{\Theta}'\left(f\left(z,\overline{\Theta}(z,0)\right),\ 0\right)\Big) \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}.$$

Les propriétés de rang de cette application sont les mêmes que celles de sa *partie CR-horizontale* :

$$\mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathscr{F}} f\left(z, \overline{\Theta}(z,0)\right) \in \mathbb{C}^{m'}.$$

L'application CR formelle h est dite ([Me2005, MP2006c]) :

- **(cr1)** *CR-inversible* à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une équivalence formelle en $z = 0$;
- **(cr2)** *CR-submersive* à l'origine si $m' \leqslant m$ et si sa partie CR-horizontale est une submersion formelle en $z = 0$;
- **(cr3)** *CR-finie* à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une application formelle finie en $z = 0$, c'est-à-dire que l'anneau quotient $\mathbb{C}[\![z]\!] / \left(f_{k'}(z, \overline{\Theta}(z,0))_{1 \leqslant k' \leqslant m'}\right)$ est de dimension finie ;
- **(cr4)** *CR-dominante* à l'origine si $m' \leqslant m$ et si il existe des entiers $1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m') \leqslant m$ tels que le déterminant
  $$\det([\partial \varphi_{k'_1} / \partial z_{k(k'_2)}](z))_{1 \leqslant k'_1, k'_2 \leqslant m'} \not\equiv 0$$
  ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$, où $\varphi_{k'}(z) := f_{k'}\big(z, \overline{\Theta}(z,0)\big)$;
- **(cr5)** *CR-transversale* à l'origine s'il n'existe pas de série formelle non nulle $F'(f_1, \dots, f_{m'}) \in \mathbb{C}[\![f_1, \dots, f_{m'}]\!]$ telle que $F'(\varphi_1(z), \dots, \varphi_{m'}(z)) \equiv 0$ dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$, où $\varphi_{k'}(z) := f_{k'}\big(z, \overline{\Theta}(z,0)\big)$.

On vérifie ([Me2005, MP2006c]) l'invariance biholomorphe de ces cinq conditions ainsi que les quatre implications :

$$\textbf{(cr1)} \Rightarrow \textbf{(cr2)} \Rightarrow \textbf{(cr3)} \Rightarrow \textbf{(cr4)} \Rightarrow \textbf{(cr5)},$$

pourvu que $m' = m$ dans la seconde et dans la troisième.

3.16. Conditions de non-dégénérescence pour les applications CR formelles. Soit $h^c : (\mathscr{M}, 0) \to_{\mathscr{F}} (\mathscr{M}', 0)$ une application formelle CR complexifiée entre $\mathscr{M} : 0 = r(t, \tau) := \xi - \Theta(\zeta, t)$ et $\mathscr{M}' : 0 = r'(t', \tau') := \xi' - \Theta'(\zeta', t')$. Par hypothèse, $r'(h(t), \overline{h}(\tau)) \equiv b(t, \tau)\, r(t, \tau)$. Notons $h = (f, g) \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$, remplaçons ξ par $\Theta(\zeta, t)$ dans $r'(h(t), \overline{h}(\tau)) \equiv b(t, \tau)\, r(t, \tau)$ et développons $\Theta'(\bar{f}, h) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \bar{f}^{\gamma'}\, \Theta'_{\gamma'}(h)$. On obtient l'identité formelle suivante dans $\mathbb{C}[\![\zeta, t]\!]^{d'}$:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\zeta, \Theta(\zeta, t)) &\equiv \Theta'\big(\bar{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)\big) \\
&\equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \bar{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t))^{\gamma'}\, \Theta'_{\gamma'}(h(t)).
\end{aligned}
$$

Soit les m champs de vecteurs $\underline{\mathscr{L}}_1, \dots, \underline{\mathscr{L}}_m$. Pour tout $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$, on définit la dérivation multiple $\underline{\mathscr{L}}^\beta = \underline{\mathscr{L}}_1^{\beta_1} \cdots \underline{\mathscr{L}}_m^{\beta_m}$ et on l'applique aux identités précédentes :

$$
\underline{\mathscr{L}}^\beta \big[\bar{g}_{j'}(\tau) - \Theta_{j'}(\bar{f}(\tau), h(t))\big] =: R'_{j',\beta}\big(t, \tau, J_\tau^{|\beta|} \bar{h}(\tau) : h(t)\big) \equiv 0,
$$

pour $j' = 1, \dots, d'$.

Définition 3.17. L'application CR formelle $h : (M, 0) \to_{\mathscr{F}} (M', 0')$ est dite :

(h1) *Levi non-dégénérée* à l'origine si l'application

$$
t' \mapsto \big(R'_{j',\beta}(0, 0, J_\tau^{|\beta|} \bar{h}(0) : t')\big)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\, |\beta| \leqslant 1}
$$

est de rang n' en $t' = 0'$;

(h2) *finiment non-dégénérée* à l'origine s'il existe un entier ℓ_1 tel que l'application

$$
t' \mapsto \big(R'_{j',\beta}(0, 0, J_\tau^{|\beta|} \bar{h}(0) : t')\big)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\, |\beta| \leqslant k}
$$

est de rang n' en $t' = 0'$, pour tout $k \geqslant \ell_1$;

(h3) *essentiellement finie* à l'origine s'il existe un entier ℓ_1 tel que l'application

$$
t' \mapsto \big(R'_{j',\beta}(0, 0, J_\tau^{|\beta|} \bar{h}(0) : t')\big)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\, |\beta| \leqslant k}
$$

est localement finie en $t' = 0'$, pour tout $k \geqslant \ell_1$;

(h4) *Segre non-dégénérée* à l'origine s'il existe un entier ℓ_1, des entiers $j'^{\,1}_*, \dots, j'^{\,n'}_*$ avec $1 \leqslant j'^{\,i'}_* \leqslant d'$ pour $i' = 1, \dots, n'$ et des multiindices $\beta^1_*, \dots, \beta^{n'}_*$ avec $|\beta^{i'}_*| \leqslant \ell_1$ pour $i' = 1, \dots, n'$, tels que le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial R'_{j'^{i'_1}_*,\beta^{i'_1}_*}}{\partial t'_{i'_2}}\left(z,\overline{\Theta}(z,0),0,0,J^{|\beta^{i'_1}_*|}\bar{h}(0):\,h(z,\overline{\Theta}(z,0))\right)\right)_{1\leqslant i'_1,i'_2\leqslant n'}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$;

(h5) *holomorphiquement non-dégénérée* à l'origine s'il existe un entier ℓ_1, des entiers $j'^1_*,\dots,j'^{n'}_*$ avec $1\leqslant j'^{i'}_*\leqslant d'$ pour $i'=1,\dots,n'$ et des multiindices $\beta^1_*,\dots,\beta^{n'}_*$ avec $|\beta^{i'}_*|\leqslant\ell_1$ pour $i'=1,\dots,n'$, tels que le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial R'_{j'^{i'_1}_*,\beta^{i'_1}_*}}{\partial t'_{i'_2}}\left(0,0,0,0,J^{|\beta^{i'_1}_*|}\bar{h}(0):\,h(t)\right)\right)_{1\leqslant i'_1,i'_2\leqslant n'}$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[\![t]\!]$.

Lemme 3.18. ([Me2005, MP2006c]) *Soit $h:(M,0)\to_{\mathscr{F}}(M',0')$ une application CR formelle.*

(1) *Si h est Levi non-dégénérée en 0, alors M' est nécessairement Levi non-dégénérée en $0'$.*

(2) *Si h est finiment non-dégénérée en 0, alors M' est nécessairement finiment non-dégénérée en $0'$.*

(3) *Si h est essentiellement finie en 0, alors M' est nécessairement essentiellement finie en $0'$.*

(4) *Si h Segre non-dégénérée en 0, alors M' est nécessairement Segre non-dégénérée en $0'$.*

(5) *Si h est holomorphiquement non-dégénérée en 0, alors M' est nécessairement holomorphiquement non-dégénérée en $0'$.*

La CR-transversalité de h en 0 est la condition la plus fine assurant des réciproques.

Théorème 3.19. ([Me2005, MP2006c]) *Supposons l'application CR formelle $h:(M,0)\to_{\mathscr{F}}(M',0')$ CR-transversale en 0.*

(1) *Si M' est Levi non-dégénérée en $0'$, alors h est finiment non-dégénérée en 0.*

(2) *Si M' est finiment non-dégénérée en $0'$, alors h est finiment non-dégénérée en 0.*

(3) *Si M' est essentiellement finie en $0'$, alors h est essentiellement finie en 0.*

(4) *Si M' est Segre non-dégénérée en $0'$, alors h Segre non-dégénérée en 0.*

(5) *Si M' est holomorphiquement non-dégénérée et si de plus h est transversale en 0, alors h est holomorphiquement non-dégénérée en 0.*

En particulier, ces cinq implications sont vraies lorsque h est CR-inversible, CR-submersive, CR-finie avec $m = m'$ ou CR-dominante. Certains de ces énoncés (mais pas tous) apparaissent dans la littérature du sujet.

3.20. Versions classiques du principe de réflexion. Soit $h : (M, 0) \to_{\mathscr{F}} (M', 0)$ une application CR formelle. Supposons M minimale en 0.

Théorème 3.21. ([Me2005, MP2006c]) *Si M et M' sont analytiques réelles, si h est Levi non-dégénérée, ou finiment non-dégénérée, ou essentiellement finie, ou Segre non-dégénérée à l'origine, alors $h(t)$ est convergente, i.e. $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$. Si, de plus, M et M' sont algébriques, alors h est algébrique.*

Avec des hypothèses de non-dégénérescence séparées sur h et sur $(M', 0')$, on obtient une combinatoire d'énoncés possibles. Certains d'entre eux (mais pas tous) apparaissent dans la littérature du sujet.

3.22. Convergence de l'application de réflexion. L'*application de réflexion* associée à h et au système de coordonnées (z', w') est :

$$\mathscr{R}'_h(\tau', t) := \xi' - \Theta'(\zeta', h(t)) \in \mathbb{C}[\![\tau', t]\!]^{d'}.$$

C'est l'objet le plus fondamental du principe de réflexion analytique. Je l'ai découvert et introduit en 1997. Quelques concurrents français et étrangers l'ont ensuite étudié avec leurs propres moyens ([Me2005]), sans toutefois parvenir seuls jusqu'à l'énoncé définitif suivant.

Théorème 3.23. ([Me2005, MP2006c]) *Si M est minimale à l'origine et si h est CR-inversible, ou CR-submersive, ou CR-finie, ou CR-dominante, ou CR-transversale, alors pour tout système de coordonnées $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ dans lesquelles la complexification extrinsèque $\mathscr{M}'$ est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$, l'application de réflexion associée est convergente, c'est-à-dire $\mathscr{R}'_h(\tau', t) \in \mathbb{C}\{\tau', t\}^{d'}$.*

La convergence de $\mathscr{R}'_h$ dans un seul système de coordonnées entraîne sa convergence dans tout système de coordonnées ([Me2005, MP2006c]).

Développons $\Theta'(\zeta', t') = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \, \Theta'_{\gamma'}(t')$.

Corollaire 3.24. *Toutes les composantes $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion convergent, i.e. $\Theta'_{\gamma'}(h(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^{d'}$ pour tout $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.*

En tenant compte des conditions de non-dégénérescence **(ndi)** et **(crj)**, une vingtaine de corollaires possibles se déduisent de ce théorème unificateur. Signalons seulement les cinq suivants.

Corollaire 3.25. ([Me2001, Me2005, MP2006c]) *Si M est minimale à l'origine, si $(M', 0')$ est holomorphiquement non-dégénérée et si h est CR-inversible et inversible, ou CR-submersive et submersive, ou CR-finite et finie avec $m' = m$, ou CR-dominante et dominante, ou CR-transversale et transversale, alors $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ est convergente.*

Il est connu que $(M', 0')$ est holomorphiquement non-dégénérée si et seulement si il existe un champ de vecteurs de type $(1, 0)$, de la forme $X' = \sum_{i'=1}^{n'} a'_{i'}(t') \frac{\partial}{\partial t'_{i'}}$ et à coefficients holomorphes, qui est tangent à $(M', 0')$. Grâce au flot de X', on démontre alors facilement que $(M', 0')$ possède des équivalences formelles non convergentes ([Me2005, MP2006c]).

Un examen du Lemme 3.14 assure l'invariance biholomorphe de l'application de réflexion.

Proposition 3.26. ([Me2002, Me2005, MP2006c]) *Si $t'' = \phi'(t')$ est un biholomorphisme local fixant $0'$ et transformant $(M', 0')$ en une sous-variété générique $(M'', 0')$ d'équations $\bar{w}''_{j'} = \Theta''_{j'}(\bar{z}'', t'')$, $j' = 1, \dots, d'$, l'application de réflexion associée à la composée $\phi' \circ h : (M, 0) \to_{\mathscr{F}} (M'', 0')$ qui est définie par*

$$\begin{aligned} \mathscr{R}''_{\phi' \circ h}(\tau'', t) &:= \xi'' - \Theta''\big(\zeta'', \phi'(h(t))\big) \\ &= \xi'' - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta'')^{\gamma'}\, \Theta''_{\gamma'}\big(\phi'(h(t))\big) \end{aligned}$$

possède des composantes $\Theta''_{\gamma'}\big(\phi'(h(t))\big)$ données par des formules

$$\Theta''_{\gamma'}\big(\phi'(h(t))\big) \equiv S'_{\gamma'}\left(\big(\Theta'_{\gamma'_1}(h(t))\big)_{\gamma'_1 \in \mathbb{N}^{m'}}\right),$$

dans lesquelles les fonctions holomorphes locales $S'_{\gamma'}$ dépendent du biholomorphisme $t'' = \phi'(t')$ et peuvent être construites explicitement.

3.27. Démonstration. Commentons succintement la preuve du Théorème 3.23. L'hypothèse que h^c est une application CR formelle complexifiée entre $(\mathscr{M}, 0)$ et $(\mathscr{M}', 0')$ se lit comme suit :

$$\begin{cases} \overline{g}(\tau) \ = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}(\tau)^{\gamma'}\, \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ g(t) \ = \displaystyle\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'}\, \overline{\Theta}'_{\gamma'}\big(\overline{h}(\tau)\big). \end{cases}$$

Considérons les deux familles de dérivations :

$$\begin{cases} \mathscr{L}^\beta := (\mathscr{L}_1)^{\beta_1} (\mathscr{L}_1)^{\beta_2} \cdots (\mathscr{L}_m)^{\beta_m} \quad \text{et} \\ \underline{\mathscr{L}}^\beta := (\underline{\mathscr{L}}_1)^{\beta_1} (\underline{\mathscr{L}}_1)^{\beta_2} \cdots (\underline{\mathscr{L}}_m)^{\beta_m}, \end{cases}$$

où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$. En les appliquant aux deux équations précédentes, on obtient *quatre* familles d'identités de réflexion. La première paire est :

$$\begin{cases} \underline{\mathscr{L}}^\beta \, \overline{g}(\tau) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathscr{L}}^\beta \big[\overline{f}(\tau)^{\gamma'} \big] \, \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \, \underline{\mathscr{L}}^\beta \big[\overline{\Theta}'_{\gamma'} \left(\overline{h}(\tau) \right) \big]. \end{cases}$$

La seconde paire est :

$$\begin{cases} \mathscr{L}^\beta g(t) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathscr{L}^\beta \big[f(t)^{\gamma'} \big] \, \overline{\Theta}'_{\gamma'} \left(\overline{h}(\tau) \right), \\ 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{f}(\tau)^{\gamma'} \, \mathscr{L}^\beta \left[\Theta'_{\gamma'}(h(t)) \right]. \end{cases}$$

Dans la preuve du Théorème 3.23, je jongle constamment entre ces quatre identités. À ma connaissance, les publications précédentes sur le principe de réflexion analytique n'ont pas observé l'existence de ce quadriptyque formel fondamental. Elles se contentent toujours d'exploiter la première ainsi que sa « conjuguée complexifiée », *i.e.* la troisième.

Énonçons seulement la proposition qui résume l'étape principale de la démonstration du Théorème 3.32. On note $J_t^\ell \psi$ le ℓ-ième jet d'une série formelle $\psi(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{d'}$, par exemple $J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h)$ avec $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$.

Proposition 3.28. ([Me2005, MP2006c]) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et tout* $\ell \in \mathbb{N}$, *les deux propriétés suivantes sont satisfaites* :

- *si* k *est impair, pour tout* $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$:

$$\left[J_t^\ell \Theta'_{\gamma'}(h) \right] \left(\Gamma_k \left(z_{(k)} \right) \right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}} ;$$

- *si* k *est pair, pour tout* $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$:

$$\left[J_\tau^\ell \overline{\Theta}'_{\gamma'}(\overline{h}) \right] \left(\Gamma_k \left(z_{(k)} \right) \right) \in \mathbb{C}\{z_{(k)}\}^{N_{d',n,\ell}}.$$

3.29. Application. Voici une première application du Théorème 3.23.

Théorème 3.30. ([Me2005, MP2006c]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.23, pour tout entier* $N \geqslant 1$*, il existe une application formelle convergente* $\mathsf{H}^N(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ *avec* $\mathsf{H}^N(t) \equiv h(t) \mod (\mathfrak{m}(t))^N$ (*d'où* $H(0) = 0$), *qui induit une application holomorphe locale entre* $(M, 0)$ *et* $(M', 0')$.

On en déduit immédiatement la coïncidence entre les équivalences formelles et les biholomorphismes locaux.

Corollaire 3.31. ([Me2005, MP2006c]) *Supposons que* $n' = n$ *et* $d' = d$*, que* M *est minimale à l'origine et que* $h : (M, 0) \to_{\mathscr{F}} (M', 0')$ *est une application formelle inversible* (*équivalence formelle*)*. Sous ces hypothèses,* $(M, 0)$ *et* $(M', 0')$ *sont biholomorphiquement équivalentes.*

Voici une deuxième application.

Corollaire 3.32. ([Me2005, MP2006c]) *Supposons que* $m' = m$ *et* $d' = d$*, que* $(M, 0)$ *est minimale à l'origine et que* $(M', 0)$ *est holomorphiquement non-dégénérée. Il existe un entier* $\kappa = \kappa(m, d)$ *tel que, si deux biholomorphismes locaux* $h^1, h^2 : (M, 0) \to (M', 0)$ *possèdent le même jet d'ordre* κ *à l'origine, alors* $h^1 = h^2$.

Dans le Théorème 3.23 et dans ses applications, la minimalité de $(M, 0)$ est utilisée, mais elle ne semble pas être requise.

Question Ouverte 3.33. *Les résultats précédents restent-ils vrais lorsque* $(M, 0)$ *est minimale en un point Zariski-générique, mais pas forcément à l'origine ?*

3.34. Algébricité de l'application de réflexion. L'énoncé suivant (Théorème 11.4 de [Me2001]) produit une synthèse définitive et complète du principe de réflexion algébrique.

Théorème 3.35. ([Me2005, MP2006c]) *Si* h *est une application holomorphe locale* $(M, 0) \to (M', 0')$*, si* M *et* M' *sont algébriques, si* M *est minimale en un point Zariski-générique et si* M' *est la plus petite* (*pour l'inclusion*) *sous-variété générique algébrique réelle locale contenant* $h(M)$*, alors l'application de réflexion* $\mathscr{R}'_h(\tau', t)$ *est algébrique.*

Des exemples triviaux contredisent l'algébricité de $\mathscr{R}'_h$ lorsque M' n'est pas minimale pour l'inclusion contenant $h(M)$. Dans la démonstration de ce théorème, on se déplace en un point minimal $p \in M$ arbitrairement proche de l'origine. Mais lorsque h n'est qu'une application formelle, cette délocalisation est impossible.

Question Ouverte 3.36. *Soit h une équivalence formelle entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$ qui sont minimales en un point Zariski-générique.*

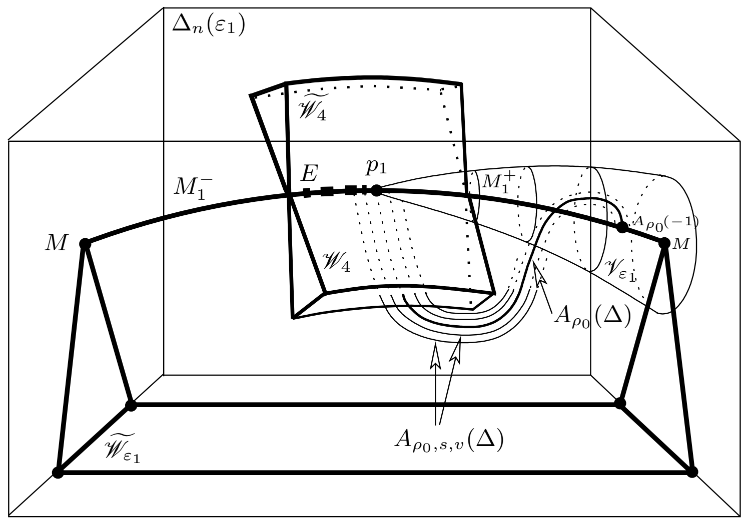
- *L'application de réflexion est-elle convergente ?*
- *h est-elle déterminée uniquement par un jet d'ordre fini lorsque la cible est holomorphiquement non-dégénérée ?*
- *h est-elle convergente sous l'hypothèse que la cible analytique réelle M' ne contient pas de courbe holomorphe ?*

Les transformations locales entre équations différentielles partagent les propriétés de rigidité des applications CR.

Problème Ouvert 3.37. *Transférer la théorie des applications CR aux systèmes d'équations différentielles lisses, analytiques ou algébriques qui sont complètement intégrables.*

3.38. Applications CR $\mathscr{C}^\infty$ essentiellement finies. Considérons une application CR $h : M \to M'$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Soit $p \in M$ et $p' := h(p) \in M'$. La série de Taylor $\mathsf{T}^\infty h(p)$ de h en p induit une application CR formelle entre (M, p) et (M', p'). L'application h est dite *essentiellement finie* en p si $\mathsf{T}^\infty h(p) : (M, p) \mapsto_{\mathscr{F}} (M', p')$ est essentiellement finie (Définition 3.17**(h3)**).

Cette hypothèse généralise légèrement une situation paradigmatique très étudiée depuis un travail de Baouendi-Jacobowitz-Treves (Annals of Math. 1985), mais les résultats de Coupet-Pinchuk-Sukhov (codimension 1, Math. Z., 2000) et de Damour (codimension quelconque, Michigan Math. J., 2001) dans cette direction ne recouvrent pas en toute rigueur le résultat original de Baouendi-Jacobowitz-Treves, dans lequel la minimalité de M n'est pas requise. C'est pourquoi, en utilisant un énoncé de propagation tel que la Proposition 1.7 à la place du théorème de Tumanov local, j'ai adapté et simplifié la construction de wedges que j'avais signalée à Damour en juin 2000. Dans l'énoncé de synthèse suivant, M n'est pas supposée minimale en p.



EXTENSION MÉROMORPHE À UN VOISINAGE DE p_1

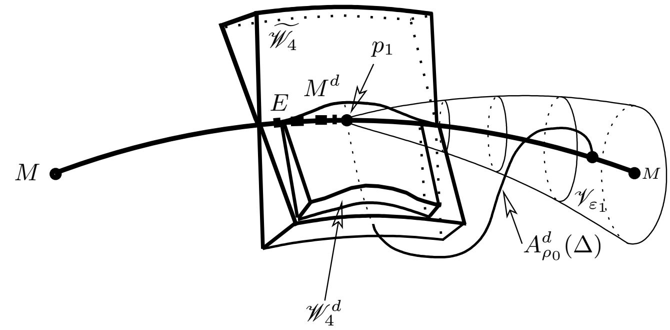
Théorème 3.39. *Soit $h : (M,p) \to (M',p')$ une application CR de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux sous-variétés génériques locales $(M,p) \subset \mathbb{C}^n$ et $(M',p') \subset \mathbb{C}^{n'}$. Supposons h essentiellement finie en p et supposons qu'il existe un wedge local $\mathscr{W}_p$ d'edge M en p tel que h se prolonge holomorphiquement à $\mathscr{W}_p$. S'il existe des points*

$$q \in \mathscr{O}_{CR}(M,p)$$

arbitrairement proches de l'origine au voisinage desquels h est analytique réelle, alors h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$.

Corollaire 3.40. *Soit $h : (M,p) \to (M',p')$ un difféomorphisme CR local de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si M' est essentiellement finie en p' et si h se prolonge holomorphiquement à un wedge en p, alors h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$.*

Bien que ce résultat me semble nettement moins fort que le Théorème 3.47 ci-dessous, je le cite pour avoir le plaisir de l'illustrer par deux diagrammes raffinés extraits de la publication afférente (Manuscripta Math., 2004).



ARGUMENT DE DÉFORMATION DANS LE WEDGE $\mathscr{W}_4$ AU-DESSUS DE p_1

Les situations dans lesquelles M' est holomorphiquement non-dégénérée (§3.46) exigent un effort mathématique bien plus considérable.

3.41. Applications CR de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre hypersurfaces analytiques réelles de type de D'Angelo fini. En associant un argument de Pinchuk (1978) qui contrôle le comportement CR-transversal avec les techniques du principe de réflexion analytique standard, j'ai obtenu la réponse à une conjecture « folklorique » vieille d'une quinzaine d'années. Il s'agit du Théorème 9.2 de [Me2002].

Théorème 3.42. ([Me2002]) *Soit $h : M \to M'$ une application CR de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux hypersurfaces analytiques réelles connexes de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$). Si M et M' ne contiennent pas de courbe holomorphe, h est analytique réelle en* tout *point de M.*

De plus, il existe un entier $\kappa \in \mathbb{N}_*$ tel que, si les deux jets d'ordre κ de deux telles applications CR lisses h et h^* coïncident en un point $p \in M$, alors $h \equiv h^*$ sur toute l'hypersurface M.

La deuxième assertion était posée comme problème ouvert dans un article de survol écrit par Baouendi-Ebenfelt-Rothschild (Bull. Amer. Math. Soc., 2000).

Dans la démonstration, j'utilise vraiment l'hypothèse de lissité de h, mais à la même période, Diederich-Pinchuk (Michigan Math. J., 2003) obtiennent un résultat considérablement plus fort, fruit de nombreuses années de recherche, dans lequel l'application h n'est supposée que de classe $\mathscr{C}^0$ (je n'ai eu connaissance de leur travail qu'après la publication de [Me2002]). Néanmoins, dans [Me2002], je démontre l'énoncé suivant, dans lequel M et M' peuvent fort bien être feuilletées par des variétés complexes de dimension positive. À ma connaissance, la version $\mathscr{C}^0$ (ou même $\mathscr{C}^1$) de ce théorème n'existe pas.

Théorème 3.43. ([Me2002]) *Soit $h : M \to M'$ une application CR de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux hypersurfaces analytiques réelles connexes de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$). Si M et M' sont essentiellement finies en* tout *point et si le rang générique de h sur M est maximal égal à $(2n-1)$, alors h est analytique réelle en* tout *point de M.*

Citons pour terminer une conjecture « folklorique » difficile.

Question Ouverte 3.44. *Soit $h : M \to M'$ une application CR continue entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles connexes $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Supposons que M est globalement minimale et que M' ne contient pas de courbe holomorphe. L'application h est-elle analytique réelle en* tout *point de M ?*

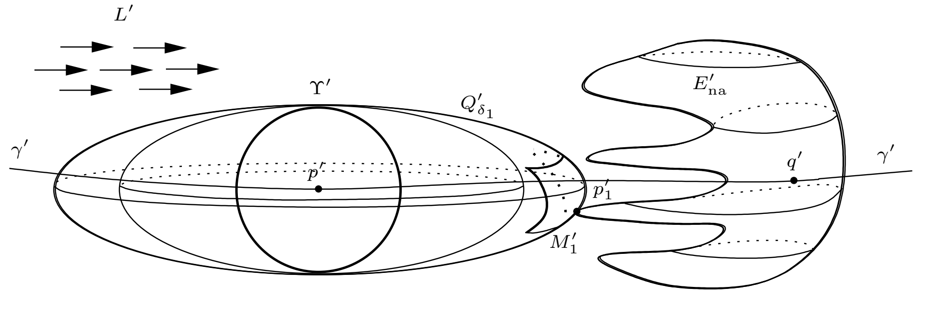
Un première étape consisterait à mieux comprendre l'hypothèse que M' ne contient pas de courbe holomorphe. Depuis trois ans, j'ai dans cette direction une idée précise qui consiste à effectuer un grand nombre de modifications de Nash en paramétrisant toutes les droites complexes tangentes à une variété CR donnée. Une autre approche consiste à appliquer le théorème de Cartan-Kähler. Je sais ainsi caractériser géométriquement la non-existence de courbes complexes contenues dans M'. Mais pour l'instant, j'ignore comment appliquer cette idée au principe de réflexion.

Problème Ouvert 3.45. *Élaborer des algorithmes explicites de modification de Nash et d'éclatement locaux afin de simplifier la géométrie CR des sous-variétés génériques analytiques réelles et de démontrer ainsi des versions du principe de réflexion qui sont hors d'atteinte avec les techniques contemporaines.*

3.46. Analyticité de l'application de réflexion lisse. Dans une direction déjà citée, Diederich-Pinchuk obtiennent un principe de réflexion en affaiblissant nettement l'hypothèse de régularité initiale sur l'application CR, tout en conservant des hypersurfaces qui sont au moins essentiellement finies. Dans une autre direction, mes travaux affaiblissent les hypothèses sur la géométrie des hypersurfaces, tout en supposant que l'application CR initiale possède à l'avance de bonnes propriétés de régularité. Dans l'énoncé suivant, aucune hypothèse de non-dégénérescence n'est faite sur la cible M'. Ce théorème produit une avancée notable par rapport au théorème de Baouendi-Jacobowitz-Treves (Corollaire 3.40), les techniques standard étant impuissantes pour traiter les hypersurfaces holomorphiquement non-dégénérées.

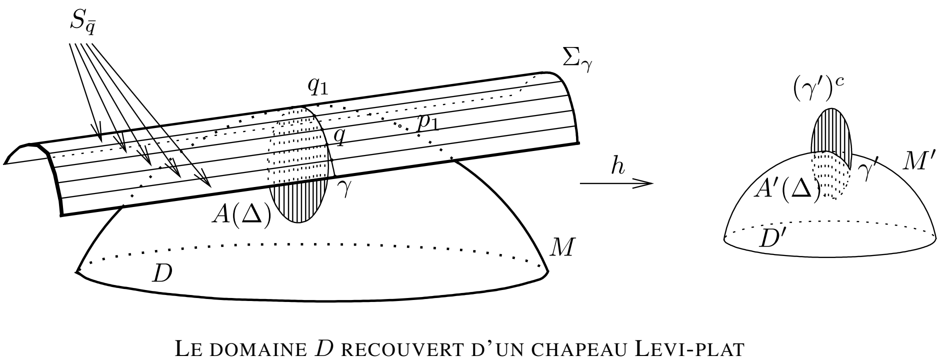
Théorème 3.47. ([Me2002]) *Si $h : M \to M'$ est un difféomorphisme CR de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux hypersurfaces analytiqes réelles globalement minimales de $\mathbb{C}^n$, alors en tout point $p \in M$ et pour tout choix* *de coordonnées locales centrées en* $p' := h(p)$ *dans lesquelles* (M', p') *est représentée par* $\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}', t')$, *la fonction de réflexion associée* $\mathscr{R}'_h(t, \bar{\nu}') = \bar{\mu}' - \Theta'(\bar{\lambda}', h(t))$ *et centrée en* $p \times \overline{p'}$ *se prolonge holomorphiquement à un voisinage de* $p \times \overline{p'}$ *dans* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. *Si de plus* M' *est holomorphiquement non-dégénérée,* h *se prolonge holomorphiquement à un voisinage de* M *dans* $\mathbb{C}^n$.

Voici quelques diagrammes extraits de [Me2002] qui illustrent la démonstration.



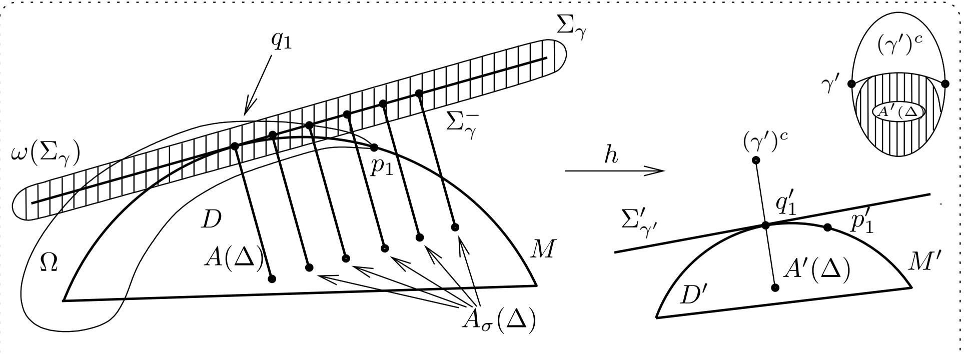
CONSTRUCTIOND’UN MUR DE SUPPORT GÉNÉRIQUE PAR GONFLEMENT D’UN ELLIPSOIDE

L’idée principale consiste à recouvrir M d’un « chapeau » Levi-plat, celui-ci étant constitué des variétés de Segre qui sont attachées à tous les points de M situés sur une courbe locale γ transverse à T^cM.



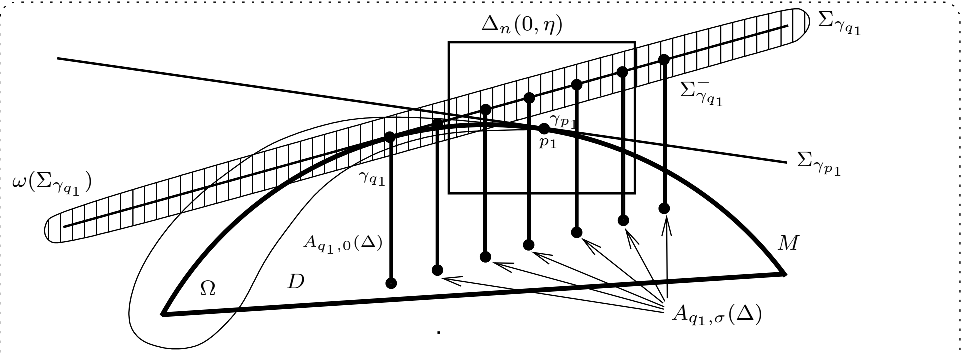
LE DOMAINE D RECOUVERT D’UN CHAPEAU LEVI-PLAT

Ensuite, on construit une famille de disques analytiques remplissant l’espace entre le chapeau Levi-plat et un domaine D attaché à M fourni automatiquement par le théorème de Trépreau.



ENVELOPE D'HOLOMORPHIE DU DOMAINE D ET SON CHAPEAU LEVI-PLAT

Voici une dernière illustration.



ENVELOPE D'HOLOMORPHIE DU DOMAINE RECOUVERT PAR SON CHAPEAU LEVI-PLAT

Conjecture 3.48. *Soit $h : M \to M'$ une application CR* continue *entre deux hypersurfaces analytiques réelles globalement minimales de* $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$. *Supposons que l'extension de h à un voisinage unilatéral D de M dans $\mathbb{C}^n$ donnée par le théorème de Trépreau est de rang générique égal à n. Alors l'application de réflexion se prolonge holomorphiquement à un voisinage de* tout *point $p \times \overline{h(p)}$ du graphe de $\overline{h}$.*

En codimension supérieure, l'astuce de remplissage de l'espace entre M et Σ_γ illustrée par les deux figures précédentes échoue, sauf dans quelques situations significatives qu'il serait regrettable de faire figurer comme hypothèses *ad hoc*.

Terminons par quelques remarques générales. Du point de vue de la géométrie de M', c'est le morphisme des jets de variétés de Segre (§3.12) qui concentre toute l'information nécessaire. Lorsque M' est holomorphiquement non-dégénérée, ou plus généralement, sans aucune hypothèse de non-dégénérescence sur M' (Théorèmes 3.23 et 3.47), ce morphisme peut être très complexe du point de vue de la géométrie analytique locale. La dimension de ses fibres prend en général toutes les valeurs comprises entre 0 et $(n-2)$. Les principes de réflexion classiques supposent toujours que ce morphisme est de rang constant (hypothèse de non-dégénérescence finie) ou localement fini (hypothèse de finitude essentielle), mais en général, ces hypothèses modèles simplifient nettement le problème.

Le théorème d'aplatissement de Hironaka-Lejeune-Teissier permet en principe de transformer un morphisme quelconque en un morphisme dont les fibres sont de dimension constante, après une suite finie d'éclatements locaux accompagnés de transformations strictes. Entre janvier et avril 2005, j'ai appris le théorème de désingularisation de Hironaka (énoncé indépendant du théorème d'aplatissement) grâce aux publications récentes de Herwig Hauser (Comment. Math. Helvetici, 2002 en collaboration avec Encinas, et Bull. Amer. Math. Soc. 2003). Or à ce jour, le théorème d'aplatissement n'est pas clarifié de manière suffisamment explicite pour être appliqué à des situations qui nécessitent un suivi soigneux, étape par étape. En particulier, Herwig Hauser m'a informé qu'à sa connaissance, il n'existe pas d'invariant permettant d'aplatir algorithmiquement un morphisme analytique complexe en dimension quelconque, le tout en éclatant le long de centres exclusivement lisses (afin de ne pas perdre la lissité des espaces ambiants).

Problème Ouvert 3.49. *Synthétiser un théorème élémentaire de redressement des morphismes analytiques complexes quelconques. Trouver un invariant ordonné qui baisse à chaque éclatement élémentaire.*

RÉFÉRENCES

[Me2001] MERKER, J. : *On the partial algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), no. 3, 547–591.

[Me2002] MERKER, J. : *On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 5, 1443–1523.

[MP2002] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *On wedge extendability of CR meromorphic functions*, Math. Z. **241** (2002) 485–512.

[Me2005] MERKER, J. : *Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle*, Annales Fac. Sci. Toulouse, **XIV** (2005), no. 2, 215–330.

[Me2006a] MERKER, J. : *Explicit differential characterization of the Newtonian free particle system in $m \geqslant 2$ dependent variables*, Acta Applicandæ Mathematicæ, **92** (2006), no. 2, 125–207.

[MP2006b] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *Characteristic foliations on maximally real submanifolds of $\mathbb{C}^n$ and removable singularities*, International Mathematics Research Papers, Volume **2006**, Article ID 72069, 131 pages. www/hindawi.com/journals/imrp

[MP2006c] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *Holomorphic extension of CR functions, envelopes of holomorphy and removable singularities*, International Mathematics Research Surveys, Volume **2006**, Article ID 28295, 287 pages. `www/hindawi.com/journals/imrs`

[MP2006d] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *Holomorphic extension of CR functions : supplementary topics and open problems*, `www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/`.

[MP2006e] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *A geometrical proof of the Hartogs extension theorem*, Prépublication DMA-ENS no. 10 (2006), 36 pp, 22 colored illustrations ; `math.CV/0610985`

[Me2007] MERKER, J. : *Lie symmetries and CR geometry*, 118 pp, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), to appear (2007).

§9. AUTRES PROBLÈMES OUVERTS EN GÉOMÉTRIE CR

Je reproduis ci-dessous une section qui a été supprimée de la publication définitive de mon *survey* avec Porten à IMRS. Elle contient 7 problèmes ouverts en géométrie CR : 9.7 ; 9.16 ; 9.23 ; 9.25 ; 9.33 ; 9.41 ; 9.57.

9.1. Decomposable CR functions. Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be generic and let $p \in M$. A CR distribution T on M is called *decomposable at* p if there exist a finite number $k \geqslant 1$ of local wedges $\mathscr{W}_p^1, \dots, \mathscr{W}_p^k$ of edge M at p and holomorphic functions of slow growth $F_j \in \mathscr{O}(\mathscr{W}_p^j)$, $j = 1, \dots, k$, such that

$$\mathsf{T} = \mathsf{b}_M\, F_1 + \cdots + \mathsf{b}_M\, F_k$$

in a neighborhood of p in M, where b_M is defined in §4.29(III). Similar definitions may be formulated for functions $f \in L^{\mathsf{p}}_{loc,CR}(M)$, with M at least $\mathscr{C}^1$ and for functions $f \in \mathscr{C}^{\kappa,\alpha}_{CR}(M)$, with $M \in \mathscr{C}^{\kappa+1,\alpha}$.

If M is maximally real and $\mathscr{C}^\infty$, every (automatically CR) distribution T on M is decomposable with $k = n$, the growth of the holomorphic functions F_j depending on the order of T ([BCT1983, BCH2005]). If M is a hypersurface, Theorem 1.11 assures that such a decomposition always holds true, with $k = 2$ and good behaviour in Hölder classes, as in the classical Sokhotskiĭ-Plemelj Theorem 2.7(IV). In fact, at a locally minimal point p, Theorem 2.4 yields a decomposition with $k = 1$.

The next step is to study a generic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ of codimension 2. At a fixed point $p \in M$, the extensional dimension $e_p = \dim \mathscr{O}^{loc}_{CR}(M,p) - 2m$ satisfies $0 \leqslant e_p \leqslant 2$. If $e_p = 2$, viz. M is minimal at p, Corollary 5.3 shows that decomposition holds with $k = 1$.

If $e_p = 1$, Theorem 5.2 yields a $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ manifold with boundary $M_p^1 (\equiv \mathscr{W}_p^{CR,1})$ attached to M at p to which $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ extends to be CR.

Also, M_p^1 contains a complex hypersurface $\Sigma_p^1 (\equiv \mathscr{W}_p^{an,1})$ with boundary being an open connected neighborhood S_p of p in $\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p)$.

We claim that there is a special circumstance (but not always) when M_p^1 may be included in a local hypersurface of $\mathbb{C}^n$ *without boundary* containing a neighborhood U_p of p in M, still denoted by M_p^1, to which $\mathscr{C}_{CR}^0(M)$ extends to be CR.

Indeed, according to §4.1(III), if $\mathsf{proj}_{H_p}(\cdot)$ denotes any $\mathbb{C}$-linear projection of $T_p\mathbb{C}^n$ onto

$$H_p := T_p\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p) + J\, T_p\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p) \simeq \mathbb{C}^{n-1},$$

then $\widetilde{\mathscr{O}}_p := \mathsf{proj}_{H_p}\big(\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p)\big)$ is a local $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ hypersurface of $\mathbb{C}^{n-1}$. We know that if the Levi form of this hypersurface $\widetilde{\mathscr{O}}_p$ has eigenvalues of both signs at p, or if $\widetilde{\mathscr{O}}_p$ is of finite *odd* type at p, then CR functions on $\widetilde{\mathscr{O}}_p$ extend holomorphically to both sides of $\widetilde{\mathscr{O}}_p$. This phenomenon holds more generally.

Définition 9.2. A local $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ hypersurface $\widetilde{S}$ of $\mathbb{C}^{n-1}$ is called *biminimal* at one of its points p if there exist two small discs $\widetilde{A}^1$ and $\widetilde{A}^2$ attached to $\widetilde{S}$ with $\widetilde{A}^j(1) = p$, $j = 1,2$, whose exit vectors point out in the two sides of $\widetilde{S}$ at p.

This happens for instance under each one of the two assumptions of Corollary 5.8. By translating A_1 and A_2, we get immediately the following.

Lemma 9.3. ([Trp1986, CR1994]) *Each biminimal point $p \in \widetilde{S} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ has an open neighborhood $\widetilde{\mathscr{U}_p}$ in $\mathbb{C}^{n-1}$ to which $\mathscr{C}_{CR}^0(\widetilde{S})$ extends holomorphically.*

We apply this to $\widetilde{S} := \widetilde{\mathscr{O}}_p$. The two discs $\widetilde{A}^j$, $j = 1,2$ may be lifted to $\mathbb{C}^n$ and then translated along M. By this process, we obtain two opposite local manifolds with boundary attached to M at p. They glue together in a $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ hypersurface M_p^1 of $\mathbb{C}^n$ containing a neighborhood of p in M. We may thus summarize.

Lemma 9.4. *Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be generic $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ of codimension 2 and let $p \in M$ with $e_p = 1$. If $\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p)$ is biminimal at p, then there exists a local $\mathscr{C}^{2,\alpha-0}$ hypersurface $M_p^1 \subset \mathbb{C}^n$ (without boundary) containing M near p to which $\mathscr{C}_{CR}^0(M)$ extends to be CR.*

Also, $\mathscr{C}_{CR}^{1,\alpha}(M)$ extends to be CR and $\mathscr{C}^{1,\alpha-0}$ on the hypersurface M_p^1. Then the jump Theorem 1.11 applies trivially. As is clear, this special circumstance reduces the question of decomposition to the hypersurface case.

Proposition 9.5. *Under the assumptions of the above lemma,* every $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ *CR function on M is decomposable, as the sum of boundary values of* two *holomorphic functions defined in two wedges whose cones in $N_pM \simeq \mathbb{R}^2$ are opposite open half-planes. A similar decomposition holds for integrable CR functions and for CR distributions, with the appropriate smoothness assumption on M.*

On the other hand, if $\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p)$ is strongly pseudoconvex at p, the reduction to Theorem 1.11 is impossible but decomposition still holds true.

Proposition 9.6. ([He1980]) *Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be a $\mathscr{C}^2$ generic submanifold of codimension 2 and let $p \in M$. Assume that there exists a local $\mathscr{C}^2$ hypersurface M_p^1 passing through p and containing M near p such that the restriction of the Levi form of M_p^1 to $T_p^c M \subset T_p^c M_p^1$ has all its $(n-2)$ eigenvalues nonzero and of the same sign. Let $f \in L^1_{loc,CR}(M)$. Then one can find a domain $\Omega \ni p$, a covering of $\Omega \backslash M$ by three domains $\Omega_i = \{z \in \Omega : \rho_i(z) < 0\}$ with $\rho_i \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, $i = 1,2,3$, satisfying $\rho_i(z) = 0$ and $\partial\rho_i(z) \wedge \overline{\partial}\rho_j(z) \neq 0$ for all $z \in M \cap \Omega$ if $i \neq j$, and holomorphic functions $f_{ij} \in \mathscr{O}(\Omega_i \cap \Omega_j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, such that the f_{ij} possess boundary values on $M \cap \Omega \subset \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ and $f = \mathsf{b}_M\, f_{23} + \mathsf{b}_M\, f_{31} + \mathsf{b}_M\, f_{12}$.*

Both propositions admit generalizations to codimension $d \geqslant 2$ provided $e_p = d-1$ with similar special assumptions, but we will not restitute them since anyway the general case $e_p = d-1$ is unknown.

Open question 9.7. ([Trp1990]) *Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be generic at least $\mathscr{C}^2$ and let $p \in M$. Assume that the extensional dimension $e_p = \dim \mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p) - 2m$ is equal to $d-1$. Are CR functions always decomposable at p ?*

9.8. Nondecomposable CR functions. Coming back to M of codimension 2, the next step is to assume that $e_p = 0$. Equivalently, $\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M,p)$ is a local complex $(n-2)$-dimensional submanifold of $\mathbb{C}^n$. In 1985, answering in the negative an outstanding open problem in microlocal complex analysis, Trépreau gave an example of a nondecomposable CR function.

Theorem 9.9. ([Trp1990]) *The branched holomorphic function $\sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ restricts to the 2-codimensional generic cubic $M_{\mathscr{TRP}} \subset \mathbb{C}^3(z, w_1, w_2)$ of equations*

$$v_1 = u_2\, z\bar{z}, \qquad\qquad v_2 = -u_1\, z\bar{z},$$

as a continuous CR function that is nondecomposable *at the origin.*

According to Theorem 4.41(III), there exist many CR functions on $M_{\mathscr{TRP}}$ that do not extend holomorphically to any local wedge of edge $M_{\mathscr{TRP}}$ at the origin. In fact, Theorem 4.41(III) admits an elementary proof for a generic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ that is real analytic, as is $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$. The function $\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\big|_{M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}}$ is a concrete example of such a CR function that is not wedge extendable at 0.

The geometry of M is shaped in advance for the following purpose.

Lemma 9.10. ([Trp1990, Tu1994a]) *Let f be a continuous CR function on $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$. The following three conditions are equivalent :*

- **(i)** *f extends holomorphically to some neighborhood $\mathscr{U}_0$ of 0 in $\mathbb{C}^3$;*
- **(ii)** *f extends holomorphically to some local wedge $\mathscr{W}_0$ of edge $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$ at 0 ;*
- **(iii)** *f extends to be CR on some hypersurface M_0^1 with boundary $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$ at 0.*

In [Ro1993], the reader may find a direct explanation of this lemma that is however limited to the model $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$. Following [Trp1990, Tu1994a] and using the full strength of CR extension theory, we will readily provide a general explanation. To conclude the exposition of Theorem 9.9, assume by contradiction that $\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\big|_{M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}}$ is, in a neighborhood of 0 in $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$, the sum of k boundary values of functions $F_1, \dots, F_k$ that are holomorphic in wedges $\mathscr{W}_1, \dots, \mathscr{W}_k$. Because of the lemma, each F_j extends holomorphically to a neighborhood of the origin, whence the same is true for $\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\big|_{M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}}$, which is absurd. The same reasoning shows that $\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\big|_{M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}}$ cannot be the sum of boundary values of CR functions defined on hypersurfaces $M_1^1, \dots, M_k^1$ with boundary $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$ at 0.

The explanation of the crucial lemma lies in the local holonomy group of the (reduced) natural connection ∇ on $UN_M S$ presented §5.24. We will apply Theorem 5.41 to small loops contained in the local CR orbit $\{w_1 = w_2 = 0\}$ of the origin.

To present the phenomenon in its generality, let $M \subset \mathbb{C}^n$ be $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ and generic, let $p \in M$ and assume that $\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M, p)$ is of minimal possible dimension $2m$, viz. is a local complex m-dimensional submanifold. Let Σ_p denote a small open neighborhood of p in $\mathscr{O}_{CR}^{loc}(M, p)$. For instance, $n = 3$, $M = M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$, $p = 0$ and $\Sigma_p \equiv \{w_1 = w_2 = 0\}$. Define :

$$\mathsf{Loop}(\Sigma_p, p) := \big\{\gamma : [0,1] \to \Sigma_p \text{ piecewise } \mathscr{C}^{2,\alpha} : \gamma(0) = \gamma(1) = p\big\}.$$

To such a closed curve γ is associated the parallel translation $\mathsf{UPT}_\gamma(t)$ which is for $t = 1$ an orthogonal automorphism of the sphere fiber $UN_M\Sigma_p(p) \simeq S^{d-1}$. By the general theory of connexions ([**?**, **?**]), the set of automorphisms $\mathsf{UPT}_\gamma(1)$, as γ runs in $\mathsf{Loop}(\Sigma_p, p)$, identifies to some finite-dimensional global closed Lie subgroup of the orthogonal group

$\mathrm{O}(d-e_p,\mathbb{R})$, called the *local holonomy group* of the natural connexion ∇ on $UN_M\Sigma_p$. We will denote it by $\mathsf{Hol}_\nabla^{loc}(\Sigma_p,p)$. Importantly, this group is *connected*, because the small piece Σ_p is (implicitly assumed to be) connected and simply connected.

The propagation Theorem 5.41 entails that if a CR function extends to be CR at (p, Jv_p), for some $v_p \in UN_M\Sigma_p(p)\backslash\{0\}$, then it extends to be CR at p in all directions v_p' that lie in the orbit of v_p under $\mathsf{Hol}_\nabla^{loc}(\Sigma_p,p)$ (the ε-small indetermination is checked to disappears).

Corollary 9.11. *Assume that* $\mathsf{Hol}_\nabla^{loc}(\Sigma_p,p)$ *is* transitive *on* $UN_M\Sigma_p(p) \simeq S^{d-1}$*. If f is an individual continuous CR function on M, the following three conditions are equivalent* :

- **(i)** *f extends holomorphically to some neighborhood $\mathscr{U}_p$ of p in $\mathbb{C}^n$* ;
- **(ii)** *f extends holomorphically to some local wedge $\mathscr{W}_p$ of edge M at p* ;
- **(iii)** *f extends to be CR on some manifold with boundary M_p^1 attached to M at p.*

Now we can expose the heart of Lemma 9.10. We begin by an observation. If M is a hypersurface and if Σ_p is a local complex hypersurface contained in M and passing through p, whence $d-e_p = 1$, then $UN_M\Sigma_p(p) \simeq \{-1,+1\}$ has *two* connected components, whence by connectedness of the local holonomy group, necessarily $\mathsf{Hol}_\nabla^{loc}(\Sigma_p,p) = \{\mathrm{Id}\}$. In other words, propagation on a nonminimal hypersurface does not change the side of extension. On the contrary if $d-e_p \geqslant 2$, the sphere $UN_M\Sigma_p(p) \simeq S^{d-e_p-1}$ is *connected*. This is the reason why nondecomposable CR functions may exist if $d-e_p \geqslant 2$.

Corollary 9.12. *Let M, p, Σ_p be as above, with $d-e_p \geqslant 2$. If the subgroup* $\mathsf{Hol}_\nabla^{loc}(\Sigma_p,p) \subset \mathsf{O}(d-e_p-1,\mathbb{R})$ *is transitive, every continuous CR function that is not CR extendable p cannot be decomposed as a finite sum of boundary values of CR functions defined on hypersurfaces $M_1^1,\dots,M_k^1$ attached to M at p.*

To conclude, it suffices to compute the local holonomy group for $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$. Since $d-e_p = 3-1 = 2$, the fiber is S^1. Let L be the unique $(1,0)$ vector field tangent to $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$ of the form $L = \frac{\partial}{\partial z} + B_1\frac{\partial}{\partial w_1} + B_2\frac{\partial}{\partial w_2}$. As in classical curvature considerations, one may verify that the parallel transport along the standard closed square consisting of the four small integral curves of $\mathrm{Re}\, L$, of $\mathrm{Im}\, L$ of $-\mathrm{Re}\, L$ and of $-\mathrm{Im}\, L$ having small length $\delta > 0$ yields a rotation of angle $\mathrm{cst.}\,\delta^2 + \mathrm{O}(\delta^3)$ in S^1. Thus, the local holonomy group is transitive for $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$, concluding the exposition of Theorem 9.9.

In addition, a suitable modification of $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$ yields a result valid in arbitrary dimensions, provided $d - e_p \geqslant 2$. Fixing S, it is always possible to construct M containing S with two supplementary real dimensions u_1 and u_2 so that M has a "twist" with respect to S that is analog to the "twist" that $M_{\mathscr{T}\mathscr{R}\mathscr{P}}$ has with respect to $\{w_1 = w_2 = 0\}$.

Theorem 9.13. ([Trp1990]) *Let $S \subset \mathbb{C}^n$ be a $\mathscr{C}^\infty$ local* nongeneric *CR submanifold of codimension $d \geqslant 3$, of CR dimension $m \geqslant 1$ and of holomorphic codimension $c = d - n + m \geqslant 2$. Let $p \in S$ and assume that S is minimal at p, viz. $\mathscr{O}_{CR}^{loc}(S, p) \equiv S$ in a neighborhood of p. Then there exists a $\mathscr{C}^\infty$ local generic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ containing S near p and a CR function $f \in \mathscr{C}^0_{CR}(M)$ that is* not *decomposable at p.*

There might exist finer local geometric criterions for the (non)decomposability of CR functions. An idea ([Tu1994a]) would be not only to study the curvature of the natural connexion ∇ on $UN_M S$, but also the collection of all its covariant derivatives.

9.14. CR homeomorphisms and Hopf lemma for CR mappings. Let $h : M \to M'$ be a $\mathscr{C}^1$ bijective CR map between two $\mathscr{C}^1$ hypersurfaces of $\mathbb{C}^n$. An elementary argument ([CR1994]) shows that the inverse h^{-1} is a continuous CR map. The homeomorphism $(z, u) \mapsto (z, u^{2k+1})$ of $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ has $\mathscr{C}^{0, \frac{1}{2k+1}}$ inverse $(z, u) \mapsto (z, u^{\frac{1}{2k+1}})$, hence this shows that continuity of h^{-1} cannot be improved. Assuming h is only $\mathscr{C}^0$, a deeper result holds.

Theorem 9.15. ([DP1993]) *Let $h : M \to M'$ be a homeomorphism between two $\mathscr{C}^2$ hypersurfaces of $\mathbb{C}^n$, namely a continuous bijective map having a continuous inverse $h^{-1} : M' \to M$. If h is CR, then h^{-1} is also CR.*

In addition, h sends homeomorphically local and global CR orbits of M to local and global CR orbits of M'.

The proof strongly uses the fact that CR orbits are either connected open subsets of M or (immersed) complex hypersurfaces. Generalizing this theorem to arbitrary codimension represents a difficult problem, because CR orbits are more intricate. The equality of CR dimensions is required, since, for instance, the homeomorphism $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + i\,y \in \mathbb{C}$ is CR, whereas its inverse is not.

Open question 9.16. ([DP1993, CR1994, CR1998]) *Let $h : M \to M'$ be a homeomorphism between two $\mathscr{C}^2$ generic submanifolds of $\mathbb{C}^n$ of codimension $\geqslant 2$ that have the* same CR dimension (*hence also the same dimension, thanks to Brouwer's invariance of domain theorem*). *If h is CR, is h^{-1} CR too ?*

Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a bounded domain having $\mathscr{C}^1$ boundary $\partial\Omega$ and let u be a $\mathscr{C}^1$ complex-valued function on $\overline{\Omega}$. The classical Hopf lemma says that if u is subharmonic in Ω, then at every point $p \in \partial\Omega$ at which $u(p) = \max_{\overline{\Omega}} u$, the normal derivative $\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) \neq 0$ does not vanish ; this is obviously false for general functions in $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$.

There exist CR versions of the Hopf lemma. A piece of $\partial\Omega$ is a local hypersurface of $\mathbb{C}$. So consider $h : M \to M'$ a $\mathscr{C}^1$ CR map between two $\mathscr{C}^1$ hypersurfaces of $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. It is well known that h is CR if and only if $h_*(T^cM) \subset T^cM'$. The normal derivative $\frac{\partial u}{\partial \nu}(p)$ has to be replaced by the *complex-transversal differential* :

$$h_*^{\mathrm{trv}} : TM/T^cM \longrightarrow TM'/T^cM'.$$

A classical result due to Pinchuk states that if M and M' are $\mathscr{C}^2$ and strongly pseudoconvex, if h is a nonconstant $\mathscr{C}^1$ CR map, then h_*^{trv} is nonzero at every point of M. A generalization is as follows.

Let $h : \Omega \to \Omega'$ be a holomorphic map between two bounded pseudoconvex domains $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}^n$ that have $\mathscr{C}^\omega$ boundaries. By a theorem due to Diederich-Fornæss ([DF1978]), $\partial\Omega$ and $\partial\Omega'$ contain no complex curve, hence are essentially finite at every point. Assume that h is proper, viz. $h^{-1}(K')$ is a compact subset of Ω for every compact set $K' \subset \Omega'$. By a known theorem ([DF1988]), h extends as a $\mathscr{C}^\infty$ map $h : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}'$. A reflection principle due to Diederich-Fornæss entails that h extends holomorphically to a neighborhood of $\overline{\Omega}$ in $\mathbb{C}^n$.

Theorem 9.17. ([DF1988]) *Under these assumptions, $h : \partial\Omega \to \partial\Omega'$ has finite fibers $h^{-1}(h(q))$, $q \in \partial\Omega$, and nowhere vanishing complex transversal differential h_*^{trv}.*

Various attempts have been published to find out what are the finest conditions insuring that the complex-transversal differential is nowhere vanishing on the source. Examples show that a notion of (pseudo)convexity is necessary. We present a second notion which is related to Bishop discs.

Let M be a local $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ hypersurface of $\mathbb{C}^n$ centered at a point p and represented by $v = \varphi(z, u)$. As in §5.1, the set of small discs A attached to M with $A(1) = p$ identifies with $\mathscr{Z}_{\rho_2}$. Following [BR1993], we introduce the following.

Définition 9.18. The hypersurface M is *disc-convex* at p if for *every* disc $A = A(Z) = (Z, U(Z) + i\,V(Z))$, $Z \in \mathscr{Z}_{\rho_2}$, the exit (scalar) vector $\mathsf{ex}(A(Z)) = -\frac{\partial V}{\partial r}(1) \in \mathbb{R}$ is of a given constant sign, or equal to 0 ; equivalently, $-\frac{\partial A}{\partial r}(1)$ always points out in the same side of the tangent hyperplane T_pM.

For instance, M is disc-convex if M is not minimal, since all small attached discs A satisfy $A(\overline{\Delta}) \subset \Sigma$, where $\Sigma \subset M$ is a piece of complex hypersurface passing through p, whence $-\frac{\partial A}{\partial r}(1) \in T_p\Sigma = T_p^c M$. Also, M is disc-convex if M is (strongly or weakly) pseudoconvex from one side, or if $\varphi(z,u)$ is $\geqslant 0$.

Example 9.19. ([BR1993]) In $\mathbb{C}^2$ equipped with coordinates $(x+i\,y, u+i\,v)$, the hypersurface $v = x^2(x-y)^2$ is disc-convex at the origin but not pseudoconvex form either side in any neighborhood of 0.

On the contrary, if M is not disc-convex, there exist (at least) two small discs having nonzero exit vector pointing out in one and in the other side of M at p. By translating them, we may fill in the two local one-sided neighborhoods of M at p, whence CR functions extend holomorphically to a neighborhood of p in $\mathbb{C}^n$.

Lemma 9.20. *If M is not disc-convex at p, then $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ extends holomorphically to a neighborhood of p in $\mathbb{C}^n$.*

Although we know no published example, there should exist hypersurfaces M that are disc-convex at a point p, and nevertheless, CR functions extend holomorphically to a neighborhood of p, because of semi-local phenomena.

Theorem 9.21. ([BR1993]) *Let $h : M \to M'$ be a $\mathscr{C}^\infty$ CR map between two $\mathscr{C}^\infty$ connected hypersurfaces of $\mathbb{C}^n$. Let $p \in M$ and set $p' := h(p)$. Assume that M is minimal at p, that M' is disc-convex at p' and suppose that h has maximal possible rank*[7] *equal to $2n-1$ at points q arbitrarily close to p. Then $h_*^{\rm trv}(p)$ is nonzero. In addition, M is also disc-convex at p.*

Example 9.22. ([CR1994]) We provide an example showing the necessity for M' to be disc-convex at p' for the conclusion to hold. In $\mathbb{C}^3(z_1,z_2,w)$, let M be given by $v = z_1\bar{z}_1$; in $\mathbb{C}^3(z_1',z_2',w')$, let M' be given by $v' = {x_2'}^2 - z_1^2\bar{z}_1^2$. The Levi form of M' has eigenvalues of both signs, hence M' is not disc-convex. Consider the holomorphic map $(z_1',z_2',w') = (z_1, w, i\,w^2)$. It sends M to M' but has vanishing complex-transversal differential exactly along $\mathbb{C}_{z_2} \times \mathbb{R}_u$.

Nevertheless, this example is not totally convincing : in it, at every point, the map h is of rank $3 < 5 = \dim M = \dim M'$. Such maps are highly degenerate : the image $h(M)$ is in general contained in another subset M'' (possibly with singularities) that has strictly smaller dimension than M' and it is more adequate to study the modified map $M \to M''$.

[7]Equivalently, the Jacobian determinant $\mathrm{Jac}\, h$ of h does not vanish identically in any neighborhood of p.

Theorem 3.34(II) provides an instance of the necessity of restricting the target.

Open question 9.23. *Does there exist an example of a CR map $h : M \to M'$ with $\operatorname{Jac} h \not\equiv 0$ in a neighborhood of p, with M minimal at p, with M' minimal at $p' = h(p)$, with M' not disc-convex at p' and with $h_*^{\rm trv}(p) = 0$?*

In certain very rigid situations, such an example is excluded. Assume for instance that M and M' are both real analytic and do not contain any complex curve. Such hypersurfaces are sometimes said to be of *finite D'Angelo type*. An elementary lemma shows that any $\mathscr{C}^\infty$ CR map $h : M \to M'$ is either constant or the open set of points $q \in M$ where $\operatorname{Jac} h(q) \neq 0$ is dense in M. A strong reflection principle has been obtained recently (a short proof in the simpler case where $h \in \mathscr{C}^\infty$ may be found in the last paragraph of [Me2002]).

Theorem 9.24. ([DP2003]) *Every continuous CR map $h : M \to M'$ between two real analytic hypersurfaces of $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ containing no complex curve is real analytic at* every *point of the source M.*

By a theorem due to Severi, such a h extends holomorphically to a neighborhood of M in $\mathbb{C}^n$. It then follows by elementary arguments from the assumption that M contains no complex curve that if h is nonconstant, then $h_*^{\rm trv}(p) \neq 0$ at every $p \in M$. However, if h is not known to be real analytic, it might well exist many points on M at which all partial derivatives of the n components of h vanish. But if $h_*^{\rm trv}(p) \neq 0$, it is known ([BR1988], [BR1990]) how to show that h is real analytic at p.

Open problem 9.25. ([**?**], [$*$]) *Let $h : M \to M'$ be a nonconstant $\mathscr{C}^\infty$ CR map between two $\mathscr{C}^\omega$ hypersurfaces containing no complex curve. Show (without relying on the reflection principle) that $h_*^{\rm trv}$ does not vanish anywhere on M.*

In higher codimension, the notion of disc-convexity requires all exit vectors of attached discs to be contained in a closed side of a real hyperplane of $T_p\mathbb{C}^n$ containing T_pM. Thus, if M is *not* disc-convex at p, the CR edge-of-the-wedge Theorem 5.10 entails that $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ extends holomorphically to a neighborhood of p in $\mathbb{C}^n$.

Theorem 9.26. ([CR1994]) *Let $h : M \to M'$ be a $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ CR map, where $M \subset \mathbb{C}^n$ and $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ are $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ generic submanifolds and let $p \in M$. Assume that M is minimal at p and that there exist points q arbitrarily close to p at which $h_*(T_qM) + T^c_{h(q)}M' = T_{h(q)}M'$. Then M' is minimal at $h(p)$, and if in addition M' is disc-convex at $h(p)$, then $h_*(T_pM) \not\subset T^c_{h(p)}M$.*

If the CR dimensions of M and of M' are equal and if h is one-to-one, the complex-transversal differential $h_*^{\rm trv} : \ TM/T^cM \to TM'/T^cM'$ is shown to be onto.

Theorem 9.27. ([CR1994, CR1998]) *Let $h : M \to M'$ be a CR map between two generic submanifolds $M \subset \mathbb{C}^n$ and $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ that have the same CR dimension, with $h, M, M' \in \mathscr{C}^{2,\alpha}$. If h is one-to-one, then*

- *h sends diffeomorphically local and global CR orbits of M onto local and global CR orbits of M' ;*
- *the rank of h is constant on local and on global CR orbits of M ;*
- *h is a local diffeomorphism at all minimal points of M ;*
- *h is a global diffeomorphism if M and M' are both globally minimal.*

A differential-geometric ingredient in the proof deserves special attention. As in §5.24, let M be a real $\mathscr{C}^2$ abstract manifold, let K be a $\mathscr{C}^1$ subbundle of TM and let S be a $\mathscr{C}^2$ submanifold of M with the property that $K|_S \subset TS$. Introduce similar M', K' and S'.

Proposition 9.28. ([CR1998], [$*$]) *If $h : M \to M'$ is a $\mathscr{C}^2$ map satisfying $h_*(K) \subset K'$, if S consists of a single K-orbit and if $H(S) \subset S'$, then*

$$h_*^{\rm trv} : \ TM|_S/TS \longrightarrow TM'|_{S'}/TS'$$

has constant rank at every point of S.

9.29. Extension theory in the $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ category. If M is a $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ generic submanifold of $\mathbb{C}^n$, the two bundles TM and T^cM are only $\mathscr{C}^{0,\alpha}$. Integral curves of their local sections exist, but fail to be unique. When they are well defined, local flows are multivalued. Also there is in general no continuous dependence upon initial conditions, hence the transversal regularity of flows is lost. Consequently, Sussmann's theorem does not apply.

Fortunately, thanks to the main Theorem 3.7(IV), parameterized families of small analytic discs attached to M are $\mathscr{C}^{1,\alpha-0}$. We know that attached discs, and not sections of T^cM, are the only useful objects in the theory of CR extension. This motivates to abandon orbits of vector fields, and to replace them by a notion of *disc-orbits*, to be precised rigorously.

Remind that in Lemma 2.22, the points q and the vector $v_q \in T_q^cM$ are fixed. If we let vary the point q together with the vector $v_q \in T_q^cM$, we again lose smoothness : the map $q \mapsto v_q$ is necessarily only $\mathscr{C}^{0,\alpha}$. But if we fix the complex tangent vector, letting only the point vary, no smoothness is lost.

Lemma 9.30. *Assume that M is $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$ with $\kappa \geqslant 1$ and $0 < \alpha < 1$. For every point $p \in M$ and every nonzero complex tangent vector $v_p \in T_p^c M \backslash \{0\}$, there exists a neighborhood U_p of p in M and a family of $\mathscr{C}^{1,\alpha-0}$ analytic discs $B_{q,v_p,t}(\zeta)$ parametrized by $q \in U_p$ and by $t \in \mathbb{R}$ with $|t| < t_1$, for some $t_1 > 0$, that satisfies :*

- $B_{q,v_p,t}(\partial\Delta) \subset M$;
- $q = B_{q,v_p,t}(1)$;
- $v_p = \frac{\partial B_{p,v_p,0}}{\partial t}(-1)$.

Let us say that two points are in the *same disc orbit* if they can be joined by a finite string of small analytic discs attached to M, as in Lemma 2.20. Using the local diffeomorphisms $q \mapsto B_{q,v_p,t}(-1)$ (instead of local flows of local sections of $T^c M$), we can then redo Sussmann Theorem 1.21(III).

Proposition 9.31. ([Tu1990, Tu1996], [$*$]) *On a $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$ generic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$, where $\kappa \geqslant 1$ and $0 < \alpha < 1$, disc orbits are injectively immersed $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha-0}$ submanifolds of M. Disc orbits and CR orbits coincide as subsets of M, if M is at least $\mathscr{C}^2$.*

For $\kappa \geqslant 2$ and $0 < \alpha < 1$, local and global CR orbits of M are $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha-0}$.

Constructing a vault-hypersurface by means of analytic discs and controlling the geometry of the deformations without requiring nonzero exit vector, it is possible to obtain a version of the propagation Theorems 2.6 and 2.7 in the $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ category.

Theorem 9.32. ([Po2004]) *Let M be a connected $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ hypersurface of $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$. If M consists of a single disc-orbit, then there exists a global one-sided neighborhood Ω_M of M such that for every $f \in \mathscr{C}^0_{CR}(M)$, there exists $F \in \mathscr{O}(\Omega_M) \cap \mathscr{C}^0(\Omega_M \cup M)$ with $F|_M = f$.*

Generalizing such arguments to higher codimension seems to be difficult.

Open question 9.33. *Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be a connected generic submanifold of codimension $d \geqslant 2$ and of CR dimension $m \geqslant 1$. Assume that M consists of a single disc orbit. Does holomorphic extension to a wedge propagate along strings of attached analytic discs ? Does there exist a wedgelike domain attached to M to which $\mathscr{C}^0_{CR}(M)$ extends holomorphically ?*

9.34. Trépreau's theorem for continuous graphs. As explained in Section 1(VI), every domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$ has an envelope of holomorphy $\mathsf{E}(\Omega)$, which is a Riemann domain spread over $\mathbb{C}^n$. It is hard to determine the global as well as the local nature of $\mathsf{E}(\Omega)$. In certain specific situations, some information may be gained however.

Let $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $w = u + i\,v \in \mathbb{C}$ and let $\Omega \subset \mathbb{C}_z^{n-1} \times \mathbb{C}_w$ be a tube domain of the form $D \times \mathbb{R}_v$, where D is some domain in $\mathbb{C}_z^{n-1} \times \mathbb{R}_u$. We assume that Ω is pseudoconvex.

Consider a hypersurface M of Ω given as the graph $v = \varphi(z, u)$ of a continuous function $h : D \to \mathbb{R}_v$. It divides the tube Ω in two open sets

$$\Omega^\pm := \big\{(z, w) \in \Omega : \pm(v - h(z, u)) > 0\big\}.$$

Such hypersurfaces and domains are of semi-global nature. Typically, this class includes hypersurfaces of class $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$, $\mathscr{C}^\infty$ or $\mathscr{C}^\omega$ that are localized in a neighborhood of a point.

All domains considered here will be subdomains of Ω. The next proposition says that the envelopes of holomorphy $\Omega_\oplus = \mathsf{E}(\Omega^+)$ of Ω^+ and $\Omega_\ominus = \mathsf{E}(\Omega^-)$ of Ω^- are univalent ("schlicht") and that their boundary is graphed over D.

Proposition 9.35. ([Trp1986, JaPf2000]) *There exists an upper semi-continuous function $h_+ \leqslant h$, with the domain $\Omega_\oplus := \{v > h_+\}$ being pseudoconvex and containing Ω_+, such that for every holomorphic function $f_+ \in \mathscr{O}(\Omega_+)$, there exists a holomorphic function $f_\oplus \in \mathscr{O}(\Omega_\oplus)$ with $f_\oplus|_{\Omega_+} = f_+$. A similar property holds for Ω_-, with a lower semi-continuous function $h_- \geqslant h$.*

The proof of this proposition is abstract (nonconstructive) and does not provide any information about the sizes of $\Omega_\oplus$ and of $\Omega_\ominus$. In fact, both h_+ and h_- may be checked to be continuous ([Sh1993]).

By means of the notion of *harmonic motion*. Chirka established a strong semi-global version of Trépreau's Theorem 2.4 for Lipschitz ([Ch1994]) graphs, and even for continuous graphs.

Theorem 9.36. ([Ch1994, Ch2001]) *As above, let $M \subset \Omega = D \times \mathbb{R}_v$ be the graph $\{v = h(z, u)\}$ of a real continuous function over a convex domain $D \subset \mathbb{C}_z^{n-1} \times \mathbb{R}_u$. Let $p \in M$ be a point at which neither Ω_+ nor Ω_- extend holomorphically at p. Then there exists a contractible domain of holomorphy $G \subset \mathbb{C}^{n-1}$ and a holomorphic function $f \in \mathscr{O}(G)$ such that M contains the graph $\{w = f(z)\}$ passing through p and $\{w = f(z)\}$ is closed in M.*

9.37. Locally determined envelopes of holomorphy. The general study of the local or global envelope of holomorphy[8] of a domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$ is an almost untouched subject. Understanding deeply this enigma

[8]The reader is referred to Section 1(VI) for some background material.

would provide several applications in Analysis and Geometry on non-pseudoconvex boundaries, a poorly developed subject.

Définition 9.38. (E. Bedford, Math. Ann., 1988) The envelope of Ω is *locally determined* at a point $p \in \partial\Omega$ if there exists a domain $\widetilde{\Omega}$ with the property that $p \in \partial\widetilde{\Omega}$ and for every sufficiently small open ball B_p' containing p, there exists an open ball B_p'' containing p such that

$$B_p'' \cap \mathsf{E}\big(\Omega \cap B_p'\big) = \widetilde{\Omega} \cap B_p'.$$

In other words, $p \in \partial\mathsf{E}\big(\Omega \cap B_p'\big)$ and the germ of $\mathsf{E}\big(\Omega \cap B_p'\big)$ at p is independent of B_p'.

Assume now that $n = 2$ with $\partial\Omega \in \mathscr{C}^\infty$ represented by $v = \varphi(z, u)$ near a central point $p \in \partial\Omega$, corresponding to the origin of the coordinates $(z, u + iv)$. If $\partial\Omega$ is strongly pseudoconvex (resp. strongly pseudoconcave) at p, then $\mathsf{E}(\Omega)$ is (resp. is not) locally determined at p. If $\partial\Omega$ has type 3 at p, the last phrase of Theorem 1.24 says that holomorphic extension from both sides of $\partial\Omega$ hold, whence $\mathsf{E}(\Omega)$ is not locally determined at p. So assume that $\partial\Omega$ has type 4 at p. Following Bedford, assign weight 1 to the variables z, $\bar{z}$ and weight 2 to the variable u. After elementary normalizing biholomorphisms, Ω is given by :

$$v > \pm z^2\bar{z}^2 + a\, z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) + b\, uz\bar{z} + (\text{weight} \geqslant 5),$$

where $a, b \in \mathbb{R}$. Changing z to $-z$ if necessary, we may assume that $a \geqslant 0$. If there is a "$-$" sign or if $a > 1/\sqrt{2}$, Example 1.28 says that $\mathscr{O}(\Omega)$ extends holomorphically to the other side at p, whence $\mathsf{E}(\Omega)$ is not locally determined. So assume that the sign is "$+$" and that $0 \leqslant a < 1/\sqrt{2}$.

Theorem 9.39. (ibidem) *Assume that $\partial\Omega$ is represented by*

$$v > z^2\bar{z}^2 + a\, z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) + b\, uz\bar{z} + (\text{weight} \geqslant 5),$$

with $0 \leqslant a < \frac{2}{3}$ and $b \neq 0$. Then $\mathsf{E}(\Omega)$ is locally determined at the origin. More precisely, there exists a Levi-flat hypersurface $\Sigma \subset \mathbb{C}^2 \backslash \overline{\Omega}$ having boundary a curve $\Gamma \subset \partial\Omega$ with $p \in \Gamma$ such that $\mathsf{E}(\Omega)\backslash\Omega$ is in a neighborhood of p the space between Σ and $\partial\Omega$.

The assumption $b \neq 0$ insures the existence of a large pseudoconcave region in $\partial\Omega$ (the reader is referred to the diagram of Bedford). Even with such a simple osculating quartic, some interesting technical problems are left unanswered by Bedford : is $\mathsf{E}(\Omega)$ not locally determined when $a > \frac{2}{3}$? Is Γ smooth at 0 ?

Answering in the negative a question of Cerveau about the existence of dense orbits for holomorphic maps of smoothly bounded relatively compact domains of $\mathbb{C}^n$, Fornæss-Stensones improved Proposition 9.35 by means of elementary arguments.

Theorem 9.40. (Fornaess-Stensones, 2005) *Assume that $\partial\Omega$ is locally a Lipschitz graph and let $p \in \partial\Omega$. If $\mathsf{E}(\Omega)$ is locally determined at p, then $\partial\Omega$ is also a Lipschitz graph at p and has the* same *Lipschitz constant as $\partial\Omega$.*

We conclude by formulating a wide open direction of research.

Open problem 9.41. *In the case where $\partial\Omega$ is a local hypersurface of class $\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$, $\mathscr{C}^\infty$ or $\mathscr{C}^\omega$, find constructive ways of describing the local envelope of holomorphy of Ω. Understand when $\mathsf{E}(\Omega)$ is locally determined at a point $p \in \partial\Omega$. Is $\partial\mathsf{E}(\Omega)$ always of class $\mathscr{C}^2$ or $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ at a locally determined point ?*

9.42. Analytic discs half-attached to maximally real submanifolds. Let $M^1 \subset \mathbb{C}^n$ be a local $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$ ($\kappa \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$) maximally real submanifold and let $p \in M^1$. By Theorem 4.2(III), there exist local coordinates $z = x + iy$ centered at p in which M^1 is represented by $y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, n$, for some $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$ graphing functions φ_k defined for $|x| < \rho_1$ and satisfying $\varphi_k(0) = 0$ and $d\varphi_k(0) = 0$. It is known that M^1 is locally polynomially convex and that there exist no local analytic disc attached to M^1. However, in 1974, using a cut-off function with support on proper subset of $\partial\Delta$, Pinchuk ([Pi1974a]) formulated a Bishop-type equation whose solvability shows that there are plenty of discs partly attached to M^1, the remainder of their boundary being free to wander anywhere in $\mathbb{C}^n$.

If Δ is the unit disc of $\mathbb{C}$, we denote by

$$\partial^+\Delta := \big\{\zeta \in \mathbb{C} : \, |\zeta| = 1, \, \mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0\big\} = \big\{e^{i\,\theta} : \, |\theta| \leqslant \pi/2\big\}$$

the closed right part of its full boundary $\partial\Delta$. We say that an analytic disc $A \in \mathscr{O}(\Delta, \mathbb{C}^n) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Delta}, \mathbb{C}^n)$ is *half-attached* to M if $A(\partial^+\Delta) \subset M^1$. We provide a refinement of Pinchuk's statement by showing that the jet of the real curve $\theta \mapsto A(e^{i\,\theta})$ may be any prescribed κ-th jet.

Theorem 9.43. *There exists $\chi_1 > 0$ with $\chi_1 << \rho_1$ and there exists a $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha-0}$ family of analytic discs*

$$A_{x_0^0, x_1^0, \dots, x_\kappa^0}(\zeta) = X_{x_0^0, x_1^0, \dots, x_\kappa^0}(\zeta) + i\, Y_{x_0^0, x_1^0, \dots, x_\kappa^0}(\zeta)$$

defined for $x_\lambda^0 \in \mathbb{R}^n$, $|x_\lambda^0| < \chi_1$, $\lambda = 0, \dots, \kappa$, that are half-attached to M^1, namely $A_{x_0^0, x_1^0, \dots, x_\kappa^0}(\partial^+\Delta) \subset M^1$, such that, for $\lambda = 0, 1, \dots, \kappa$, we *have* :

$$\frac{\partial^\lambda X_{x_0^0,x_1^0,\dots,x_\kappa^0}}{\partial\theta^\lambda}(1) = x_\lambda^0.$$

Equivalently, the Taylor series up to order κ of the x-component of the half-attached disc

$$X_{x_0^0,x_1^0,\dots,x_\kappa^0}(e^{i\,\theta}) = x_0^0 + \theta\, x_1^0 + \cdots + \frac{\theta^\kappa}{\kappa!}\, x_\kappa^0 + \mathrm{O}(\theta^{\kappa+\alpha})$$

is any prescribed Taylor series.

After formulating a corresponding Bishop-type equation, the proof is an application of Theorem 3.7(IV). We shall not provide the details that involve a constructive estimation of χ_1. In the case where M is real analytic, the proof is much more simple : it just consists in complexifying families of real analytic curves contained in M^1. Also, we mention that some automatic regularity up to the boundary is got from the assumption that A is half-attached to a totally (not necessarily of maximal dimension n) real submanifold.

Theorem 9.44. ([Ch1975, CCS1999]) *Let $A \in \mathscr{O}(\Delta, \mathbb{C}^n) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Delta}, \mathbb{C}^n)$ be an analytic disc half-attached to a totally real $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$ submanifold M of $\mathbb{C}^n$, where $\kappa \geqslant 1$ and $0 < \alpha < 1$. Then for every θ_1 with $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, the disc A is $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha-0}$ on $\Delta \cup \{e^{i\,\theta} : \ |\theta| \leqslant \theta_1\}$.*

9.45. Some uniqueness principles. We consider Theorem 9.43 with $\kappa = 1$. Notice that for fixed x_0^1, the points

$$A_{x_0^0,x_0^1}(1) = x_0^0 + i\,\varphi(x_0^0)$$

cover a neighborhood of the central point p in M^1, as x_0^0 runs in $\square_{\chi_1}^n$. Also, the vectors $\left[\partial A_{0,x_0^1}/\partial\theta\right](1) = x_0^1 \in T_pM^1$ cover a neighborhood of p in T_pM^1, as x_0^1 runs in $\square_{\chi_1}^n$.

These families of discs enable to cover any local wedge of edge M at 0. Let $\|x\| := (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ denote the Pythagorean norm. Fixing $x_0^0 = 0$ and the norm $\|x_0^1\| = \mathrm{constant} \neq 0$, the lines $\mathbb{R}\left[\partial A_{0,x_0^1}/\partial\theta\right](1) = \mathbb{R}\, x_0^1$ rotate in T_pM^1 and describe any straight direction issued from p.

Lemma 9.46. *If χ_2 with $0 < \chi_2 < \chi_1$ is small and if $C \subset \mathbb{R}^n$ is an open truncated salient cone with vertex at the origin, the set*

$$\left\{A_{x_0^0,x_0^1}(\zeta) : \ \zeta \in \Delta, \ |\zeta - 1| < \chi_2, \ |x_0^0| < \chi_2, \ x_0^1 \in C, \ \|x_0^1\| = \chi_2\right\}$$

constitutes a local wedge of edge M^1 at p. Conversely, every local wedge of edge M^1 at p contains such a set, described as pieces of analytic discs half-attached to M^1.

We deduce an extrinsic version of Corollary 5.4(III)[9].

Corollary 9.47. ([Pi1974a, BER1999, BCH2005], [$*$]) *Let M be a $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ local generic submanifold of $\mathbb{C}^n$ of CR dimension $m \geqslant 1$, let $p \in M$ and let $\mathscr{W}_p$ be a local (connected) wedge of edge M at p. Let $M_1 \subset M$ be a local $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ maximally real submanifold passing through p and contained in the edge of $\mathscr{W}_p$. Let $f \in \mathscr{O}(\mathscr{W}_p) \cap \mathscr{C}^0(\mathscr{W}_p \cup M) \cap \mathscr{C}^0_{CR}(M)$. Then $f = 0$ in $\mathscr{W}_p$ if and only if $f = 0$ on M_1.*

For the proof, we consider a family of analytic discs half-attached to M_1 and covering a small local wedge $\mathscr{W}^1 \subset \mathscr{W}_p$ of edge M^1 at p. The restriction of the continuous function f to each disc vanishes on one half of the boundary, hence on the whole disc, hence on all $\mathscr{W}_1$, and finally on all $\mathscr{W}_p$ by connectedness of $\mathscr{W}_p$.

We notice that the corollary may be strengthened by requiring that the continuous function f vanishes on some closed subset $C \subset M^1$ such that, for some small neighborhood U_p of p in M, the n-dimensional (Lebesgue) measure of $C \cap U_p$ is positive : it suffices to apply Corollary 9.54 disc by disc.

We now expose another uniqueness principle. Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a domain in $\mathbb{C}$ equipped with the coordinate $z = x + i\,y$. Assume that $0 \in \Omega$ and denote by $\Omega^+ := \Omega \cap \{y > 0\}$. We say that a holomorphic map

$$h \in \mathscr{O}(\Omega^+, \mathbb{C}^n) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega^+}, \mathbb{C}^n)$$

vanishes to infinite order at 0 if for every $N \in \mathbb{N}$, there exists a constant $C_N > 0$ such that $|h(z)| \leqslant C_N\, |z|^N$ for every $z \in \Omega^+$.

Proposition 9.48. ([HuKr1993, BR1993]) *Let $h \in \mathscr{O}(\Omega^+, \mathbb{C}^n) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega^+}, \mathbb{C}^n)$ and assume that*

$$h(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset \{|\mathrm{Im}\, z| \leqslant c\, |\mathrm{Re}\, z|\},$$

for some $c \in \mathbb{R}$ with $0 < c < 1$. Then h vanishes to infinite order at 0 if and only if $h \equiv 0$.

Let now $M \subset \mathbb{C}^n$ be $\mathscr{C}^1$ totally real submanifold and let $p \in M$. There exist coordinates $z_k = x_k + i\, y_k$ centered at p such that M is locally contained in $\{\mathrm{Im}\, z| \leqslant c|\mathrm{Re}\, z|\}$ for some $c \in \mathbb{R}$ with $0 < \beta < 1$. The following corollary says that discs partially attached to a totally real submanifold cannot be flat at one point unless they are constant.

[9]We observe that in Corollary 5.4(III), no assumption of wedge extendability was made. But in a flow-box situation as in Theorem 1.21(III), each CR orbit of M possesses an attached analytic wedge (Theorem 5.2) to which the uniqueness principle applies. So the two corollaries are essentially equivalent (excepting smoothness assumptions).

Corollary 9.49. ([HuKr1993, BR1993]) *Let Ω be an open connected neighborhood of 0 in $\mathbb{C}$, let $M \subset \mathbb{C}^n$ be a totally real $\mathscr{C}^1$ submanifold and let $h : \overline{\Omega^+} \to \mathbb{C}^n$ be continuous, holomorphic in Ω^+ and satisfying $h(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset M$. Then h vanishes to infinite order at 0 if and only if $h \equiv 0$.*

This uniqueness principle fails for discs attached to CR manifolds of positive CR dimension. Consider for instance a rigid polynomial hypersurface M of $\mathbb{C}^2$ of equation $v = \sum_{2 \leqslant j+k \leqslant m} a_{jk}\, z^j\, \bar{z}^k$.

Theorem 9.50. ([ABR1994]) *If M is of finite type at the origin and if $a_{jk} = 0$ whenever $j = k$, then for every $\varepsilon > 0$, there exist a nonconstant analytic disc $A_\varepsilon \in \mathscr{O}(\Delta, \mathbb{C}^n) \cap \mathscr{C}^\infty(\overline{\Delta}, \mathbb{C}^n)$ attached to M with $|A(\zeta)| \leqslant \varepsilon$ for $\zeta \in \overline{\Delta}$ that is flat at $1 \in \partial\Delta$, namely for all $k, l \in \mathbb{N}$*

$$\frac{\partial^{k+l} A}{\partial \theta^k\, \partial^l r}(1) = 0.$$

9.51. Strong uniqueness principle and CR F. and M. Riesz theorem. A classical theorem due to the brothers F. and M. Riesz states that if μ is complex-valued measure on $\partial\Delta$ whose negative Fourier coefficients $\widehat{\mu}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2i\pi k\, \theta}\, d\mu(\theta)$, $k = -1, -2, \dots$ all vanish, then μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure $d\theta$ on $\partial\Delta$. Consequently, by the Radon representation theorem, $\mu = f\, d\theta$, for some $f \in L^1(\partial\Delta)$.

In fact, the negative Fourier coefficients of μ all vanish if and only if there exists a holomorphic function $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ having μ as weak boundary value $\mathsf{b}_{\partial\Delta}(f)$. Recall that a weak boundary value of f is a (clearly unique) function g on $\partial\Delta$ satisfying $\lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\, e^{i\,\theta})\, \varphi(e^{i\,\theta})\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\,\theta})\, \varphi(e^{i\,\theta})\, d\theta$, for every $\varphi \in \mathscr{C}^0(\partial\Delta)$. So the theorem may be restated equivalently as follows.

Theorem 9.52. ([Ka1968, Dy1991]) *If a holomorphic function $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ has weak boundary value $\mathsf{b}_{\partial\Delta}(f)$ that is a measure, then in fact $\mathsf{b}_{\partial\Delta}(f)$ belongs to $L^1(\partial\Delta)$.*

To obtain a generalization to the CR context, it suffices to observe that on a globally (or locally) minimal generic submanifold, a wedgelike open set is constructed by means of parametrized families of attached analytic discs. Thus, a parametrized version of the previous theorem together with standard arguments from measure theory yield the following.

Theorem 9.53. ([CR2003], [$*$]) *Every CR measure on a globally minimal $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ generic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ is represented by a L^1_{loc} CR function on M.*

The minimality assumption is necessary. Indeed, Proposition 4.38(III) has exhibited local CR measures supported by any local piece of proper CR submanifold $S \subset M$ having the same CR dimension as M.

A classical corollary of the F. and M. Riesz Theorem 9.52 is a uniqueness principle at the boundary that includes the case where $f \in \mathscr{O}(\Delta) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Delta})$.

Corollary 9.54. ([Ka1968, Dy1991]) *Let $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ that has weak boundary value $\mathsf{b}_{\partial\Delta}(f)$ belonging to $L^1(\partial\Delta)$. Then $f = 0$ if and only if there exists a closed subset $C \subset \partial\Delta$ of positive one-dimensional measure on which f vanishes.*

On the Levi-flat hypersurface $\{\operatorname{Im} w = 0\}$ of $\mathbb{C}_z^{n-1} \times \mathbb{C}_w$, any continuous function of the form $f = f(u)$ is CR, but there exist nonzero functions of a single real variable u that do vanish outside a given arbitrary closed set. Thus, to generalize the corollary, an assumption of minimality is unavoidable.

Borrowing the notation H^* for Hausdorff measures introduced in §3.1(VI), we shall denote by H^k "the" k-dimensional Lebesgue measure on a manifold of dimension k equipped with some Riemannian metric ; in fact, two such measures differ only by some innocuous positive function. For instance, the ambient flat Euclidean metric on $\mathbb{C}^n$ induces a $(2m+d)$-dimensional Lebesgue measure on any generic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$.

Theorem 9.55. ([BH2000, CR2003, BCH2005], [$*$]) *Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be a $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ generic submanifold of codimension $d \geqslant 1$ and of CR dimension $m \geqslant 1$ (hence of dimension $2m+d$) that is globally minimal*[10] *and let $C \subset M$ be a closed subset having positive (possibly infinite) Lebesgue measure $\mathsf{H}^{2m+d}(C) > 0$. Let $f \in \mathscr{C}^0_{CR}(M)$ or $f \in L^{\mathsf{p}}_{loc,CR}(M)$, $\mathsf{p} \geqslant 1$. Then $f = 0$ if and only if $f|_C = 0$.*

Some informal words about the elementary proof. By Theorems 4.12 and 4.13, f extends holomorphically to a wedgelike domain $\mathscr{W}$ attached to M. Let p be a point of C such that $H^{2m+d}(C \cap U_p) > 0$ for some small open neighborhood U_p of p in M. As in the uniqueness Corollary 9.47, we construct a family of local analytic discs half-attached to some maximally real submanifold $M^1 \subset M$ passing through p that covers a local wedge $\mathscr{W}_p \subset \mathscr{W}$ of edge M^1 at p. There exists a set $\mathscr{X}$ of positive measure in the set of parameters (x_0^0, x_0^1), such that the one-dimensional measure

[10] It is easy to devise some (superficial) corollaries of this theorem in which M is allowed to contain some CR orbits of dimension $\leqslant 2m+d-1$, but whose union has zero $(2m+d)$-dimensional Hausdorff measure. However, we decided to refrain from formulating easy corollaries that are valid for not globally minimal submanifolds !

of $A_{x_0^0,x_0^1}(\partial^+\Delta)\cap C$ is positive for every $(x_0^0,x_0^1)\in\mathscr{X}$. The uniqueness theorem of F. and M. Riesz then yields the vanishing of $f\circ A_{x_0^0,x_0^1}$ on $\overline{\Delta}$, for all those $(x_0^0,x_0^1)\in\mathscr{X}$. Then in the wedge $\mathscr{W}_p$, the function f vanishes on a set of positive measure, hence everywhere in $\mathscr{W}_p$ and finally everywhere on the connected $\mathscr{W}\supset\mathscr{W}_p$. The same proof yields the following.

Corollary 9.56. *Let M be as in Theorem 9.55, but without any assumption of minimality. Let $p\in M$ and assume given a local wedge $\mathscr{W}_p$ of edge M at p. Let U_p be a small open neighborhood of p with $\overline{U}_p$ contained in the open edge of $\mathscr{W}_p$ and let C be a closed subset of U_p with $\mathsf{H}^{2m+d}(C\cap U_p)>0$. Let $f\in H^{\mathsf{p}}_{loc}(\mathscr{W}_p)$ or $f\in\mathscr{O}(\mathscr{W}_p)\cap\mathscr{C}^0(\mathscr{W}_p\cup M)\cap\mathscr{C}^0_{CR}(M)$. Then $f=0$ if and only if $f|_C=0$.*

The two monographs [Trv1992, BCH2005] deal not only with embedded structures but also with locally integrable CR structures. For instance, Theorem 9.55 (with an assumption of local minimality at almost every point, instead of global minimality) is also stated for locally integrable structures in [BH2000, BCH2005]. Nevertheless, most topics exposed here are not yet embraced in a comprehensive theory.

Open problem 9.57. *Transfer the theory of holomorphic extension of CR functions to locally integrable structures.*

RÉFÉRENCES

[ABR1994] ALINHAC, S. ; BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCHILD, L.P. : *Flat analytic discs attached to real hypersurfaces of finite type*, Math. Research Lett. **1** (1994), no. 3, 359–367.

[BCT1983] BAOUENDI, M.S. ; CHANG, C.H. ; TREVES, F : *Microlocal hypo-analyticity and extension of CR functions*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 3, 331–391.

[BER1999] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCHILD, L.P. : *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton Mathematical Series, **47**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, xii+404 pp.

[BER2003] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCHILD, L.P. : *Dynamics of the Segre varieties of a real submanifold in complex space*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 1, 81–106.

[BR1988] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCHILD, L.P. : *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent. Math. **93** (1988), no. 3, 481–500.

[BR1990] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCHILD, L.P. : *Geometric properties of mappings between hypersurfaces in complex space*, J. Differential Geom. **31** (1990), 473–499.

[BR1993] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCHILD, L.P. : *Unique continuation and a Schwarz reflection principle for analytic sets*, Commun. in partial differential equations **18** (1993), no. 11, 1961–1970.

[BRT1994] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCHILD, L.P. ; TRÉPREAU, J.-M. : *On the geometry of analytic discs attached to real manifolds*, J. Diff. Geom. **39** (1994), 379–405.

[BH2000] BERHANU, S. ; HOUNIE, J. : *Uniqueness for locally integrable solutions of overdetermined systems*, Duke Math. J. **105** (2000), no. 3, 387–410.

[BH2003] BERHANU, S. ; HOUNIE, J. : *Traces and the F. and M. Riesz theorem for vector fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), no. 5, 1425–1460.

[BCH2005] BERHANU, S. ; CORDARO, P. ; HOUNIE, J. : *An introduction to involutive structures*, New Mathematical Monographs Series, Cambridge University Press, to appear.

[Ch1975] CHIRKA, E.M. : *Analytic representation of CR-functions* (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **98(140)** (1975), no. 4(12), 591–623, 640.

[Ch1989] CHIRKA, E.M. : *Complex analytic sets*, Mathematics and its applications (Soviet Series), **46**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. xx+372 pp.

[Ch1994] CHIRKA, E.M. : *Radò's theorem for CR-mappings of hypersurfaces* (Russian), Mat. Sb. **185** (1994), no. 6, 125–144 ; translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. **82** (1995), no. 1, 243–259.

[Ch2001] CHIRKA, E.M. : *Levi and Trépreau theorems for continuous graphs.* (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova **235** (2001), Anal. i Geom. Vopr. Kompleks. Analiza, 272–287 ; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2001, no. 4 (235), 261–276.

[CCS1999] CHIRKA, E.M. ; COUPET, B. ; SUKHOV, A. : *On boundary regularity of analytic discs*. Michigan Math. J. **46** (1999), no. 2, 271–279.

[CR1994] CHIRKA, E.M. ; REA, C : *Normal and tangent ranks of CR mappings* Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 417–431.

[CR1998] CHIRKA, E.M. ; REA, C : *Differentiable CR mappings and CR orbits*, Duke Math. J. **94** (1998), no. 2, 325–340.

[CR2003] CHIRKA, E.M. ; REA, C : *The F. and M. Riesz theorem for CR functions*, Math. Z. **250** (2005), no. 1, 1–6.

[De1997] DEMAILLY, J.-P. : *Analytic and algebraic geometry*, lecture notes available at : `http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼demailly`.

[DF1978] DIEDERICH, K. ; FORNÆSS, J.E. : *Pseudoconvex domains with real analytic boundary*, Ann. of Math. **107** (1978), no. 2, 371–384.

[DF1988] DIEDERICH, K. ; FORNÆSS, J.E. : *Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann **282** (1988), no. 4, 681–700.

[DP1993] DIEDERICH, K. ; PINCHUK, S. : *The inverse of a CR-homeomorphism is CR*, Internat. J. Math. **4** (1993), no. 3, 379–394.

[DP2003] DIEDERICH, K. ; PINCHUK, S. : *Regularity of continuous CR-maps in arbitrary dimension*, Michigan Math. J. **51** (2003), 111–140. *Erratum* : *ib.*, no. 3, 667–668.

[DW1980] DIEDERICH, K. ; WEBSTER, S.M. : *A reflection principle for degenerate real hypersurfaces*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 4, 835–843.

[Dy1991] DYN'KIN, E.M. : *Methods of the theory of singular integrals : Hilbert transform and Calderón-Zygmund theory*, in : *Commutative Harmonic Analysis, I*, Encyclopædia of mathematical sciences, Vol. 15, V.P. Khavin and N.K. Nikol'skij (Eds.), Springer-Verlag, 1991, pp. 167–259.

[FR1985] FORNÆSS, J.E. ; REA, C. : *Local holomorphic extendability and nonextendability of CR-functions on smooth boundaries*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **(4) 12** (1985), no. 3, 491–502.

[He1980] HENKIN, G.M. : *Analytic representation for CR-functions on manifolds of codimension* 2 *in* $\mathbb{C}^n$, Soviet. Math. Dokl. **21** (1980), no. 1, 85–91.

[HM1998] HOUNIE, J. ; MALAGUTTI, P. : *On the convergence of the Baouendi-Treves approximation formula*, Comm. P. D. E. **23** (1998), 1305–1347.

[HuKr1993] HUANG, X. ; KRANTZ, S.G. : *A unique contiunation problem for holomorphic mappings*, Commun. in partial differential equations **18** (1993), no. 2, 241–253.

[HuKr1995] HUANG, X. ; KRANTZ, S.G. : *On a problem of Moser*, Duke Math. J. **78** (1995), no. 1, 213–228.

[JaPf2000] JARNICKI, J. ; PFLUG, P. : *Extension of holomorphic functions*, De Gruyter Expositions in Mathematics, 34, De Gruyter, Berlin, 2000, x+487 pp.

[Ka1968] KATZNELSON, Y. : *An introduction to harmonic analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney 1968 xiv+264 pp.

[Me2002] MERKER, J. : *On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **52** (2002), no. 5, 1443–1523.

[MP2006a] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *Characteristic foliations on maximally real submanifolds of* $\mathbb{C}^n$ *and removable singularities for CR functions*, Internat. Math. Research Publications, Volume **2006**, Pages 1–131.

[MP2006c] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *A geometrical proof of the Hartogs extension theorem*, Preprint 06-10, november 2006, École Normale Supérieure, 36 pp., submitted to J. Geom. Anal.

[Pi1974a] PINCHUK, S. : *A boundary uniqueness theorem for holomorphic functions of several complex variables*, Mat. Zametki **15** (1974), 205–212.

[Po2004] PORTEN, E. : *Habilitationsschrift*, Humboldt Universität zu Berlin, November 2004.

[Ro1993] ROSAY, J.-P. : *Trépreau's example, a pedestrian approach*, L'enseignement Mathématique **39** (1993), 259–268.

[RS1989] ROSAY, J.-P. ; STOUT, E.L. : *Radò's theorem for CR functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 1017-1026.

[Sh1993] SHCHERBINA, N.V. ; *On the polynomial hull of a graph*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 2, 477–503.

[Trp1986] TRÉPREAU, J.-M. : *Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe* $\mathbf{C}^2$, Invent. Math. **83** (1986), no. 3, 583–592.

[Trp1990] TRÉPREAU, J.-M. : *Sur la propagation des singularités dans les variétés CR*, Bull. Soc. Math. Fr. **118** (1990), no. 4, 403–450.

[Trp1992] TRÉPREAU, J.-M. : *On the extension of holomorphic functions across a real hypersurface*, Math. Z. **211** (1992), no. 1, 93–103.

[Trp1996] TRÉPREAU, J.-M. : *Holomorphic extension of CR functions : a survey*, Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995 ; Lund 1995), 333–355, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 21, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[Trv1986] TREVES, F. : *Overdetermined systems defined by complex vector fields*, Miniconference on geometry and partial differential equations (Canberra, 1985), 224–243, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 10, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986.

[Trv1992] TREVES, F. : *Hypo-analytic structures : local theory*. Princeton Mathematical Series, **40**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992, xvii+497 pp.

[Tu1988] TUMANOV, A.E. : *Extending CR functions on a manifold of finite type over a wedge* (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **136(178)** (1988), no.1, 128–139. English transl. in Math. USSR-Sb. **64** (1989) no. 1, 129–140.

[Tu1990] TUMANOV, A.E. : *Extending CR-functions into a wedge*, Mat. Sbornik **181** (1990), 951–964. Trad. in English in Math. USSR Sbornik **70** (1991), 2, 385–398.

[Tu1994a] TUMANOV, A.E. : *Connections and propagation of analyticity for CR functions*, Duke Math. J. **73** (1994), no. 1, 1–24.

[Tu1994b] TUMANOV, A.E. : *Analytic discs and the regularity of CR mappings in higher codimension*, Duke Math. J. **76**, no. 3, 793–807.

[Tu1996] TUMANOV, A.E. : *On the propagation of extendibility of CR functions*. Complex analysis and geometry (Trento, 1993), 479–498, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **173**, Dekker, New York, 1996.

[Tu1998] TUMANOV, A.E. : *Analytic discs and the extendibility of CR functions*, Integral geometry, Radon transforms and complex analysis (Venice, 1996), 123–141, Lecture Notes in Math., **1684**, Springer, Berlin, 1998.

Enfin, pour terminer sur ces programmes de recherche, je collecte toutes les questions ouvertes que j'ai formulées dans le mémoire de survol à IMRS. La numérotation est celle de ma version définitive, avant modification pour publication, et l'on trouve cette version sur `arxiv.org` et dans l'un des 5 travaux sélectionnés apparaissant dans ce dossier. Aucune question n'est facile.

II. Analytic vector field systems, formal CR mappings and local CR automorphism groups.

Open question 3.32. *Does formal equivalence coincide with biholomorphic equivalence in the category of real analytic generic local submanifolds of $\mathbb{C}^n$ whose CR orbits have non-constant dimension ?*

Open question 3.37. *Let h be a formal equivalence between two real analytic generic submanifolds of $\mathbb{C}^n$ which are minimal at a Zariski-generic point.*

- *Is the reflection mapping convergent ?*
- *Is h uniquely determined by a jet of finite order when the target is holomorphically nondegenerate ?*
- *Is h convergent under the assumption that the real analytic target M' does not contain any complex analytic curve ?*

Open problem 3.38. *Formulate a* necessary and sufficient *condition for the local algebraizability of a real analytic hypersurface $M \subset \mathbb{C}^n$ in terms of a basis of the (differential) algebra of its Cartan-Hachtroudi-Chern invariants.*

III. Sussman's orbit theorem, locally integrable systems of vector fields and CR functions.

Open problem 1.2. *Find versions of the Cartan-Vessiot-Kähler theorem for systems of vector fields having smooth non-analytic coefficients.*

Open question 2.17. *Given a finite type collection $\mathbb{K}^0 = \{K_b\}_{1\leqslant b\leqslant s}$, $s \geqslant 3$, of $\mathscr{C}^{\kappa-1}$ vector fields on M of class $\mathscr{C}^\kappa$ with the property that $\mathbb{K}^\kappa(p) = T_pM$ at every point and given a $\mathscr{C}^{\kappa-1}$ subsystem $\mathbb{L}^0 = \{L_a\}_{1\leqslant a\leqslant r}$, $2 \leqslant r \leqslant s-1$, of the form $L_a = \sum_{1\leqslant b\leqslant s} \psi_{a,b} K_b$, is it always possible to perturb slightly the functions $\psi_{a,b} : M \to \mathbb{R}$ so as to render $\mathbb{L}^0$ of finite type at every point ? If so, what is the smallest regularity κ, in terms of r, s and the highest type of $\mathbb{K}^0$ at points of M ?*

Open problem 3.14. *Find versions of generic non-embeddability for CR structures of codimension 1 having degenerate Levi-form. Find higher codimensional versions of generic non-embeddability.*

Open problem 3.24. *Find generalizations of the Kuranishi-Akahori-Webster-Ma-Michel theorem to* higher codimension*, using the integral formulas for solving the $\overline{\partial}_M$ due to Ayrapetian-Henkin. Replace the assumption of strong pseudoconvexity by finer nondegeneracy conditions, e.g. weak pseudoconvexity and finite type in the sense of Kohn.*

Open question 4.20. *Is any compact orientable connected $\mathscr{C}^2$ hypersurface of $P_n(\mathbb{C})$ globally minimal ?*

Open question 4.24. *Given a fixed generic submanifold M of class $\mathscr{C}^\kappa$ that is of finite type at every point, is it always possible to perturb slightly a $\mathscr{C}^\kappa$ submanifold M_1 of M that is generic in $\mathbb{C}^n$, of codimension $d_1 \geqslant 1$ and of CR dimension $m_1 = n - d_1 \geqslant 1$, as a $\mathscr{C}^\kappa$ submanifold $\widetilde{M_1}$ of M that is of finite type at every point ? If so, what is the smallest regularity κ in terms of d, m, d_1, m_1 and of the highest type at points of M ?*

Open problem 4.42. *Find criteria for the existence of CR distributions or functions supported by a global CR orbit.*

Open question 5.10. *Is the above unique continuation true for Σ merely $\mathscr{C}^1$?*

IV. Hilbert transform and Bishop's equation in Hölder spaces.

Open problem 3.35. *Solve parametrized Bishop-type equations in Sobolev spaces.*

V. Holomorphic extension of CR functions.

Open problem 1.30. *In the case where m is even, find a necessary and sufficient condition for $\Omega^+_{\varphi_m} = \{v > \varphi_m(z, \bar{z})\}$ to be holomorphically extendable at p, or show that the problem is undecidable.*

VI. Removable singularities.

Open problem 2.24. *Study removability of a $\mathscr{C}^\infty$ locally integrable involutive structure of rank $\lambda \geqslant 2$ in terms of analytic capacity.*

Open question 2.9. *Let $M \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 3$) be a generic submanifold of codimension $d \geqslant 2$ and of CR dimension $m \geqslant 1$ that is at least $\mathscr{C}^1$. Let $f \in \mathscr{C}^0(M)$ that is CR outside its zero-set $f^{-1}(0)$. Is f CR everywhere ?*

Open question 4.20. *Let $\partial\Omega \Subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 3$, be a strongly pseudoconvex boundary of class at least $\mathscr{C}^2$. Suppose that $\partial\Omega$ contains a maximally complex exceptional minimal compact CR-invariant set C. Does C bound a relatively compact subset $\Sigma \subset \Omega$ laminated by complex manifolds ?*

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, UMR 8553 DU CNRS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45 RUE D'ULM, F-75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE. *Internet* : `www.dma.ens.fr/~merker/`

E-mail address: `merker@dma.ens.fr`