RAPPORT SUR LES TRAVAUX DE RECHERCHE ANNÉES 2008, 2009, 2010 ET TRAVAUX ANTÉRIEURS CANDIDATURE PR 25 POSTE 1535 UNIVERSITÉ D'ORSAY WWW.DMA.ENS.FR/∼MERKER/CANDIDATURE.HTML

JOËL MERKER

Table des matières

§1. Publications 2010

Parutions, Acceptations, Prépublications.

□ *Premièrement :* en février 2010, parution aux *Inventiones Mathematicæ* de l'article [32***] qui fournit la première réponse (non optimale) à la conjecture de Green-Griffiths pour les hypersurfaces projectives complexes *de dimension quelconque* (63 pages).

Theorem. ([32***]) *Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a smooth projective hypersurface of degree d and of arbitrary dimension $n \geqslant 2$. If X is generic and if its degree satisfies the* effective *lower bound :*

$$d \geqslant 2^{n^5},$$

then there exists a proper *algebraic subvariety $Y \subsetneqq X$ such that every non-constant entire holomorphic curve $f \colon \mathbb{C} \to X$ has image $f(\mathbb{C})$ contained in Y.*

□ *Deuxièmement :* fin mars 2010, parution sur arxiv.org et soumission à Springer-Verlag de la traduction anglaise annotée du volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen*, par Sophus Lie et Friedrich Engel (650 pages).

Date: 21-9-2010.

□ *Troisièmement :* parution sur arxiv.org de la prépublication [39****] qui établit l'existence de différentielles de jets non identiquement nulles sur les hypersurfaces projectives algébriques complexes de type général $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ en degré *optimal* $d \geqslant n+3$. C'est un résultat définitif pour la *première moitié* de la conjecture de Green-Griffiths (dans le cas hypersurface), à comparer aux bornes 'excentriques' obtenues auparavant.

Main Theorem. ([39****]) *Let $X = X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ be a geometrically smooth n-dimensional projective algebraic complex hypersurface. If X is of general type, namely if its degree d satisfies the optimal lower bound :*

$$d \geqslant n+3,$$

then there exist global algebraic differential equations on X that must be identically satisfied by every nonconstant entire holomorphic curve $f\colon \mathbb{C} \to X$.

More precisely, if $\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X$ denotes the bundle of Green-Griffiths jet polynomials of order κ and of weight m over X, then the following holds true.

Firstly : *for any fixed ample line bundle $\mathscr{A} \to X$ — take* e.g. *simply $\mathscr{A} := \mathscr{O}_X(1)$ —, one has :*

(1)
$$h^0\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X \otimes \mathscr{A}^{-1}\big) \geqslant \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{(\kappa!)^n\,((\kappa+1)n-1)!}\Big\{\tfrac{(\log\kappa)^n}{n!}d(d-n-2)^n - \mathsf{Constant}_{n,d}\cdot(\log\kappa)^{n-1}\Big\} - \\ - \mathsf{Constant}_{n,d,\kappa}\cdot m^{(\kappa+1)n-2},$$

and the right-hand side minorant visibly tends to ∞, as soon as both $\kappa \geqslant \kappa^0_{n,d}$ and $m \geqslant m^0_{n,d,\kappa}$ are large enough.

Secondly : *If P is any global section of $\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X \otimes \mathscr{A}^{-1}$, hence which vanishes on the ample divisor associated to $\mathscr{A}$, then every nonconstant entire holomorphic curve $f\colon \mathbb{C} \to X$ must satisfy the corresponding algebraic differential equation $P(j^\kappa f) = 0$.*

Since the late 1990's, after fundamental works of Bloch, Green-Griffiths and Siu, the so-called Ahlfors-Schwarz for entire holomorphic curves was clarified in full generality, and the second statement above is nowadays (well) known to be a consequence of the first.

The case $n = 2$ of this theorem dates back to Green-Griffiths 1979. Rousseau was the first to study effective (Demailly-Semple) jet differentials in dimension 3, under the conditions $d \geqslant 97$. Diverio treated the next dimensions $n = 4$ and $n = 5$ (improving also $n = 3$ with $d \geqslant 74$), under the conditions $d \geqslant 298$ and $d \geqslant 1222$. The author of the present article improved for $n = 4$ the lower bound to $d \geqslant 259$ (*see* [31****]). At the same time, Diverio showed the (noneffective) existence of a lower bound degree d_n such that $d \geqslant d_n$ insures existence of nonzero global jet differentials. An effective d_n was captured in [32***] (*see* $\widetilde{d}_n^1$, p. 192 there) :

$$d \geqslant 2^{n^4} n^{4n^3} 3^{n^3} n^{3n^2} (n+1)^{n^2+1} n^{2n} 12,$$

far from the optimal $n+3$.

□ *Quatrièmement :* fin juin 2010, acceptation et parution de l'article [31****] (89 pages publiées) sur les invariants de Demailly, travail auquel j'ai consacré une énergie importante (plus de 1300 pages de calculs manuscrits de recherche ainsi que des centaines de pages de calculs d'exploration sur Maple).

□ *Cinquièmement :* en juillet 2010, parution effective chez Hermann du livre sur le problème de Riemann-Helmholtz traité par Lie et Engel (xxiii+325 pages), avec le soutien de l'ANR « *Physique et Géométrie à la Charnière du 19-20ème siècle* » dirigée par Jean-Jacques Szczeciniarz (Paris 7).

§2. Étudiants en doctorat

□ Masoud Sabzevari[1], à Ispahan en Iran, travaille depuis près d'un an sous ma télé-direction (courriel) afin de construire explicitement une connection de Cartan normale et régulière pour les sous-variétés CR génériques $M^5 \subset \mathbb{C}^4$ de codimension 3 qui sont maximalement minimales (*cf.* le travail en cours [43**], en collaboration avec Mansour Aghasi, co-directeur), c'est-à-dire du type décrit par l'énoncé liminaire suivant.

Lemma. *A real analytic 5-dimensional local generic CR-submanifold $M^5 \subset \mathbb{C}^4$ of codimension 3 which is maximally minimal, namely such that $D^1M = T^cM$ has rank 2, $D^2M = [T^cM,\, D^1M]$ has rank 3 and $D^3M = D^2M + [T^cM,\, D^2M]$ has maximal possible rank 5, may be represented in suitable holomorphic coordinates (z, w_1, w_2, w_3) by three complex defining equations of the specific form :*

$$\begin{aligned} w_1 - \overline{w}_1 &= 2iz\overline{z} + \Pi_1(z, \overline{z}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3) \\ w_2 - \overline{w}_2 &= 2iz\overline{z}(z+\overline{z}) + \Pi_2(z, \overline{z}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3) \\ w_3 - \overline{w}_3 &= 2z\overline{z}(z-\overline{z}) + \Pi_3(z, \overline{z}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3), \end{aligned} \tag{2}$$

where the three remainders Π_1, Π_2 and Π_3 are all an $\mathrm{O}(|z|^4) + z\overline{z}\,\mathrm{O}(|w|)$ and satisfy both the standard reality condition and the two normality conditions :

$$0 \equiv \Pi_j(0, \overline{z}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3) \equiv \Pi_j(z, 0, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3) \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Conversely, for any choice of three such analytic functions enjoying all these conditions, the zero-locus of the three equations (2) *above represents a real*

[1] Je suis très satisfait de son engagement dans le travail, de sa réactivité, et du fait qu'il accepte de faire et de refaire des calculs douloureux, condition *sine qua non* pour réussir dans le domaine de Lie et de Cartan.

analytic 5-dimensional local generic CR-submanifold $M^5 \subset \mathbb{C}^4$ *of codimension* 3 *which is maximally minimal.*

□ Lionel Darondeau, élève en fin de 4ème année de l'ENS, a rédigé un mémoire de M2 sous ma direction au printemps 2010 et commence un doctorat cette année à Orsay. Il travaille sur les jets de Green-Griffiths pour les applications de $\mathbb{C}^p$ à valeurs dans une hypersurface algébrique complexe projective $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. Dans la Section 10, p. 26 ci-dessous, on trouvera une brève description de son sujet.

□ Samuel Pocchiola, élève en fin de 4ème année de l'ENS, commence un travail doctoral sous ma direction cette année à Orsay. Deux orientations, que l'on trouvera décrites dans la Section 11, p. 27 : **1)** classification des actions holomorphes locales de groupes de Lie complexes en dimensions 1, 2 et 3, d'après les travaux de Lie, Engel et Amaldi (tel était mon objectif principal lorsque j'ai commencé à travailler dans cette direction, et cela a nécessité la réalisation *préliminaire* des deux livres [35**, 40]) ; **2)** construction de connexions de Cartan pour les structures (locales) CR de dimension 5 qui sont les déformations générales (locales) du cône de lumière dans $\mathbb{C}^3$:

$$0 = (\operatorname{Re} z_1)^2 - (\operatorname{Re} z_2)^2 - (\operatorname{Re} z_3)^2.$$

§3. Constitution du dossier sur l'internet

www.dma.ens.fr/~merker/candidature.html

Environ quatre mille pages réparties comme suit.

□ Deux documents spécifiques :

- Rapport sur les travaux de recherche (54 pages).
- Programmes de recherche (93 pages).

□ Sept compilations thématiques de publications :

(1) Travaux sur une conjecture de Green-Griffiths quant à la dégénérescence algébrique des courbes holomorphes entières de $\mathbb{C}$ à valeurs dans des hypersurfaces projectives complexes (362 pages).

(2) Monographie « *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz* », parue chez Hermann en juillet 2010 (xxiii+325 pages).

(3) Traduction-modernisation du Volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen* par Sophus Lie et Friedrich Engel, soumise à Springer-Verlag (650 pages).

(4) Travaux sélectionnés sur le prolongement holomorphe des fonctions CR (Cauchy-Riemann), sur leurs singularités éliminables, et sur le phénomène de Hartogs dans les espaces complexes $(n-1)$-complets (493 pages, 53 figures en couleurs, 39 en noir et blanc).

(5) Travaux sélectionnés sur la régularité analytique des applications CR lisses ou formelles (366 pages).

(6) Travaux sur les symétries de Lie des équations aux dérivées partielles en relation avec la géométrie CR (384 pages).

(7) Compilation de philosophie des mathématiques : **[j***, **i**, **h****, **g***, **f**, **b*]** (276 pages).

□ Cinq pièces supplémentaires.

(1') *Lie algebras of holomorphic vector fields in dimenions 1, 2 and 3* : basé sur le Volume III de la *Theorie der Transformationsgruppen*, projet qui était jusqu'à présent en attente de complétion de **(2)** et de **(3)**, travail en relation avec le travail doctoral proposé à Samuel Pocchiola (144 pages provisoires).

(2') Essai de philosophie générale des mathématiques, notamment sur le calcul, commencé début décembre 2009 et toujours en travaux (120 pages).

(3') Travail achevé de modernisation du mémoire d'Élie Cartan sur les équations de la gravitation d'Einstein, et travail inachevé de modernisation de la correspondance Cartan-Einstein sur le parallélisme absolu (166 pages).

(4') Recensions 2009 sélectionnées pour MathSciNet ; billets CNRS pour le site « *Images des mathématiques* » (85 pages).

(5') Compilation d'exposés sélectionnés au format pdf, 2003–2008 ($\sim$250 pages). Et aussi : exposés 2009 sélectionnés ($\sim$170 pages).

§4. Perspectives

À moyen terme.

□ Travailler sur l'hyperbolicité au sens de Kobayashi (et non pas seulement sur la dégénérescence algébrique des courbes holomorphes entières au sens de Green-Griffiths), en réalisant les idées de Siu pour construire des différentielles de jets explicites, purement en coordonnées projectives, à l'opposé de l'approche abstraite de type “fibrés de jets”, due à Green-Griffiths et à Demailly. Proposer à Lionel Darondeau des généralisations lorsque ces approches aboutiront.

□ Pour la thèse de philosophie des mathématiques, au livre chez Hermann [35**] et à la traduction annotée soumise à Springer-Verlag s'ajoutera l'*Essai de philosophie générale des mathématiques* [41], principalement centré sur le calcul, et qui se développera au cours des prochains mois.

□ Édifier un mémoire de synthèse en préparation « *CR manifolds, Lie algebras and Cartan connections* », avec accompagnement de calculs effectifs sur Maple afin de mieux lancer Masoud Sabzevari et Samuel Pocchiola dans cette direction de recherche.

□ Piloter Masoud Sabzevari, Lionel Darondeau et Samuel Pocchiola : leur apprendre à faire aboutir les calculs, leur apprendre à être rigoureux et lisibles dans l'écriture, les conduire à la soutenance.

À long terme.

□ Apprendre et peut-être développer les liens entre la théorie des courbes holomorphes entières et l'arithmétique des points entiers sur les variétés rationnelles.

□ Réapprendre, mieux comprendre en profondeur, et peut-être développer en plusieurs variables, la théorie de Nevanlinna.

□ *Attaquer librement* des calculs effectifs avec des polyzêtas et autres séries formelles en lesquelles de multiples combinatoires s'entrelacent.

□ Compléter et rédiger en détail la classification de Lie (partiellement complétée par Amaldi) des actions holomorphes locales de groupes de Lie de dimension finie sur des ouverts de $\mathbb{C}^3$, si ce projet n'aboutit pas déjà avec la thèse de Samuel Pocchiola.

□ Travailler sur les groupes de Lie de dimension *infinie*, d'après Lie et Cartan, et notamment, porter l'accent sur les théorèmes de classification effective.

□ *Développer l'utilisation expérimentée des logiciels de calcul dans l'exploration mathématique visant des démonstrations complètes.*

□ *Édifier un système de philosophie générale des mathématiques centré sur la synthèse entre concept et calcul.*

§5. Emploi du temps 2009 et 2010

□ *De fin décembre 2008 à début février 2009* : réécriture complète de la première version (arxiv.org/abs/0805.2346/v1) de [32***], car la seconde version reprise en décembre 2008 par S. Diverio et E. Rousseau n'était pas satisfaisante et contenait deux erreurs mathématiques (dans la partie de géométrie algébrique qui leur revenait de droit) qui auraient été immédiatement dirimantes pour la publication. J'ai travaillé cinq semaines à plein temps sur la rédaction de la troisième version, tout en rédigeant des courriels argumentés pour faire entendre le point de vue de la rigueur et de la perfection formelle.

□ *De début février jusqu'à fin mai 2009* : rédaction des cent-cinquante premières pages de [35**] : trois chapitres pour présenter la traduction. Hésitations renouvelées jusqu'en octobre pour enrichir l'ouvrage d'un ou deux chapitres supplémentaires, mais l'éditeur J.-J. Szczeciniarz chez Hermann m'a fait remarquer que cela déséquilibrerait l'ouvrage ($\sim$150 pages de présentation + $\sim$150 de traduction).

□ *De fin mai à fin août 2009 :* préparation de quatre conférences (Strasbourg ; Banff ; CIRM ; Hong-Kong) rédigées en couleurs sous latex, puis exportées en pdf. Le travail de rédaction de transparents vidéo-projetés absorbe beaucoup de temps, et je m'impose de l'exécuter afin de conserver une trace écrite de mes exposés[2].

□ *Invitation de Mok et Siu à Hong-Kong :* dix jours début août 2009. À cette occasion, j'ai réussi à comprendre complètement le principe de démonstration que Siu annonçait sur trois pages en 2004 pour établir l'hyperbolicité au sens de Kobayashi des hypersurfaces de *très, très grand* degré, principe que personne n'a pour l'instant développé en France pour construire *en coordonnées* des différentielles de jets *effectives*. Dans les grandes lignes, je vois comment réaliser ces idées en détail, *et Siu dit vrai* : il existe des raisons métaphysiques profondes qui garantissent *a priori* la prolifération des différentielles de jets. Toutefois, après y avoir réfléchi quelques semaines, j'ai compris que la réalisation technique complète de ces idées générales devait être très difficile, parce qu'il faut conduire de nombreux calculs d'élimination polynomiale *avec contrôle effectif* dans des espaces de jets à un très grand nombre de variables. Tous les obstacles que je pressens depuis que j'ai médité ces idées expliquent probablement pourquoi l'annonce de Siu en 2004 n'a jamais été suivie d'une publication détaillée. Après juillet 2010, je me consacrerai entièrement à cette question, étant probablement le seul dans le sujet qui soit en mesure de contrôler de manière effective la production d'« *irréversible-synthétique* » qui est impliquée par ces lourds calculs d'élimination[3]. En particulier, s'il s'agit d'atteindre l'hyperbolicité

[2] En 2009 et en 2010, je suis aussi intervenu pendant 20 mn le 11 mai à la Journée « Mathématiques en mouvement » organisée par la *Fondation des Sciences mathématiques de Paris* (salle Dussane, ENS), au séminaire Cerveau à Rennes, au séminaire Henkin à Paris 6 et au séminaire « Des géométries » à l'Université de Lyon 1.

[3] Contre une tradition remontant à Galois (« *sauter à pieds joints sur les calculs* »), je ferai tout, dans ma carrière, pour réhabiliter le calcul, à la fois dans mes articles de mathématiques, et dans mes travaux de philosophie des mathématiques. Dans moins de cinquante ans, 80% de la production mathématique en recherche sera dominée par une utilisation mieux maîtrisée (domestiquée) et mieux comprise des machines à calculer, y compris dans les domaines les plus « *purs* ». C'est pourquoi il faut d'ores et déjà commencer

au sens de Kobayashi, j'ai vite compris qu'il me faudrait rendre encore plus explicites les champs de vecteurs de Siu que j'ai construits dans [30*]. De toute façon, l'approche fibrés holomorphes (jets de Green-Griffiths ou de Demailly-Semple) ne donne pas une information effective sur le lieu de dégénérescence des courbes entières ([32***]), et donc l'approche en coordonnées de Siu s'impose si on veut avoir une chance de démontrer une version au moins non optimale de la conjecture de Kobayashi.

Siu a aussi des idées pour traiter les variétés projectives de codimension arbitraire dont le fibré canonique est suffisamment divisible, au moins dans le cas des surfaces. Il m'a dit ouvertement qu'il m'inviterait à Harvard quand je le souhaiterais, mais auparavant, il me faut achever ma thèse de philosophie des mathématiques. J'ai aussi réfléchi pendant trois semaines de fin août à début septembre sur la *Mean Value Conjecture* de Smale, suite à des discussions avec Patrick Ng à Hong-Kong. Il y a un problème d'élimination avec des résultants, les bases de Gröbner n'aboutissent pas, et mon ordinateur ne parvient pas à calculer un déterminant de taille 32×32 dont les entrées sont des polynômes qui font trois pages de long.

□ *De fin août à début octobre 2009 :* finalisation de [35**] (ce n'était pas réellement fini à la fin du mois de mai 2009 ...). Co-ordination des soutenances de magistère avec Marie Théret à l'ENS (j'ai fait $\sim 35 - 40\%$ du travail).

□ *Octobre 2009 :* rédaction de deux nouveaux articles : [34***, 38] provoqués par deux rapports que je devais écrire sur A.V. Isaev, lequel n'arrivait apparemment pas à obtenir ces caractérisations explicites sans hypothèse spéciale sur l'hypersurface réelle considérée. J'ai aussi rédigé une dizaine de rapports de referee ou pour MathSciNet durant cet automne, et cela m'a pris un peu de temps.

□ *Mi-novembre 2009* : dix jours consacrés à discuter avec mes co-auteurs des révisions (mineures) à apporter à [32***]. Début d'apprentissage sur les polyzêtas multiples : j'ai découvert récemment qu'ils apparaissent naturellement dans les formules de caractéristique d'Euler du fibré des jets de Green-Griffiths ([39****]), et probablement aussi dans les calculs exacts de cohomologie des fibrés de Schur sur les variétés projectives, toujours considérés comme inaccessibles.

□ *Depuis début décembre 2009* : rédaction de $\sim$ 120 pages de réflexions philosophiques sur le calcul (Document **(2')**). En fait, l'un de mes objectifs principaux dans cet *Essai de philosophie des mathématiques* sera, en

à élaborer une philosophie nouvelle qui succède à celle du structuralisme en se ressourçant aux mathématiques du 19ème siècle.

réponse au structuralisme classique, de montrer toute la subtilité des calculs qui sont à mon avis l'essence des mathématiques. Je suis naturellement encouragé dans cette direction par ce que j'ai réalisé autour des jets de Demailly-Semple et auparavant aussi, en théorie de Lie, domaine où j'avais mené à bien des calculs d'ampleur ([33**]). J'ai plusieurs thèses générales qui sont le fruit de plusieurs années de méditation, et on en trouvera quelques unes à la fin de ce document, rédigées de manière elliptique, mais néanmoins denses et exactes.

□ *Janvier-juin 2010* : Abandon des jets de Green-Griffiths[4]. *Intégralité* du temps de rédaction consacrée à achever : **1)** la traduction en anglais du Vol. I de la *Theorie der Transformationsgruppen* ; et : **2)** un *Essai de philosophie générale des mathématiques* (projet très précis dans mon esprit).

§6. Enseignement, animation scientifique

Quelques tâches au Département de Mathématiques et Applications (ENS) en 2009.

□ Quatre leçons d'agrégation encadrées en 2009 et aussi en 2010.

□ Co-organisation (35-40%) des soutenances de magistère avec Marie Théret.

□ Direction du mémoire de M1 de Fangzhou Jin et Sandro Franceschi : *Irrationalité des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers impairs*, d'après Apéry, Van der Poorten, Beukers, Nesterenko, Rivoal, Ball, Fischler et d'autres.

Animation scientifique.

□ Membre du Conseil de Laboratoire du DMA, 2008-2010.

□ Responsable de l'échange franco-indien ENS-CMI (Chennai).

□ 10 reviews (exactement) pour MathSciNet en 2009.

□ Participation régulière en tant que « billettiste » au site « *Images des Mathématiques* ». C'est l'occasion d'y faire apparaître un peu de philosophie pour diversifier les points de vue qui s'y expriment.

□ En collaboration avec Eric Vandendriessche et avec l'accord de Pierre Pansu (responsable de la FIMFA), j'espère inciter certains élèves de l'ENS

[4] Sauf pour faire rédiger à Lionel Darondeau (M2 sous ma direction) un article qui généralise un preprint de Pacienza et Rousseau sur la dégénérescence algébrique des applications holomorphes non dégénérées de $\mathbb{C}^2$ dans une hypersurface projective $X^3 \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Il traitera les applications non dégénérées de $\mathbb{C}^2$ et de $\mathbb{C}^3$ dans une $X^4 \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, et il extraira ce qu'il faut du travail [39****].

à extraire de leurs travaux des textes de vulgarisation pour le site culturemath hébergé sur le serveur internet du DMA.

§7. Exposés internationaux invités

Exposés invités dans des conférences internationales en 2009.

• Algebraic varieties and hyperbolicity : geometric and arithmetic aspects. Colloque international et mini-cours sur l'hyperbolicité des variétés algébriques complexes, la théorie de Nevanlinna sur $\mathbb{C}$ et sur les corps de nombres, organisé à Strasbourg par Gianluca Pacienza et Erwan Rousseau, du 25 au 29 mai 2009. Titre de l'exposé : *Effective algebraic degeneracy II* ; 72 pages de transparents pdf qui se trouvent sur le site du colloque et dans la pièce supplémentaire **(5')**.

• Complex Analysis and Geometry. Colloque international organisé par Dan Coman, Rasul Shafikov et Ragnar Sigurdsson au Banff International Centre (Canadian Rockies), du 1er au 5 juin 2009. Titre de l'exposé : *Effective algebraic degeneracy* ; 49 pages de transparents pdf, voir la pièce supplémentaire **(5')**.

• Géométrie et Dynamique. Colloque international organisé par Tien-Cuong Dinh, Christophe Dupont et Henri de Thélin au CIRM à Luminy-Marseille du 15 au 19 juin 2009. Titre de l'exposé : *On the Green-Griffiths conjecture* ; 120 pages de transparents dvi.

• Complex Geometry 2009. Colloque hong-kongais organisé par Ngaiming Mok et Patrick Ng à l'Université de Hong-Kong du 4 au 7 août 2009. Titre de l'exposé : *Demailly-Semple invariants and effective algebraic degeneracy* ; transparents à partir des exposés précédents.

§8. Résultats mathématiques principaux

Depuis mon entrée au CNRS en 1997, j'ai travaillé essentiellement dans cinq domaines de recherche[5] :

☐ Prolongement holomorphe des fonctions CR et élimination de leurs singularités.

☐ Régularité algébrique ou analytique des applications CR lisses ou formelles.

☐ Symétries de Lie des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

☐ Hyperbolicité au sens de Kobayashi et dégénérescence algébrique au sens de Green-Griffiths.

☐ Philosophie des mathématiques.

---

[5] Reprise réactualisée d'un paragraphe de la candidature 2008.

Les rapporteurs pourront se reporter aux introductions étendues, détaillées et progressives des articles [10****, 14****, 15****, 21****, 24****, 25****, 31****, 32***, 39****] qui apparaissent toutes dans les 5 documents internet principaux de cette candidature, ainsi qu'à l'article de survol [26***] (élaboré pour mon habilitation) et aux pages 38 à 71 du document intitulé « *Programmes de recherche* ».

Théorie de Lie. Mes travaux en théorie de Lie ne sont pas vraiment aboutis, parce que jusqu'à maintenant, j'ai consacré, en temps additionné, à peine un peu plus de quatre ans à ce domaine, en hésitant longtemps sur les directions à suivre, et en étant toujours rappelé à l'exécution d'autres travaux, notamment sur la conjecture de Green-Griffiths. Je pense m'investir davantage à l'avenir dans cette direction de recherche, notamment parce qu'elle est vaste, fertile, féconde. Tout ce qui touche à l'algèbre (donc aussi par exemple la topologie combinatoire) me paraît rassurant en mathématiques, parce qu'il est certain qu'il existe là un « grand réservoir de réalité problématique » pour tous ses explorateurs.

En 2003, j'ai eu l'intuition que les travaux de Sophus Lie et d'Élie Cartan dépassaient, en force et en puissance ce qui se fait actuellement dans les quelques galaxies internationales qui font revivre le domaine. Un peu plus tard, j'ai eu l'intuition que l'œuvre magistrale d'Élie Cartan puisait sa force dans la force même de Sophus Lie. Avant donc de tenter de lire vraiment tout Élie Cartan dans le texte (c'est très ardu), je me suis dit qu'il fallait revenir au Grand Maître Lie. N'ayant pas été initié à la langue allemande au cours de mes étdues, je tente en autodidacte, depuis trois ans et quelques mois, de déchiffrer l'allemand de Friedrich Engel, scribe zélé et talentueux de Lie.

Constatation imparable : les génies nous dépassent. Lire Sophus Lie permet de relativiser, de manière transhistorique, son propre niveau mathématique, et aussi le niveau de ce qui se fait actuellement dans certaines communautés spécialisées.

Ce que j'aime par-dessus tout dans les 2100 pages de la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie et Engel, c'est la systématicité du discours, la robustesse de l'architecture, le rayonnement du flux de pensée, le souci de totalisation, le maintien calculé des suspens, la tenue rhétorique d'ensemble, la limpidité des objectifs, la découverte permanente de la nouveauté, le choix d'énoncer des théorèmes très étendus, la continuité rigoureuse des métamorphoses conceptuelles, et surtout :

la présence des idées partout dans les calculs.

Les quelque 900 pages de Lie que j'ai déjà traduites en français ou en anglais ont immédiatement rejailli sur mes capacités de rédaction et de pensée en mathématiques. L'intuition que j'avaie eue — à savoir qu'Élie Cartan avait dû recueillir non seulement les problèmes de Lie, mais aussi sa capacité à faire jaillir les idées à travers les nécessités de l'algèbre différentielle — s'est donc avérée encore plus juste que je n'aurais pu l'espérer. Même si la réalisation d'un tel projet de traduction doit encore me coûter de nombreuses années de travail ingrat, je suis certain à l'avance que ce travail patient m'aidera à mûrir mathématiquement et qu'il renforcera mes capacités en recherche.

Par ailleurs, si tant est qu'un tel travail de traduction et de modernisation puisse être considéré comme constituant une contribution à l'histoire des mathématiques (*bien mieux représentée au CNRS que ne l'est la philosophie des mathématiques*), je crois qu'on doit trouver opportun, sur un plan purement scientifique, qu'un chercheur s'attaque à tout un chapitre des mathématiques d'antan qui n'a pas encore été défriché en France.

Philosophie des mathématiques. Ma contribution en philosophie des mathématiques est toujours en gestation, constituée de fragments elliptiques, mais avec des idées et des thèses qui deviennent de plus en plus claires, de plus en plus certaines dans ma tête. Sur le plan scientifique, il me semble préférable de créer une œuvre originale, mûrie, neuve, après des années de méditation intérieure et de recherche sur des sujets variés. Loin d'avoir été une diversion, la philosophie m'a aidé à réfléchir en profondeur sur les « objets » que nous utilisons. Il est certain que j'ai résolu plusieurs problèmes mathématiques techniques grâce à une réflexion problématisante sur les concepts. *Le spéculatif m'est consubstantiel.* C'est pour cette raison que ma rencontre récente avec Siu au Fields Institute m'a tant enthousiasmé.

Travaux nécessaires de rénovation devenus prioritaires par rapport à la philosophie. Entre le 12 octobre 2009 et le 30 novembre 2009, j'ai perdu environ trois semaines de concentration à lancer une procédure d'expulsion auprès de la justice, et jusqu'en juin 2010, cette affaire désagréable m'a retardé dans mes travaux scientifiques. La perspective probable de quitter le CNRS s'avérait encore au mois de mai 2010 être une incitation réelle pour achever ma thèse de philosophie des mathématiques. Inscrit avec dérogation[6] en quatrième année de thèse de philosophie sous la direction de Jean-Jacques Szczeciniarz (*voir* p. 36), je comptais me consacrer exclusivement à ce travail après ma candidature de printemps à Orsay, du mois de juin au mois de septembre, mais la restitution imprévisible par un squatteur de mon appartement du 132 rue d'Assas dans un piteux état le 17 mai 2010 m'a contraint à entreprendre des travaux de rénovation d'ampleur, absolument indispensables, afin d'être en situation de déménager. Et début septembre, j'ai voulu préserver mon temps pour me relancer dans les mathématiques, m'occuper de mes étudiants, négligeant volontairement la finalisation de

[6] Mes travaux sur la conjecture de Green-Griffiths ont justifié un délai de réalisation.

mon installation. La philosophie a donc été « sacrifiée », mais revenons-en aux travaux mathématiques.

Prolongement holomorphe des fonctions CR. Le hasard a voulu pour ma thèse que je travaille en géométrie CR, avec des disques analytiques, dans un sujet qui venait d'atteindre sa maturité quand Jean-Marie Trépreau m'a proposé d'appliquer les techniques connues aux problèmes de singularités éliminables que Burglind Jöricke avait dégagés. J'ai eu le plaisir de collaborer pendant une dizaine d'années avec Egmont Porten. Voici en bref nos trois résultats les plus aboutis dans cette direction.

□ Extension holomorphe des fonctions CR à un wedge global attaché à une sous-variété CR générique $M \subset \mathbb{C}^n$ globalement minimale *sans faire appel au théorème d'extension locale de Tumanov*, en utilisant seulement la propagation (Trépreau, puis Tumanov). Cette démonstration épurée apparaît dans l'article de survol [26***] à IMRS (2006).

□ Élimination des singularités de mesure de Hausdorff $(\dim M - 2)$-dimensionnelle nulle, sur une variété CR générique globalement minimale $M \subset \mathbb{C}^n$; application au prolongement méromorphe des fonctions CR méromorphes. C'est le contenu de l'article [15****] à Math. Z. (2002).

□ Élimination des singularités de codimension 1 sur des sous-variétés CR génériques $M \subset \mathbb{C}^n$ de dimension CR égale à 1 et de codimension arbitraire. C'est l'article [24****] à IMRP (2006).

Ce dernier résultat semblait réellement inaccessible en codimension supérieure ou égale à 2, puisque toutes les preuves connues (Jöricke, Duval, Shcherbina, Forstnerič-Stout — *via* Bedford-Klingenberg et Kruzhillin —, Porten) en codimension 1 (*i.e.* pour les hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$), reposaient sur des arguments globaux tels que par exemple le remplissage des sphères, lequel est impossible sans hypothèse de stricte pseudoconvexité, d'après un contre-exemple de Fornæss-Ma.

Jöricke avait déjà beaucoup réfléchi au problème, en codimension 2, et avec des hypothèses fortes sur la forme de Levi, sans rien publier. Il a fallu un certain temps avant qu'elle soit convaincue de la véracité du résultat, puisqu'il englobait le plus reconnu de ses théorèmes (cas d'une hypersurface strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^2$). Je pense que ce résultat est, parmi mes résultats, celui dont la démonstration est la plus délicate, la plus difficile et la plus longue. C'est le meilleur et le plus complexe de tous mes résultats. Il n'a jamais été cité, probablement parce qu'il fermait définitivement un champ de recherche, et parce que la question n'était pas soulevée par un mathématicien connu.

J'ai investi deux ans de travail pour rédiger l'article de survol à IMRS. Catriona Byrne (seconde éditrice en chef chez Springer) m'a dit oralement le 18 décembre 2007 qu'une telle publication ne devrait pas m'empêcher de publier aussi un livre sur le même sujet, avec des améliorations. Mais en vérité, je pense que le sujet n'est plus riche en problèmes accessibles et prometteurs, les questions principales étant maintenant essentiellement toutes résolues. J'avais d'ailleurs voulu rédiger le mémoire paru à IMRS (envisagé aussi comme mon mémoire d'habilitation) afin de quitter avec élégance ce sujet épuisé. Toutefois, j'écrirai peut-être un livre consacré plus spécifiquement aux applications CR, dans l'hypothèse où je décide de retravailler dans cette direction, que j'ai dû abandonner en 2001 à cause d'une concurrence déloyale.

Depuis mon arrivée à l'ENS de Paris en octobre 2006, je me suis volontairement investi dans des directions vraiment nouvelles. C'est trop brièvement que je mentionne aujourd'hui mes travaux sur le prolongement holomorphe des fonctions CR. Il serait préférable de se reporter aux deux articles publiés en 2006 à IMRS et à IMRP, pour compléter l'information et pour mieux évaluer l'étendue du travail, ainsi qu'aux premières pages du mémoire d'habilitation qui est reproduit pp. 38–71 du document consacré aux programmes de recherche.

Applications CR. Peu de temps avant de soutenir ma thèse (novembre 1996), par souci de diversification thématique, j'ai commencé à travailler sur la régularité des applications CR. Sans revenir sur les controverses scientifiques douloureuses inhérentes à ces travaux qui se sont exprimées à la charnière des années 1990–2000 (*sins of omission* ; *reputation forming* ; *systematic unciting*), je voudrais évoquer brièvement mes quatre résultats les plus aboutis dans ce domaine de recherche.

□ Algébricité de l'application de réflexion associée à une application holomorphe locale entre certains sous-ensembles algébriques réels de $\mathbb{C}^n$. En 1997, inspiré par un article de X. Huang, j'ai introduit cet invariant que j'ai appelé comme lui *application de réflexion*, mais je suis le premier à avoir soupçonné que cette application devait jouir de propriétés de régularité *sans aucune hypothèse de non-dégénérescence sur la variété CR image*. Voici un exemple où la spéculation philosophique m'a guidé en recherche. J'étais insatisfait de constater que les résultats de régularité d'applications CR exigeaient toujours des hypothèses fortes sur la variété CR image : stricte pseudoconvexité, finitude du type de D'Angelo, ou encore finitude essentielle au sens de Baouendi-Jacobowitz-Treves, alors que pour le principe de symétrie de Schwarz, en dimension complexe 1, aucune condition n'est exigée. Principe de raison suffisante : il devait nécessairement exister un invariant général, signifiant en toute dimension, qui jouisse de propriétés de régularité analytique. C'est au début de l'année 1997 que sur des exemples simples, je me suis convaincu que cette application de réflexion était l'objet dont j'avais l'intuition. Dans mes travaux, j'ai vérifié scrupuleusement et rigoureusement que cette application de réflexion est invariante à travers les changements de coordonnées holomorphes locales. Cet invariant fut ensuite librement « emprunté », *sans aucune citation*, par quelques concurrents internationaux, ces emprunteurs négligeant d'ailleurs d'établir ses propriétés d'invariance. Celles-ci ne sont pas évidentes. En effet, la démonstration requiert de manipuler le jet d'ordre infini du changement de coordonnées pour voir comment se transforment les jets d'ordre fini des sous-variétés de Segre complexifiées. Dans mon article publié au Bulletin de la Société Mathématique de France, on trouve un résultat d'algébricité de cette application de réflexion, qui englobait tous les résultats précédents (Sharipov-Sukhov, Huang, Baouendi-Ebenfelt-Rothschild, Mir, Coupet-Meylan-Sukhov, Zaitzev) et qui n'était susceptible d'aucune amélioration. C'est un résultat définitif, quoique essentiellement facile. Depuis, le sujet s'est éteint. Je renvoie au Théorème 3.35 et à ce qui le précède dans le court mémoire d'habilitation reproduit à la fin du document qui decrit mes programmes de recherche.

□ Analyticité de l'application de réflexion CR associée à un difféomorphisme CR de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux hypersurfaces analytiques réelles globalement minimales dans $\mathbb{C}^n$. Publié à Fourier en 2002, c'est mon deuxième meilleur résultat, en termes de difficulté et de finesse dans les idées géométriques, après celui à IMRP. Je l'ai désiré intensément, il m'a résisté longtemps et c'est le seul qui n'a pas été « republié » par des concurrents sans mention de source. Par rapport à l'article de Baouendi-Jacobowitz-Treves en 1985 aux Annals of Mathematics, il y a un progrès très substantiel, ne serait-ce que parce que mon résultat couvre le cas holomorphiquement nondégénéré, pour lequel la technique rebattue de 1985, très analogue à la théorie du degré de transcendance pour les applications CR, ne fonctionne *absolument pas*. Je me suis intéressé à la question d'abord parce que le résultat visé devait donner une *condition nécessaire et suffisante* pour le prolongement holomorphe d'un difféomorphisme CR de classe $\mathscr{C}^\infty$, et ensuite parce qu'il était, pour des raisons profondes, inaccessible aux techniques circulant à l'époque. J'aime beaucoup cet article.

□ Analyticité d'une application CR de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$ ne contenant pas de courbe holomorphe. La difficulté : aucune hypothèse de rang n'est faite sur l'application, elle peut être plate sur un fermé de mesure nulle contenu dans l'hypersurface source. Pendant plus de dix années, Baouendi-Rothschild ont cherché à obtenir un tel résultat en publiant de nombreux articles qui raffinaient les hypothèses (*ad hoc*) que l'on peut faire sur la série de Taylor de l'application CR en un point pour assurer que les techniques connues et maîtrisées redonnent l'analyticité. La démonstration de ce résultat (dont Baouendi-Rothschild rêvaient intensément, m'a confié un jour X. Huang) apparaît dans les dix dernières pages de l'article à Fourier, mais elle est beaucoup plus aisée que la démonstration du précédent résultat. Peu de temps après, Diederich-Pinchuk ont démontré le même résultat dans le cas beaucoup plus difficile d'une application CR qui est seulement continue, au lieu d'être $\mathscr{C}^\infty$. Pinchuk, fondateur du sujet dans les années 1970, réfléchissait depuis plus de dix années dans cette direction. Notons que leur article, du niveau Inventiones Mathematicæ ou Annals of Mathematics, a été soumis directement et publié en 2003 à Michigan Math. J., sous les auspices de J.-E. Fornæss, pour des raisons de sécurité. Depuis, les mêmes concurrents de Diederich-Pinchuk n'ont *jamais* reconnu l'existence de ces résultats.

□ Analyticité de l'application de réflexion CR associée à une application CR formelle CR-transversale entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles. Publié aux Annales de Toulouse, ce résultat était à nouveau définitif. Celui-ci aussi, je l'ai désiré intensément et il m'a résisté longtemps. Je le place *ex æquo* avec le résultat publié à Fourier. Encore une fois, à l'époque, je m'étais attaqué à la vraie question difficile du moment, et je l'ai résolue. Une telle publication aurait dû aboutir dans une bien meilleure revue, mais en 2001, l'article ayant été refusé, j'ai abandonné. Je n'ai bénéficié d'aucun soutien en France à cette époque. Mon résultat a été recopié et publié en 2002 par des concurrents. C'est seulement à la fin de l'année 2004 que je me suis décidé à resoumettre mon travail (sous forme d'un mémoire étendu), Julien Duval m'ayant proposé de le publier aux Annales de Toulouse. Le lecteur trouvera des informations historiques plus précises dans l'introduction de ce long article, les auteurs impliqués n'ayant jamais fait une seule référence bibliographique à mes travaux sur le sujet depuis 1998.

Observation générale. En résumé, dans les deux sujets principaux dont je suis expert, à savoir les singularités éliminables et les applications CR, je crois avoir résolu quelques problèmes difficiles pour lesquels il fallait faire preuve d'une grande inventivité algébrique ou géométrique. Quelque peu pénalisé (mais je n'étais pas le seul) par mes controverses avec des concurrents établis et puissants, je n'ai publié aucun de ces résultats dans une revue de haut niveau.

En tout cas, *les progrès très rapides et immédiatement reconnus que j'ai réalisés en 2008 sur les invariants de Demailly et sur la conjecture de Green-Griffiths* (*voir* ci-dessous) *ne sont assurément pas dus au hasard*. En effet, je m'étais déjà entraîné auparavant — sur des thèmes qui ne font malheureusement pas partie des sujets qui sont traditionnellement jugés prestigieux en France — à *combattre ardemment pour résoudre des problèmes difficiles*.

Hyperbolicité au sens de Kobayashi et dégénérescence algébrique au sens de Green-Griffiths. Fin Mars 2007, Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony me suggèrent de travailler sur la question, ouverte depuis 1997, de comprendre la structure algébrique des polynômes invariants par reparamétrisation, "*a major unsolved problem*", d'après les termes de Demailly qui a introduit ces invariants.

Les spécialistes espéraient fortement que la compréhension de ces invariants permettrait de démontrer les conjectures de Kobayashi et de Green-Griffiths. D'avril à octobre 2007, je me suis investi intensément pour explorer cette question. Les rapporteurs CNRS pourront consulter l'introduction de la référence **[5]**, que j'ai aussi reproduite ci-dessous, dans le présent document. On peut aussi découvrir les calculs du corps de l'article en le feuilletant.

De début avril 2007 au 15 novembre 2008, j'ai résolu trois questions, que j'évoquerai très brièvement[7] avant de formuler des commentaires. Les quelques lignes qui suivent ne peuvent remplacer une lecture des introductions des (pré)publications concernées.

□ Invention d'un algorithme général qui engendre les invariants de Demailly en dimension n arbitraire et pour les jets d'un ordre κ quelconque. Deux applications de l'algorithme : pour $(n, \kappa) = (2, 5)$, l'algèbre des invariants de Demailly est engendrée par 56 polynômes invariants et par 2835 invariants pour $(n, \kappa) = (4, 4)$. Mon manuscrit de recherche sur cette question compte plus de 1300 pages.

On trouve en algèbre combinatoire de nombreuses théories achevées qui synthétisent les travaux de plusieurs générations de mathématiciens. Certains d'entre nous ont plaisir à apprendre de telles théories et à les utiliser dans des contextes neufs. C'est une manière de constater et d'éprouver l'universalité et l'unité des mathématiques, que de savoir reconnaître l'apparition, dans de nouveaux contextes, de questions mathématiques complètement indépendantes qui sont déjà presque résolues par des théories nées auparavant autour d'autres problèmes.

Pour les invariants de Demailly : aucune théorie achevée. Grâce à un pouvoir spéculatif autonome, je suis parvenu à reconnaître un phénomène algébrique universel en théorie des invariants, qui exprime la bifurcation fondamentale entre algèbres de type fini et algèbres de type infini. C'est l'algorithme que j'ai mis au point, riche encore de questions non résolues. Ainsi ce qui, à mon avis, a le plus de prix en mathématiques, c'est de découvrir ou de *re*découvrir par soi-même, sans s'en remettre à une belle théorie achevée, en exprimant les *tensions spéculatives fondamentales* que l'on rencontre.

[7] Notons que de novembre 2007 à fin mars 2008, j'ai travaillé exclusivement sur la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie et Engel.

□ Construction de champs de vecteurs méromorphes sur la variété des jets verticaux de l'hypersurface universelle [30*]. J'ai réalisé ce travail très rapidement, en 5 semaines, grâce à mon expertise préalable de la formule de Faà di Bruno et à mes travaux (qui ne sont pas encore publiés) sur les prolongement des champs de vecteurs aux espaces de jets dans la théorie de Lie des symétries des équations aux dérivées partielles. Le lecteur pourra se reporter à la fin du document **(6)** pour prendre connaissance de ces longues formules.

□ *Solution à la conjecture forte de Green-Griffiths pour les hypersurfaces projectives algébriques*, en degré non optimal, mais *effectif*. Il s'agit du théorème suivant :

Theorem. *Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a smooth projective hypersurface of degree d and of arbitrary dimension $n \geqslant 2$. If X is generic and if its degree satisfies the* effective *lower bound :*

$$d \geqslant 2^{n^5},$$

then there exists a proper *algebraic subvariety $Y \subsetneqq X$ such that every nonconstant entire holomorphic curve $f \colon \mathbb{C} \to X$ has image $f(\mathbb{C})$ contained in Y.*

Ce dernier résultat appartient aux conjectures les plus connues de géométrie algébrique. Pour cette raison, il a rencontré presque instantanément un accueil favorable unanime. La première annonce sur `arxiv.org`, parue le 17 novembre, n'énonçait que la version faible de la conjecture de Green-Griffiths : dégénérescence algébrique de la courbe entière non constante $f(\mathbb{C}) \subset Y \subsetneqq X$, où $Y \subsetneqq X$ peut éventuellement dépendre de la courbe entière. Pendant la conférence de Toronto, grâce aux informations apportées par Erwan Rousseau et Simone Diverio, j'ai compris comment raffiner la construction de champs de vecteurs méromorphes afin d'obtenir la version forte de la conjecture de Green-Griffiths. L'article révisé a été resoumis vers le 10 décembre aux Annales de l'Institut Fourier (qui l'avaient déjà accepté sans cette amélioration).

Rapport reçu en novembre 2009. Les paragraphes suivants, non retouchés, datent de décembre 2008. Mais voici en insertion, à l'exception de quatre propositions de modifications mineures, l'intégralité d'un rapport anonyme dû à un expert éminent.

Dear Colleagues.
I have now examined in some detail the new version of the submission "Effective Algebraic Degeneracy" by S. Diverio, J. Merker and E. Rousseau.
The goal of the paper is to prove the algebraic degeneracy of entire curves in generic hypersurfaces of high degree in projective space, following a strategy proposed by Y.T. Siu around 2002. The authors show that entire curves are algebraically degenerate for generic

hypersurfaces of degree $d \geqslant d_n$*, where* d_n *depends only on dimension and is shown to be explicitly computable.*
The authors do substantially more than paraphrasing Y.T. Siu's work, since they actually fill many missing details which made Siu's work hard to understand or to follow. They also provide effective techniques which are different from Siu's original proposal and which lead to better, explicit bounds for the degree ; such explicit bounds were not known before the present work, except in some very special cases.
Although it was somehow felt from Siu's work that these techniques should probably work, it is my opinion the first time that complete undisputable proofs are given on this important matter. The work by Diverio-Merker-Rousseau also paves the way for future improvements in related fields of geometry - and therefore I believe that the submission meets the level of an Inventiones paper.
The first three sections are fluid, very well written and contain all desirable material except effective calculations. Sections 4, 5 and 6, on the other hand, contain the details needed to get the effective bounds and are extremely computational. I must admit that I didn't actually check the accuracy of these painful calculations, although the general method followed by the authors is obviously okay ; a mistake there would only lead to different explicit values for the bounds, without affecting the effectivity of the bounds. These are the sections where the authors made improvements between versions 1 and 2 of their submission, passing from a doubly exponential bound with respect to dimension, to a better, polynomial exponential bound. The results are still probably suboptimal, since linear bounds in terms of the dimension are expected. However, it is clear that such improvements would require new techniques, and it is fair to say that the bounds obtained by the authors are close to being optimal within the currently known techniques.

Arguments en faveur de la correction de la démonstration. [8] Simone Diverio possédait déjà un théorème (prépublié sur `arxiv.org` en février 2008 et accepté aux Math. Ann. depuis l'été 2008) qui donnait un degré minimal δ_n *non effectif* assurant l'existence d'équations différentielles algébriques satisfaites par les courbes entières à valeurs dans une hypersurface projective $X \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ de dimension $n \geqslant 2$ quelconque et de degré $d \geqslant \delta_n$. Ce résultat fonde rigoureusement les résultats effectifs ultérieurs. Lorsque mon travail sur les champs de vecteurs méromorphes est paru sur `arxiv.org`, les experts (Voisin, Demailly, Diverio, Rousseau, Paŭn) en ont instantanément déduit intuitivement un théorème de dégénérescence algébrique, qui était toutefois à nouveau *non effectif*. Ainsi le théorème que j'ai énoncé en première page était-il imminent, à ceci près qu'il restait à rendre effective l'approche de Simone Diverio dans la tour de Demailly. Début juillet 2008 au CIRM, nous avons convenu que je devrais examiner la difficulté. Elle s'est avérée *beaucoup plus substantielle que certains auraient pu le croire*.

Doit-on se fier aux calculs d'élimination effective dont je suis responsable ?

[8] Bien que l'article soit maintenant déjà paru, je conserve ce paragraphe écrit début janvier 2010.

Erwan Rousseau et Simone Diverio, en charge de la seconde rédaction, jointe à ces documents, n'ont pas trouvé d'erreur. Je leur avais expliqué tous les détails oralement à Toronto, et nous avions échangé de nombreux courriels au mois d'octobre afin de nous assurer que la stratégie que je développais au jour le jour était correcte.

Peut-on dire que ma contribution au sujet se limite à des calculs[9] ? En géométrie CR j'ai souvent observé la tentation d'attribuer toujours le mérite aux fondateurs, aux initiateurs et aux résultats anciens non optimaux, sans admettre qu'il a fallu fournir ultérieurement des efforts considérables afin d'obtenir des résultats définitifs qui ferment les questions.

J'ai traité les champs de vecteurs méromorphes dans un article dont je suis le seul auteur.

Ensuite, parlons du calcul d'élimination, pièce essentielle de la démonstration. Certainement, nous utilisons les idées de Siu et de Demailly, mais la difficulté du sujet était de parvenir à réaliser pleinement leurs stratégies, difficulté substantielle à laquelle plusieurs chercheurs de très haut niveau ont été confrontés.

Le long calcul d'élimination avec des classes de Chern à tous les étages de la tour de Demailly-Diverio semble réellement ne pas être effectuable en totalité. En effet, après une bonne quinzaine de jours d'exploration manuelle, je me suis convaincu qu'il était impossible de suivre toutes les combinatoires de manière à fermer toutes les formules de récurrence, car elles sont considérablement entrelacées. Quatre combinatoires sont mobilisées : 1) nombres de Pascal ; 2) suite exacte d'Euler ; 3) suite exacte normale ; 4) produit d'intersection de Trapani. L'expérience m'a appris que le mélange des combinatoires faisait la plupart du temps obstacle à l'obtention de formules explicites closes, même si on les autorise à se déployer sur plusieurs lignes. Ainsi l'introduction de la tour de Demailly est-elle naturelle sur le plan géométrique et elle peut être effectuée en quelques pages, mais le mérite n'est pas moindre, à mon humble avis, d'être parvenu à effectuer, au moins de manière partielle, les calculs d'élimination qu'elle exige.

Le programme sur GP PARI CODE de Simone Diverio n'aboutit pas en dimension 6 ($\sim$20 gigas de mémoire saturée[10]), et fournit, pour un certain choix de poids dans le cône nef, des polynômes tels que, par exemple, en

[9] Personnellement, je préfèrerais nettement qu'un de mes résultats définitifs soit enfin cité et reconnu, puisqu'aucun de mes 7 résultats définitifs en géométrie CR n'a, jusqu'à présent, connu un tel destin !

[10] En janvier 2009, j'ai découpé le calcul en 32 morceaux distribués alternativement sur une dizaine de machines en salle Info 3 à l'ENS, ce qui explique que nous ayons atteint la dimension 6 dans [32***].

dimension 5 :

$$
\begin{aligned}
&829705552526846689513237554474 24\, d^6 - \\
&- 690923576923829601983160082796154 24\, d^5 - \\
&- 375919573131846296972181088319559277 44\, d^4 - \\
&- 216114449751608047695560783767127869958 4\, d^3 - \\
&- 207679317231737411175485558372431638061 44\, d^2 - \\
&- 237364617790381662461159583045518710563 84\, d,
\end{aligned}
$$

où d désigne le degré de l'hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. Impossible que de tels coefficients entiers soient simples : leur taille est comparable ; ils s'obtiennent en additionnant un très grand nombre de nombres entiers de signes variables. Quel est le but ? On cherche un degré δ_5 tel que ce polynôme $\mathsf{P}_5(d)$ soit strictement positif pour tout $d \geqslant \delta_5$. Bien sûr, il suffit d'observer que le coefficient de d^6 ici est strictement positif. Mais pour obtenir un δ_5 effectif (numérique), il faudrait calculer tous ces coefficients explicitement en dimension n quelconque, pas seulement pour $n = 5$. J'ai pressenti que je n'y parviendrais pas.

Pour cette raison, j'ai dû développer très rapidement, du 25 septembre au 29 octobre 2008, beaucoup d'idées pour contourner ces pyramides gigognes de calculs d'élimination :

□ choix de poids exponentiels restant dans le cône nef ;

□ majoration des autres monômes *via* l'ordre lexicographique inverse ;

□ apparition des déterminants de Jacobi-Trudy ;

□ *highlighting the central monomial* ;

□ contrôle effectif de la contribution des monômes qui sont inférieurs au monôme central.

La stratégie consistait à maintenir dans l'ombre la plupart des calculs, lesquels sont vraisemblablement ineffectuables, tout en conservant de l'effectivité grâce à un contrôle explicite de l'ignorance qu'on s'autorise. Au total, *j'ai intentionnellement développé la stratégie la plus économique en termes de calculs*. Le prix à payer pour cette ignorance délibérée, c'est un δ_n doublement exponentiel par rapport à la dimension n de X, égal à $n^{(n+1)^{n+5}}$, au lieu de la simple exponentielle que l'on pouvait attendre conjecturalement[11].

Au total, même contractées, mes 50 pages initiales de calculs d'élimination partielle restent longues, délicates, truffées d'obstacles. J'ai traité, avec un esprit d'analyste, un problème d'algèbre (élimination) issu de la géométrie qu'on ne peut pas résoudre de manière complètement explicite.

[11] En juin 2009, j'ai amélioré cette borne en : 2^{n^5}.

Au mieux, les degrés sont conjecturalement exponentiels. J'aurais pu, bien sûr, déployer une énergie plus considérable à tenter de contrôler un plus grand nombre de monômes dans le produit d'intersection de type Trapani considéré par Simone Diverio afin de pouvoir appliquer les inégalités de Morse-Demailly. Mais au mieux, le résultat effectif aurait fourni une borne exponentielle ; c'est ce que nous pensons tous les trois, Erwan Rousseau, Simone Diverio et moi-même.

Je suis convaincu qu'il est de loin préférable que je dépense maintenant mon énergie à décomposer le fibré de Green-Griffiths en fibrés de Schur, car en spéculant au tableau, nous nous sommes dit, avec Erwan Rousseau à Toronto, que la borne devrait être polynomiale au lieu d'être (doublement) exponentielle. L'avenir le confirmera, ou l'infirmera.

Intermède philosophique. Tout formalisme reste problématique en lui-même. Les notations pensent en se métamorphosant parce qu'elles se questionnent. L'émergence de structures et la formation de concepts ne peuvent être véritablement comprises que si l'on recrée les motivations, les problèmes, les obstacles, les difficultés et les inventions qui ont accompagné leur naissance.

Notre époque se trouve devant un paradoxe grandissant : l'étendue temporelle des mathématiques, longue de plusieurs siècles, est telle que nous naviguons actuellement en haute mer, souvent peu conscients des profondeurs anciennes qui nous portent. On cède à la facilité des automatismes, et ce faisant, on ne cherche plus sur ce qui a été trouvé avant nous, on ne médite plus, on ne s'interroge plus en profondeur. De nombreux champs de recherche encore fertiles ont été laissés de côté. Une fréquentation de l'histoire et de la philosophie des mathématiques pourrait s'avérer de plus en plus nécessaire pour que la recherche pure et appliquée s'organise de manière arborescente et systématique.

Abstraitement parlant, les mathématiques ont le devoir d'effectuer tous les calculs qui se révèlent nécessaires, jusqu'à épuisement des virtualités. Toute représentation inductive d'une formule par récurrence attend une fermeture, dans laquelle la récurrence sera gommée, et dans laquelle on pourra lire un résultat final sans avoir à en reparcourir toutes les étapes. Le potentiel attend l'actuel, telle est la loi de l'*irréversible-synthétique*[12], en mathématiques.

Expliciter les calculs est un impératif mathématique catégorique.

Il est très fréquent, en mathématiques, qu'on en reste au niveau des formules inductives, à cause de la complexité des combinatoires, à cause de leur entrelacement. C'est pour cette raison qu'un grand nombre de questions

[12] Voir mon texte philosophique sur Wittgenstein.

laissées sans réponses sont amenées à mûrir jusqu'à ce que certains chercheurs dans le monde acceptent de les traiter dans toute leur complexité, en effectuant notamment tous les calculs qui sont nécessaires.

On ne peut « sauter à pieds joints sur les calculs », comme l'a proclamé si fièrement Galois, qu'après avoir calculé. Galois n'a peut-être été en mesure de découvrir l'architecture conceptuelle féconde qui porte son nom qu'après avoir étudié les calculs hésitants et incomplets de ses prédécesseurs, Gauss et Lagrange en l'occurence, deux calculateurs de génie. Devoir cacher les calculs est un stéréotype caractéristique d'une époque maintenant révolue, depuis la multiplication des calculateurs électroniques. Que dit le géomètre Gromov ?

> **M.G.** Think of those computers playing chess. They certainly play better than maybe one or two people in the world, but we still can play chess because we like it.
>
> **R.L.** *Right.*
>
> **M.G.** It changes completely the attitude towards chess. I do not think chess will exist seriously in another thirty years. Computers do it better, it is not interesting. Imagine if that happens to mathematics. If computers do it really better it would be some different kind of mathematics maybe.
>
> Mikhail GROMOV, Interview by Rémi LANGEVIN, 1999.

Cette pensée provocatrice montre que l'interaction entre mathématiques humaines et mathématiques mécaniques se complexifiera dans l'avenir. L'histoire des gestes humains a déjà évolué considérablement depuis la révolution industrielle au dix-neuvième siècle. Si les gestes de travail n'ont pas disparu, une *partie* de ces gestes est automatisée, mécanisée. Nous vivons probablement une époque-charnière où l'automatisation *partielle* de la recherche en mathématiques ira grandissant.

§9. Liste de publications

RÉFÉRENCES

[1*] **Joël Merker**, *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*, International Math. Research Notices, 1994, no. 4, 329–343.

[2**] **Joël Merker**, *On removable singularities for CR functions in higher codimension*, International Math. Research Notices, 1997, no. 1, 21–56.

[3] **Joël Merker and Francine Meylan**, *On the Schwarz symmetry principle in a model case*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 4, 1097–1102.

† **** = travail qui résout complètement une question.

[4] **Joël Merker et Egmont Porten**, *Enveloppe d'holomorphie locale des variétés CR et élimination des singularités pour les fonctions CR intégrables*, C. R. Acad. Sci. Paris **328** (1999), 853–858.

[5**] **Joël Merker and Egmont Porten**, *On removable singularities for integrable CR functions*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 805–856.

[6] **Joël Merker et Francine Meylan**, *Extension de germes de difféomorphismes CR pour une classe d'hypersurfaces analytiques réelles non essentiellement finies dans* $\mathbb{C}^3$, Complex variables Theory Appl. **40** (1999), no. 1, 19–34.

[7] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Metrically thin singularities of integrable CR functions*, Internat. J. Math. **11** (2000), no. 7, 857–872.

[8*] **Joël Merker**, *Note on double reflection and algebraicity of holomorphic mappings*, Annales Fac. Sci. Toulouse **9** (2001), no. 5, 689–721.

[9*] **Joël Merker**, *Convergence of formal biholomorphisms between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **26** (2001), no. 5, 281–302.

[10****] **Joël Merker**, *On the partial algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), no. 3, 547–591.

[11] **Joël Merker**, *Étude de l'application de symétrie CR formelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no. 3, 165–168.

[12] **Bernard Coupet, Sylvain Damour, Joël Merker et Alexandre Soukhov**, *Sur l'algébricité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **334** (2002), 953–956.

[13] **Roman Dwilewicz and Joël Merker**, *Hartogs-Bochner phenomenon and decomposition of CR functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 7, 1975–1980.

[14****] **Joël Merker**, *On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 5, 1443–1523.

[15****] **Joël Merker and Egmont Porten**, *On wedge extendability of CR meromorphic functions*, Math. Z. **241** (2002), 485–512.

[16] **Sylvain Damour et Joël Merker**, *Sur la convergence d'applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), 831–854.

[17] **Hervé Gaussier and Joël Merker**, *A new example of uniformly Levi degenerate hypersurface in* $\mathbb{C}^3$, Ark. Mat. **41** (2003), 85–94.

[18**] **Hervé Gaussier and Joël Merker**, *Symmetries of partial differential equations*, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), no. 3, 517–561.

[19**] **Hervé Gaussier and Joël Merker**, *Nonalgebraizable real analytic tubes in* $\mathbb{C}^n$, Math. Z. **247** (2004), no. 2, 337–383.

[20] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Sur l'algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de* $\mathbb{C}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **336** (2003), 125–128.

[21****] **Joël Merker**, *Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle*, Annales Fac. Sci. Toulouse, **XIV** (2005), no. 2, 215–330.

[22*] **Joël Merker**, *Propagation of analyticity for essentially finite* $\mathscr{C}^\infty$*-smooth CR mappings*, Manuscripta Math., **115** (2004), 313–338.

[23] **Joël Merker**, *On the local geometry of generic submanifolds of* $\mathbb{C}^n$ *and the analytic reflection principle*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) **125** (2005), no. 6, 751–824.

[24****] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Characteristic foliations on maximally real submanifolds of* $\mathbb{C}^n$ *and removable singularities*, International Mathematics Research Papers, Volume **2006**, Article ID 72069, 131 pages. `www/hindawi.com/journals/imrp`

[25****] **Joël Merker**, *Characterization of the Newtonian free particle system in* $m \geqslant 2$ *dependent variables*, Acta Applicandæ Mathematicæ, **92** (2006), no. 2, 125–207.

[26***] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Holomorphic extension of CR functions, envelopes of holomorphy and removable singularities*, International Mathematics Research Surveys, Volume **2006**, Article ID 28295, 287 pages. `www/hindawi.com/journals/imrs`

[27**] **Joël Merker and Egmont Porten**, *A geometrical proof of the Hartogs extension theorem*, Prépublication DMA-ENS no. 10 (2006), 36 pp., 22 colored illustrations ; `math.CV/0610985` ; J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 3, 513–546.

[28**] **Joël Merker and Egmont Porten**, *The Hartogs extension theorem on* $(n-1)$*-complete complex spaces*, `arXiv:0704.3216`, à paraître dans le Journal für die reine und andgewandte Mathematik, 2009.

[29*] **Joël Merker**, *Jets de Demailly-Semple d'ordres 4 et 5 en dimension 2*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **3** (2008) no. 18, 861–933.

[30*] **Joël Merker**, *Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **59** (2009), no. 3, 1077–1104.

[31****] **Joël Merker**, *An algorithm to generate all polynomials in the* k*-jet of a holomorphic disc* $D \to \mathbb{C}^n$ *that are invariant under source reparametrization*, J. Symbolic Computation **45** (2010), 986–1074.

[32***] **Joël Merker, Simone Diverio and Erwan Rousseau**, *Effective algebraic degeneracy*, Inventiones Mathematicæ **180** (2010), 161–223.

[33**] **Joël Merker**, *Lie symmetries and CR geometry*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) 154 6 (2008) 817–922.

[34***] **Joël Merker**, *Nonrigid spherical real analytic hypersurfaces in* $\mathbb{C}^2$, 29 pages, Complex Variables and Elliptic Equations, to appear arxiv.org/abs/0910.1694/

[35**] **Joël Merker**, *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*, arxiv.org/abs/0910.0801/, Hermann Éditeur des Sciences et des Arts, Paris, xxiii+325 pp., accepté définitivement et sans révisions le 5 février 2010, imprimé en juillet 2010.

[36] **Joël Merker et Egmont Porten**, *On the local meromorphic extension of CR meromorphic functions*, Volume spécial consacré aux Actes du Colloque Complex Analysis and Applications, Varsovie, juillet 1997. Ann. Polon. Math. **70** (1998), no. 1, 163–193.

[37] **Xiaojun Huang, Joël Merker and Francine Meylan**, *Mappings between degenerate real analytic hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$, actes du colloque Analysis, geometry, number theory : the mathematics of Leon Ehrenpreis (Philadelphia, PA, 1998), 321–338. Contemp. Math., 251, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[38] **Joël Merker**, *Vanishing Hachtroudi curvature and local equivalence to the Heisenberg sphere*, 16 pages, soumis, arxiv.org/abs/0910.2861/

[39****] **Joël Merker**, *Algebraic differential equations for entire holomorphic curves in projective hypersurfaces of general type*, 89 pages, arxiv.org/abs/1005.0405.

[40] **Joël Merker**, *Sophus Lie and Friedrich Engel's Theory of Transformation Groups (Vol. I, 1888). Modern Presentation and English Translation*, **650** pages, arxiv.org/abs/1003.3202. Soumis à Springer-Verlag.

[41] **Joël Merker**, *Essai général de philosophie des mathématiques*, en cours, 110 pages finalisées.

[42] **Joël Merker**, *Le Theorema Egregium de Gauss : Labyrinthe de calculs versus formation de concepts*, en cours, $\sim$ 50 pages finalisées.

[43**] **Mansour Aghasi**, **Joël Merker** and **Masoud Sabzevari**, *Canonical Cartan connection for nondegenerate cubic five-dimensional generic submanifolds of CR dimension one in* $\mathbb{C}^4$, close to achievement.

RÉFÉRENCES

[**b***] **Joël Merker**, *La satisfaction mathématique*, texte écrit pour le Colloque Mathématiques et Inconscient, Paris, ENS Ulm, juin 1997, 28 pp.

[**f**] **Joël Merker**, *L'Obscur mathématique ou l'Ouvert mathématique*, Communication au colloque Le réel en mathématiques, Cerisy (Normandie), du 3 au 7 septembre 1999 ; Agalma Éditeur, Diffusion Le Seuil, Paris, 2004, pp. 65–91.

[**g***] **Joël Merker**, *L'île mathématique*, Revue Études, octobre 2001 et novembre 2001 (publié en deux parties), **395**, no. 4, 341–351 et **395**, no. 5, 493–504.

[**h****] **Joël Merker**, *Hommage à Gilles Châtelet*, Prépublication LATP, no. 7, 2001, 82 pp.

[**i**] **Joël Merker**, *Itération et fractales dynamiques*, Communication au colloque Épistémologie des systèmes dynamiques, Paris, École Supérieure de Chimie, novembre 1999. *Chaos et Systèmes dynamiques*, S. Franceschelli, T. Roque, M. Paty eds., Hermann, Paris, 2007, pp. 111–131.

[**j***] **Joël Merker**, *Inactualité et inadéquation de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein*, 38 pages, arxiv.org/abs/0801/

§10. Sujet de doctorat proposé à Lionel Darondeau

En M2, le travail de Lionel Darondeau, tel que décrit par lui-même dans un document de candidature à une allocation, a consisté en :

• une familiarisation avec les nombreuses notions nécessaires pour comprendre la littérature ;

• la lecture des articles classiques sur le sujet ;

• la lecture commentée de plusieurs articles de Joël Merker et de ses collaborateurs ;

• la rédaction d'un mémoire sur un article de Pacienza et Rousseau (*Generalized Demailly-Semple jet bundles and holomorphic mappings into complex manifolds*, arxiv.org/abs/0810.4911) ;

• formuler une conjecture répondant à une question de Pacienza et Rousseau (encore inabouti) ;

• le début de la rédaction d'un travail qui généralise [32***].

Ce travail n'en étant qu'à ses début, il est difficile de tirer un bilan, dit lionel Darondeau. Nous avons bon espoir de généraliser, poursuit-il, les résultats de l'article de Pacienza-Rousseau en utilisant la méthode alternative de Merker, avec pourquoi pas, des résultats nouveaux et des nouvelles questions.

Objectifs de la thèse. Le sujet de thèse consistera à étudier d'abord les applications de rang générique maximal de source $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{C}^3$ à valeurs dans une hypersurface $X^4 \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ de dimension 4 *en utilisant les jets originaux de Green-Griffiths* comme technique alternative à l'approche de Pacienza-Rousseau, car ils sont mieux susceptibles de généralisation effective, puis à traiter le cas des applications de $\mathbb{C}^p$ à valeurs dans une $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$ quelconques en s'inspirant de l'article [32***] de Diverio-Merker-Rousseau pour la partie effective (la généralisation n'a rien d'immédiat ; 'découvertes' et déconvenues sont très probables). En effet, très récemment, dans un travail prépublié [39****], Merker a montré que l'on pouvait atteindre les jets d'ordre arbitraire en dimension quelconque, à condition de revenir aux jets simples de Green-Griffiths.

Par ailleurs, il faudra aussi étendre du cas $p = 1$ au cas p quelconque l'article [30*] de Merker paru en 2009 aux Annales de l'Institut Fourier (généralisation aisée). Si le travail avance vite, la thèse pourra aussi rendre effective et généraliser une prépublication récente de Mourougane (*Families of hypersurfaces of large degree*, arxiv.org/abs/0910/1435) qui importe une grande partie des techniques de Diverio-Merker-Rousseau afin d'établir l'inexistence de certaines sections holomorphes.

§11. Sujet de doctorat proposé à Samuel Pocchiola

Algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes en dimensions 1, 2 et 3 ; Construction de connexions de Cartan associées à des structures CR de dimension 5

Thématique(s) de recherche
proposée(s) à Samuel Pocchiola
pour un doctorat
par Joël Merker

www.dma.ens.fr/∼merker/

Algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes

Dans les travaux originaux de Sophus Lie, le problème de la classification des algèbres de Lie de champs de vecteurs modulo les difféomorphismes locaux constituait l'objet d'étude principal. De même que le groupe de Galois d'une équation algébrique mesure son degré de résolubilité (par radicaux, à l'aide de transcendantes auxiliaires), le groupe de Lie d'une équation *différentielle* permet d'aborder structurellement l'intégration locale des équations aux dérivées partielles. Mais surtout, Lie avait compris en profondeur que l'étude *a priori* de la structure des algèbres *de Lie* trouve des applications dans tous les domaines des mathématiques qui font intervenir des groupes continus de transformations.

Problème fondamental de Lie : Classifier, à changement de coordonnées analytiques réelles ou complexes $(x_1, \dots, x_n)$, toutes les algèbres de Lie de champs de vecteurs locaux analytiques réels ou complexes de dimension finie $r \geqslant 1$:

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}$$

qui sont (par définition ou d'après un théorème fondamental dû à Lie) *stables par crochet de Lie* :

$$\big[X_k,\, X_l\big] = \sum_{s=1}^{r} c_{kls}\, X_s \qquad {\scriptstyle (k,\, l=1 \cdots r)},$$

où les c_{kls} sont certaines constantes, dites *de structure*.

Lie lui-même a classifié les algèbres de Lie de dimension finie en une variable complexe ou réelle ($n = 1$, $x \in \mathbb{C}$ ou $\in \mathbb{R}$), et en deux variables complexes ($n = 2$, $x \in \mathbb{C}^2$), voir e.g. : [26, 1] en langue anglaise, ou Bianchi [5] et Campbell [7] pour des restitutions sensiblement incomplètes, et surtout le traité original fondamental [13, 14, 15] en 3 volumes :

« *Theorie der Transformationsgruppen* »

rédigé en collaboration par Friedrich Engel et Sophus Lie entre 1884 et 1893 à Leipzig. Dans le troisième volume, Engel et Lie ont également mis au point des arguments géométriques ingénieux pour déduire du cas complexe le cas de la dimension réelle égale à deux ([15], p. 360). Plus récemment, en 1992, González-López, Kamran et Olver ([18]) ont retrouvé avec une méthode alternative, les huit algèbres de Lie *primitives*[13] réelles classifiées par Lie dont

[13] En dimension 2, la classification des algèbres de Lie *imprimitives* est la même dans le champ complexe et dans le champ réel. Nous ignorons si tel est le cas en dimension 3.

les complexifications redonnent les trois algèbres de Lie *primitives* complexes que sont $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{C})$ (groupe projectif), $\mathfrak{a}_2(\mathbb{C})$ (groupe affine) et $\mathfrak{sa}_2(\mathbb{C})$ (groupe affine).

Définition. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de champs de vecteurs locaux holomorphes ou analytiques réels définis sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ ou de $\mathbb{R}^n$ est dite *primitive* lorsqu'il n'existe pas de feuilletage local par des variétés complexes ou réelles (respectivement) de dimension k, avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$, qui est invariant par l'action du groupe de Lie local G engendré par $\mathfrak{g}$.

Si l'on note (x, y) des coordonnées réelles sur $\mathbb{R}^2$ et, pour abréger, p à la place de $\frac{\partial}{\partial x}$ ainsi que q à la place de $\frac{\partial f}{\partial y}$ (notations originales de Lie), ces huit algèbres primitives réelles sont :

	Générateurs infinitésimaux	Structure
1.	$\{p,\ q,\ \alpha(xp+yq)+yp-xq\},\ \ \alpha \geqslant 0$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$
2.	$\{p,\ xp+yq,\ (x^2-y^2)\,p+2xyq\}$	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$
3.	$\{yp-xq,\ (1+x^2-y^2)p+2xyq,\ 2xyp+(1+y^2-x^2)q\}$	$\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$
4.	$\{p,\ q,\ xp+yq,\ yp-xq\}$	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$
5.	$\{p,\ q,\ xp-yq,\ yp,\ xq\}$	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$
6.	$\{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq\}$	$\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$
7.	$\{p,\ q,\ xp+yq,\ yp-xq,\ (x^2-y^2)p+2xyq,\ 2xyp+(y^2-x^2)q\}$	$\mathfrak{so}_{3,1}(\mathbb{R})$
8.	$\{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q\}$	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$

En vérité, ce sont les algèbres de Lie *imprimitives* (réelles ou complexes) qui sont les plus nombreuses et dont la classification, notamment en dimension trois, se ramifie et se diversifie le plus.

Constatation importante : Même en dimension complexe ou réelle égale à deux, ce n'est que dans les *œuvres originales* de Lie que l'on trouve des démonstrations complètes pour les classifications des algèbres de Lie primitives ou imprimitives. En particulier et par exemple, González-López, Kamran et Olver dans leur travail cité [18] admettent simplement sans la redémontrer la classification complexe (cas primitif et imprimitif). Partant alors de la classification de Lie des algèbres imprimitives complexes :

	Générateurs infinitésimaux	Structure
1.	$\{p,\ q,\ xp-yq,\ yp,\ xq\}$	$\mathfrak{sa}_2(\mathbb{C})$
2.	$\{p,\ q,\ xp,\ xq,\ yp,\ yq\}$	$\mathfrak{a}_2(\mathbb{C})$
3.	$\{p,\ q,\ xp,\ xq,\ yp,\ yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q\}$	$\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{C})$

ils déduisent, en recherchant les formes réelles possibles, les huit algèbres de Lie réelles ci-dessus, lesquelles apparaissent en fait expressément comme le Théorème 34, p. 378 du Volume III de la *Theorie der Transformationsgruppen*.

Sujet accessible de recherche ou de doctorat : En parallèle des traductions entamées ou achevées [38, 39, 40], redémontrer dans un langage moderne et économique les résultats de classification suivants dûs à Lie *totalement absents de la littérature contemporaine en dimension* 3, et encore partiellement incomplets en dimension 3 (problème réellement ouvert) :

□ Classification des algèbres de Lie (de dimension finie) de champs de vecteurs $\mathbb{K}$-analytiques en dimension 1 (extrêmement facile) ;

□ Classification des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{pgl}_1(\mathbb{K})$ (facile) ;

□ Classification des algèbres de Lie en dimension 2 (aucune référence moderne pour une démonstration *complète*) ;

□ Classification des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{K})$ (aucun manuel moderne ne mentionne ce résultat que Lie jugeait fondamental, car il permet d'étudier la dimension 3 en projectivisant l'isotropie linéarisée d'un point, idée qui remonte à Helmholtz [38]) ;

□ Classification des algèbres de Lie primitives en dimension 3 (Lie a complété ce cas) ;

□ Classification des algèbres de Lie *im*primitives en dimension 3 qui stabilisent un feuilletage par des surfaces, mais qui ne stabilisent aucun feuilletage transverse par des courbes (Engel et Lie ont complété ce cas) ;

□ Classification des algèbres de Lie *im*primitives en dimension 3 qui stabilisent un feuilletage par des courbes, mais qui ne stabilisent aucun feuilletage transverse par des surfaces (Engel et Lie ont complété ce cas) ;

□ Classification des algèbres de Lie *im*primitives en dimension 3 qui stabilisent à la fois un feuilletage par des courbes et un feuilletage transverse par des surfaces (*problème ouvert* ; on a redécouvert en 2002 que Amaldi [2, 3] aurait complété ce cas, mais quelques lemmes préliminaires semblent incomplets, et le niveau de structuration des résultats est de toute façon inférieur à ce qu'on trouve dans la *Theorie der Transformationsgruppen*) ;

□ Classification des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{pgl}_3(\mathbb{K})$ (Engel et Lie ont quasiment complété ce cas dans [15]).

Problème ouvert depuis des décennies sur les variétés CR qui s'avérera tomber comme un fruit mûr après complétion des classifications ci-dessus : Classifier, localement et à biholomorphisme près, *toutes* les sous-variétés variétés CR analytiques réelles de $\mathbb{C}^3$ possibles, i.e. en dimension complexe trois, et notamment les hypersurfaces, de dimension réelle égale à 5. De nombreux chercheurs de par le monde ont gravité autour ou au voisinage de cette question encore ouverte : Chern, Moser, Vitushkin, Webster, Huckleberry, Henkin, Oeljeklaus, Winkelmann, Loboda, Ezhov, Isaev, Beloshapka, Schmalz, Falbel, Medori, Nacinovich, Hill, Cap, Ebenfelt, Fels, Kaup, Huang, Kossovskiy, ...

Motivation scientifique : Pourquoi revenir aux travaux originaux de Lie, et spécialement à ses travaux de classification ? C'est le problème énoncé ci-dessus qui a déclenché la motivation initiale. En approfondissant le champ mathématique impliqué, il est devenu extrêmement clair que les travaux originaux de Lie demeurent les plus aboutis et les plus systématiques pour ce qui concerne les questions de classification. Élie Cartan a été profondément influencé par la pensée de Lie et si de nombreux travaux de son œuvre nous restent encore difficiles d'accès, c'est probablement parce qu'il avait complètement intégré une manière de penser que Lie avait patiemment construite de façon accessible grâce à ses collaborations avec ses élèves, dont notamment Friedrich Engel, Georg Scheffers, Gerhard Kowalewski et d'autres. *La filiation historique et mathématique de Lie à Élie Cartan ne peut être bien comprise qu'en revenant aux œuvres de Lie*. Or le travail de modernisation complète des travaux de Lie n'a été conduit jusqu'à présent en totalité ni en Europe de l'Ouest, ni aux États-Unis, ni même à Moscou à la période glorieuse où Kolmogorov, Arnold et d'autres ont étudié à fond les travaux de Poincaré. C'est pour cette raison capitale que le projet de traduction et de modernisation de la *Theorie der Transformationsgruppen* a été entrepris ([38, 39]). En particulier, l'un des volets du travail doctoral qui est proposé dans ce document comprend la réalisation complète de la traduction anglaise des trois volumes de la *Theorie der Transformationsgruppen*. C'est l'occasion d'inscrire un jeune étudiant dans la pensée originale de Lie afin d'en retirer une capacité supérieure de conception et de réalisation.

Voisinages scientifiques contemporains : En France actuellement, un certain nombre d'experts issus de la géométrie algébrique ou de la théorie des feuilletages s'intéressent aux sous-groupes finis du groupe de Cremona des transformations birationnelles de l'espace projectif, notamment en termes de classification. Or comme nous venons de le dire, une fraction importante des résultats de Lie est consacrée aux sous-groupes (de Lie) des groupes projectifs $\mathsf{PGL}_n(\mathbb{C})$, non seulement pour les dimensions accessibles $n = 1$ et $n = 2$, mais aussi pour la dimension beaucoup plus délicate $n = 3$. Il est probable que des interactions pourront se dessiner.

Autre perspective : classification globale des variétés CR : Il faut savoir que Élie Cartan, en 1932 ([9, 10]) a classifié localement les hypersurfaces analytiques rélles de $\mathbb{C}^2$ en utilisant les travaux de Lie et de Tresse, et en interprétant aussi le problème en termes de *méthode d'équivalence* ([11, 44, 16, 42]). En outre, Cartan a classifié *globalement* les hypersurfaces sphériques, i.e. localement biholomorphes[14] à la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Récemment, dans un article et dans un *Lecture Notes in Mathematics*, Isaev a traité le problème global en dimension complexe deux pour les autres modèles localement simplement homogènes découverts par Cartan et qui ne sont pas sphériques. Dans le cas simplement homogène, le problème revient à trouver toutes les variétés CR qui sont uniformisées par une variété CR simplement connexe. En dimension $\geqslant 3$, de nombreux résultats devraient être accessibles.

Modernisation en cours et traduction des travaux de Lie

Début 2008, Joël Merker s'est engagé vers une modernisation des travaux de classification de Lie, spécialement en dimension trois ([40]). Entre-temps, il a écrit un ouvrage centré autour du problème de Riemann-Helmholtz, qui apparaît à la fin du troisième volume de la *Theorie der Transformationsgruppen* ([15]). Au fur et à mesure de la progression, il est apparu de de plus en plus clairement qu'une proportion importante — environ quarante pour cent — des résultats du premier volume [13] n'apparaissait pas dans les travaux de modernisation contemporains ([6, 41, 42]). C'est la raison pour laquelle le projet de traduction *intégrale* ([39]) du Volume I de l'allemand vers l'anglais a été décidé fermement fin décembre 2009, après confirmation par Catriona Byrne (Springer) qu'une telle entreprise pourrait bel et bien intéresser des éditeurs (y compris en France, d'ailleurs). Une première version de ce travail sera achevée, prépubliée sur `arxiv.org` (annonce vérifiable), et soumise à Springer avant fin mars 2010.

Entre-temps, une tentative pour n'extraire que les ~ 170 premières pages du Volume III ([15]) avait été entreprise ([40]) il y a deux ans et quelques mois, en décembre 2007[15]. Ce projet initial a donc été élargi et divisé en deux objectifs principaux et complémentaires :

□ Traduction anglaise intégrale des ∼2100 pages de la *Theorie der Transformationsgruppen* (Joël Merker, sur la lancée de [39]) ;

---

[14] Voir les deux articles [36, 37] d'octobre 2009 pour une caractérisation explicite de la sphéricité des hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ et de $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 3$, en termes d'équation définissante, problème resté longtemps ouvert en raison de la difficulté des calculs dans les approches connues de Cartan, Hachtroudi, Tanaka et Chern. Peu de personnes ont réellement compris les raisons profondes pour lesquelles l'approche « *problème d'équivalence* » due à É. Cartan est moins puissante, dans l'effectivité, que celle de Lie.

[15] Mentionnons qu'en juin 2008, une maîtrise a été soutenue à l'ENS dans le cadre de la FIMFA par Sylvain Arguillère et Nicolas Mascot sur la classification en dimension complexe deux en se basant sur le livre d'Olver [42] et sur la traduction anglaise naissante [40] de ces ~ 170 premières pages.

□ Modernisation ciblée (Samuel Pocchiola) des résultats de classification des algèbres de Lie finiment engendrées de champs de vecteurs analytiques locaux en dimensions (complexes ou réelles) 1, 2 et 3, c'est-à-dire l'un des volets du travail doctoral proposé.

Construction de connexions de Cartan

Très récemment, dans un article de 82 pages paru à *Acta Mathematica* en 2008, Gregor Fels et Wilhelm Kaup ont classifié les hypersurfaces analytiques réelles *homogènes* de $\mathbb{C}^3$ dont la forme de Levi possède, en tout point, une valeur propre non nulle ainsi qu'une valeur propre nulle, mais qui sont 2-non-dégénérées en tout point, au sens où les jets d'ordre 2 de l'application des variétés de Segre compensent la nullité d'une des deux valeurs propres, ce qui permet tant au principe de réflexion qu'à tous les résultats de finitude de fonctionner comme dans le cas standard Levi non-dégénéré[16]. On sait depuis longtemps que dans $\mathbb{C}^3$, en chacun de ses points génériques, une hypersurface quelconque est localement soit biholomorphe à un produit de $\mathbb{C}$ par une hypersurface de $\mathbb{C}^2$, soit Levi non-dégénérée, soit Levi-dégénérée de rang 1 et 2-non-dégénérée comme ci-dessus. Ainsi de nos jours et d'une manière assez paradoxale, ce sont les hypersurfaces réelles de dimension 5 de $\mathbb{C}^3$ simplement homogènes et *Levi non-dégénérées* qui ne sont ni comprises en totalité, ni classifiées. La méthode de Fels-Kaup est indirecte et beaucoup moins systématique que ne le permettrait un prolongement la pensée originale de Lie.

Pour la classe des hypersurfaces 2-non-dégénérées à forme de Levi uniformément de rang 1, on sait en tout cas (Beloshapka, Fels-Kaup, Merker) que la dimension maximale du groupe d'automorphismes CR est égale à 10, et que cette dimension maximale est atteinte si et seulement si l'hypersurface est localement biholomorphe au tube $T + i\,\mathbb{R}^3$ sur le cône de lumière $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ au voisinage de $(1, 1, 0)$ ou de tout autre point non singulier. Fels-Kaup semblent avoir démontré que la dimension sous-maximale du groupe d'automorphismes CR locaux tombe alors à 5, sans dimensions intermédiaires entre 5 et 10 ; en tout cas, il semble souhaitable d'avoir d'autres arguments pour confirmer ce fait. Par ailleurs, en 2000, Ebenfelt (Duke Math. J.) a tenté de construire une connexion de Cartan pour cette classe d'hypersurfaces, mais une erreur de normalisation importante dès la première étape de l'application de l'algorithme de Cartan rend la quasi-totalité des résultats inapplicables au problème d'origine, et depuis, personne n'a repris en main la construction. Or on doit pouvoir éviter l'application "à l'aveugle" (Ebenfelt) de l'algorithme d'équivalence et construire directement une connexion de Cartan en étudiant les déformations du modèle $T + i\,\mathbb{R}^3$, en s'inspirant de

[16] Voir e.g. [28, 29, 30, 31, 32, 34] pour la théorie unifiée du principe de réflexion.

clarifications conceptuelles récentes dues à Beloshapka-Ezhov-Schmalz : ils ont appliqué une telle méthode qui remonte originalement à É. Cartan et qui a été poursuivie par Tanaka, Morimoto et d'autres au Japon, puis par Cap et son école à Vienne. Récemment, Ezhov-McLaughlin-Schmalz ont écrit un preprint de synthèse : *From Cartan to Tanaka : getting real in the complex world* prévu pour les Notices of the AMS (à confirmer) qui présente bien la construction à la Tanaka dans le cas des hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$, jamais clarifié précisément dans la littérature, et qui pourrait servir d'inspiration à un travail doctoral dans cette direction. Mentionnons que depuis un an et demi, Masoud Sabzevari à Isfahan a entamé sous la direction de Joël Merker (à distance, via internet, sans aucune rencontre physique) un travail de construction de connexion de Cartan pour des variétés CR de dimension CR égale à 1, de codimension 3 et de dimension réelle 5 dans $\mathbb{C}^4$.

Enfin, l'aspect calcul formel du sujet pourrait donner lieu à des interactions, par exemple avec l'équipe de Michel Petitot à Lille.

Déroulement du travail doctoral en première année

Partage du temps de travail entre :

□ Lecture (guidée par le traducteur) de la traduction [39] du Volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen* ;

□ Lecture guidée des 170 premières pages du Volume III [15], dont les 76 premières sont déjà traduites en anglais [40] ;

□ Construction d'un article de synthèse qui modernise ces travaux de classification de Lie, en s'autorisant à être légèrement moins systématique que Lie : astuces *a posteriori* de preuves autorisées ;

□ Apprentissage guidé de la théorie des connexions de Cartan.

RÉFÉRENCES

[1] Ackerman, M. ; Hermann, R. : *Sophus Lie's 1880 Transformation Group paper*, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975.

[2] Amaldi, U. : *Contributo alla determinazione dei gruppi finiti dello spazio ordinario*, Giornale di mathematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane, I : **39** (1901), 273–316.

[3] Amaldi, U. : *Contributo alla determinazione dei gruppi finiti dello spazio ordinario*, Giornale di mathematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane, II : **40** (1902), 105–141.

[4] Arnol'd, V.I. : *Ordinary differential equations*. Translated from the Russian and edited by R.A. Silverman, MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1978.

[5] Bianchi, L. : *Lezioni sulla teoría dei gruppi finiti di trasformazioni*, Enrico Spoerri Editore, Pisa, 1918.

[6] Bluman, G.W. ; Kumei, S. : *Symmetries and differential equations*, Applied mathematical sciences, 81, Springer-Verlag, Berlin, 1989, xiv+412 pp.

[7] Campbell, J.E. : *Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups*, The Clarendon Press, Oxford, 1903.

[8] Cartan, É. : *Sur les variétés à connexion projective*, Bull. Soc. Math. France **52** (1924), 205–241.

[9] Cartan, É. : *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, I*, Ann. Math. Pura Appl. **11** (1932), 17–90.

[10] Cartan, É. : *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **1** (1932), 333–354.

[11] Cartan, É. : *Les problèmes d'équivalence* (Séminaire de Math., 4^e année, 1936–37), Œuvres complètes, II, 1311–1334, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[12] Ebenfelt, P. : *Correction to "Uniformly Levi degenerate CR manifolds : the 5-dimensional case*, Duke Math. J. **131** (2006), 589–591.

[13] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xii+638 pp. (1888). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[14] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, viii+559 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[15] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Dritter und letzter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xxix+836 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[16] Gardner, R.B. : *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 58 (SIAM, Philadelphia, 1989), 127 pp.

[17] Golubitski, M. : *Primitive actions and maximal subgroups of Lie groups*, J. Differential Geom. **7** (1972), 175–191.

[18] González López, A. ; Kamran, N. ; Olver, P.J. : *Lie algebras of vector fields in the real plane*, Proc. London Math. Soc. **64** (1992), no. 2, 339–368.

[19] Gröbner, W. : *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, Math. Monog. Veb Deutschen Verlag der Wissenschaften, 1960.

[20] Hawkins, T. : *Emergence of the theory of Lie groups*, *En essay in the history of mathematics 1869–1926*, Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences, Springer-Verlag, Berlin, 2001, xiii+564 pp.

[21] Hawkins, T. : *Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff*, Arch. Hist. Exact Sci. **59** (2005), 381–436.

[22] Hitchin, N. : *Projective geometry, lecture notes*, 2003, www2.maths.ox.ac.uk/∼hitchin/

[23] Killing, W. : *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Vierter Theil*, Math. Ann. **36** (1890), 161–189.

[24] Lie, S. : *Über Gruppen von Transformationen*, Göttinger Nachrichten 1874 (1874), 529–542. Reprinted in *Abhandlungen* **5**, 1–8 [3 December 1874].

[25] Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen III. Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit*, Archiv for Mathematik **3** (1878), 93–128. Reprinted in *Abhandlungen* **5**, 78–133.

[26] Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528 ; translated in English and commented in : [1].

[27] Merker, J. : *Convergence of formal biholomorphisms between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **26** (2001), no. 5, 281–302.

[28] Merker, J. : *On the partial algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), no. 3, 547–591.

[29] Merker, J. : *On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 5, 1443–1523.

[30] Merker, J. : *On the local geometry of generic submanifolds of $\mathbb{C}^n$ and the analytic reflection principle*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) **125** (2005), no. 6, 751–824.

[31] Merker, J. : *Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle*, Annales Fac. Sci. Toulouse, **XIV** (2005), no. 2, 215–330.

[32] Merker, J. : *Explicit differential characterization of the Newtonian free particle system in $m \geqslant 2$ dependent variables*, Acta Mathematicæ Applicandæ, **92** (2006), no. 2, 125–207.

[33] Merker, J. ; Porten, E. : *Holomorphic extension of CR functions, envelopes of holomorphy and removable singularities*, International Mathematics Research Surveys, Volume **2006**, Article ID 28295, 287 pages.

[34] Merker, J. : *On the local geometry of generic submanifolds of* $\mathbb{C}^n$ *and the analytic reflection principle*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) **125** (2005), no. 6, 751–824.

[35] Merker, J. : *Lie symmetries and CR geometry*, 118 pp, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), to appear (2009). arxiv.org/abs/math/0703130

[36] Merker, J. : *Nonrigid spherical real analytic hypersurfaces in* $\mathbb{C}^2$, arxiv.org/abs/0910.1694/, to appear in Complex Variables and Elliptic Equations.

[37] Merker, J. : *Vanishing Hachtroudi curvature and local equivalence to the Heisenberg sphere*, 16 pages, submitted, arxiv.org/abs/0910.2861/

[38] Merker, J. : *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*, arxiv.org/abs/0910.0801/, Hermann Éditeur des Sciences et des Arts, Paris, $\sim$320 pages, accepté définitivement et sans révisions le 5 février 2010, à paraître au printemps 2010.

[39] Merker, J. : *Sophus Lie and Friedrich Engel's* Theory of Transformation Groups*, Vol. I. Modern Presentation and English Translation*, 540 pages, to appear in arxiv.org/ by the end of March 2010. Regularly updated version available at : www.dma.ens.fr/$\sim$merker/

[40] Merker, J. : *Lie algebras of holomorphic vector fields in dimensions 1, 2 and 3*, in preparation, www.dma.ens.fr/$\sim$merker/

[41] Olver, P.J. : *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, 107, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986, xxvi+497 pp.

[42] Olver, P.J. : *Equivalence, Invariance and Symmetries*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.

[43] Samuel, P. : *Projective geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1988, ix+156 pp.

[44] Sternberg, S. : *Lectures in differential geometry*, Second edition, Chelsea publishing co., New York, 1983, xviii+442 pp.

[45] Stormark, O. : *Lie's structural approach to PDE systems*, Encyclopædia of mathematics and its applications, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, xv+572 pp.

[46] de Tannenberg, W. ; Vessiot, E. : *Compte Rendu et analyse de* [13], Bull. Sci. Math., 2 e série, **13** (1889), 113–148.

§12. Doctorat de philosophie des mathématiques à Paris 7

MOTIVATION DE LA DEMANDE DE DÉROGATION INDIVIDUELLE

AUX CONDITIONS GÉNÉRALES D'INSCRIPTION

EN DIPLÔME DE DOCTORAT

Á L'UNIVERSITÉ DE PARIS 7

Joël MERKER

DEMANDE DE QUATRIÈME ANNÉE (CONSÉCUTIVE)

École doctorale : Sciences du vivant, code : 030.

Spécialité : Doctorat Épistémologie, Histoire des Sciences et des Techniques.

Nom du directeur de thèse : M. Jean-Jacques Szczeciniarz, Professeur, Directeur du Département *Histoire et Philosophie des Sciences*.

Date de dépôt de la demande : 3 novembre 2009.

Première, deuxième et troisième années d'inscription à Paris 7 : 2006/2007, 2007/2008 et 2008/2009.

N° d'étudiant : 20610146.

Madame, Monsieur,

Inscrit en doctorat depuis l'automne 2006, je souhaiterais demander une dérogation pour bénéficier d'une quatrième année.

Jusqu'à présent, j'ai travaillé principalement sur le problème de Riemann-Helmholtz tel que traité et résolu par Sophus Lie dans les années 1886 à 1890 grâce à sa théorie naissante des groupes continus de transformations. Ce problème consiste à demander quels axiomes sont suffisants, dans l'espace tridimensionnel, pour caractériser les géométries dont la courbure riemannienne est constante. Un projet d'ouvrage, dont la table des matières est reproduite ci-dessous et qui est constitué d'environ cent-cinquante pages de commentaires philosophiques et mathématiques suivies d'environ cent-cinquante pages de traduction française annotée, est soumis depuis le 5 octobre 2009 à une évaluation pour publication (après révisions dûment reportées sur le manuscrit) auprès de Hermann, *Éditeur des Arts et des Sciences*.

Pour compléter ce travail de réflexion sur la puissance de l'œuvre de Sophus Lie, j'ai déjà commencé à rédiger un chapitre consacré à sa *méthode synthétique* et à la *continuité systématique* de sa pensée, qui n'est pas sans rappeller les grands systèmes philosophiques d'Aristote et de Hegel.

Dans la lignée des réflexions générales sur Riemann esquissées dans le Chapitre 1 du projet d'ouvrage soumis, je projette d'élaborer aussi, en m'inspirant de thématiques contemporaines, une construction philosophique adéquate à la pratique mathématique réelle, qui prenne en compte aussi bien les dimensions réellement philosophiques des concepts mathématiques que l'ouverture métaphysique interne du champ mathématique.

En particulier, je vais concentrer mes analyses philosophiques principalement sur la pratique du calcul en algèbre et en géométrie, en développant les thèmes philosophiques suivants :

- Dynamique de l'égalité.
- Réduction par continuité du conceptuel au technique.
- Domination de l'irréversible-synthétique en mathématiques.
- Théorie de l'ouverture coprésente des énoncés achevés.

- Complexification du platonisme constructiviste en mathématique.

Ces thèmes seront illustrés à l'aide d'un certain nombre d'exemples mathématiques :

- Théorie algébrique des invariants.
- Élimination dans la conjecture du jacobien.
- Effectivité en géométrie algébrique.
- Sommes d'Euler et polylogarithmes.

En définitive, le texte doctoral sera constitué de deux parties essentiellement indépendantes : I) Sophus Lie et les fondements de la géométrie (quasiment achevé) ; II) Essai de philosophie générale des mathématiques.

En vous remerciant très sincèrement pour votre attention,

Joël Merker, CNRS, ENS, Paris.

État d'avancement des travaux

Travail quasiment finalisé : Projet de monographie soumis pour publication le 5 octobre 2009 à *Hermann, Éditeur des Sciences et des Arts* (Paris) :

« Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz »,
viii+307 pages, consultable à l'adresse : www.dma.ens.fr/∼merker/

Table des matières

Partie I *Introduction philosophique générale*

Partie II *Introduction mathématique à la théorie de Lie*

Partie III *Traduction française commentée et annotée*

Sophus LIE, unter Mitwirkung von Friedrich ENGEL

Theorie der Transformationsgruppen, Dritter und letzter Abschnitt, Abtheilung V[17]

Bibliographie

JUSTIFICATION DE LA DEMANDE

Activité professionnelle : Chargé de recherche au CNRS en Mathématiques.

Travaux mathématiques conduits et (pré)publiés depuis septembre 2006 :

[17] LIE, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Dritter und Letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie*, B.G. Teubner, Leipzig, 1893. Reprinted by Chelsea Publishing Co. (New York, N.Y., 1970).

RÉFÉRENCES

[1] **Joël Merker and Egmont Porten**, *A geometrical proof of the Hartogs extension theorem*, Prépublication DMA-ENS no. 10 (2006), 36 pp., 22 colored illustrations ; `math.CV/0610985` ; J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 3, 513–546.

[2] **Joël Merker and Egmont Porten**, *The Hartogs extension theorem on $(n-1)$-complete complex spaces*, arXiv:0704.3216, Journal für die reine und andgewandte Mathematik, 2009, paru.

[3] **Joël Merker**, *Jets de Demailly-Semple d'ordres 4 et 5 en dimension 2*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **3** (2008) no. 18, 861–933. arxiv.org/abs/0710.2393/

[4] **Joël Merker**, *Inactualité et inadéquation de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein*, 38 pages, arxiv.org/abs/0801/

[5] **Joël Merker**, *Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface*, 22 pp., Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **59** (2009), no. 3, 1077–1104. arxiv.org/abs/0805.3987/

[6] **Joël Merker**, *An algorihm to generate all polynomials in the k-jet of a holomorphic disc $D \to \mathbb{C}^n$ that are invariant under source reparametrization*, 103 pp., à paraître, arxiv.org/abs/0808.3547/

[7] **Joël Merker, Simone Diverio and Erwan Rousseau**, *Effective algebraic degeneracy*, Inventiones Mathematicæ, à paraître, arxiv.org/abs/0811.2346/

[8] **Joël Merker**, *Nonrigid spherical real analytic hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$*, 29 pages, arxiv.org/abs/0910.1694/

[9] **Joël Merker**, *Vanishing Hachtroudi curvature and local equivalence to the Heisenberg sphere*, 16 pages, arxiv.org/abs/

[10] **Joël Merker**, *Algebraic differential equations for entire holomorphic curves in projective hypersurfaces of general type*, 45 pages, prépublié fin novembre 2009.

Travaux inachevés :

RÉFÉRENCES

[1] **Joël Merker**, *Systèmes en involution et parallélisme absolu : contribution d'Élie Cartan aux essais de théorie unifiant gravitation et électromagnétisme conduits par Einstein entre 1928 et 1931*, $\sim$ 30 pages finalisées.

[2] **Joël Merker**, *Lie algebras of holomorphic vector fields in dimensions 1, 2 and 3*, project of monograph, $\sim$150 finalized pages.

§13. Thèses générales de philosophie des mathématiques

Thèses générales de philosophie des mathématiques

En mathématiques, nul automatisme empirique, et il n'y a pas d'essence motrice séparée.

L'irréversible mathématique doit forcer à complexifier les règles du jeu exégétique.

As you said, Don [Zagier], the conjecture is the most responsible thing one can do and sometimes people make conjectures when they absolutely have no right to make conjectures. A conjecture really comes hard. I agree with you, Don, that one could make a serious conjecture once or twice in one's life, after deep thinking. You come to a deep understanding, and you cannot finish it, and you make a conjecture. You just cannot turn any question into a conjecture. Mikhail GROMOV

We have to assume that we are very stupid and our natural questions are stupid, and only by hard work, by conceptualizing, working hard, calculating, whatever, we can make good questions or good mathematics. And it's naive to think that we all have intuition or something. It's a stupid opinion. That's what I believe.

Mikhail GROMOV.

L'expérimental numérique force à éclater les questions.

L'expérimental numérique éprouve les cohérences heuristiques.

Physicalité fondamentale du calcul. Qu'il soit manuel ou digital, arithmétique, algébrique, numérique, probabiliste ou diagrammatique, tout calcul exécuté ou programmé par les hommes est irréductiblement discret, fini et imprimé de manière transitoire sur des supports physiques. Aucun calcul « transcendant » à une effectuation incarnée physiquement n'est possible. Tous les calculs pour lesquels l'ordinateur est très performant (décimales de π ; bases de Gröbner ; tests de primalité ; analyse matricielle ; schémas numériques des équations aux dérivées partielles ; statistiques ; tris de données) sont dans leur principe effectif identiques à ceux que l'on conduit en ayant recours à n'importe quel autre véhicule physique pour le mouvement des symboles.

Le conjectural s'inscrit d'emblée dans le langage du démonstratif.

Les questions intrinsèques perdurent au sein des architectures achevées.

Directions ouvertes de philosophie des mathématiques.

- Édifier une *pensée de l'ouverture mathématique technique*.
- Spéculer sur la nature des questions mathématiques.
- Ramifier la question kantienne : « comment les jugements synthétiques *a priori* sont-ils possibes ».
- Penser l'irréversible-synthétique.
- Actifier, reproduire, propager, mécaniser, automatiser et désacraliser le questionnement mathématique.
- Formuler expressément les ouvertures rémanentes.
- Constituer des catégories de pensée pour systématiser la nature de ce qui demeure dans le domaine du non-exploré.

- Désigner l'indécision.
- Typiser et hiérarchiser les questions spécifiques.
- Démasquer les ignorances paradoxales qui se présentent comme connaissances entrevues.
- Réhabiliter le philosophique des mathématiques.

L'Atlantide du génétique. La transmission des résultats mathématiques par le langage s'accompagne habituellement chez de nombreux auteurs d'un geste plus ou moins (in)volontaire d'*effacement partiel de la pensée*. La formulation très résumée qu'emploient les publications mathématiques s'inscrit de fait dans un *a posteriori* de la genèse qui voile ou qui masque toutes les causalités dialectiques. Plus grave encore : la finalisation des formulations supprime en général toute référence à la situation initiale de problème ouvert. Dès l'instant où les buts sont atteints, ce qui s'est passé est en quelque sorte *irréversible* : puisque la compréhension a capturé et formulé le compris, elle élimine du même coup définitivement l'incompréhension à laquelle elle était confrontée auparavant.

Situation d'ouverture universelle du calcul. La pensée qui calcule est toujours inscrite dans une situation d'ouverture *absolument universelle*, qui s'exprime par une *question générique* : « *comment décider du prochain acte* ? » La question est en effet constamment : « *quel acte de calcul effectuer* ? » C'est *la* question, il n'y a qu'*elle*, et elle est tout le temps « *là* ».

Rappelons le *schematum* de l'exponentielle : tout arbre discret qui présente des points de bifurcation croît de manière exponentielle, même quand dans une certaine *proportion*, une partie de ses branches naissantes est supprimée aléatoirement. Ici, c'est-à-dire <u>*dans l'universel indécis du calcul*</u>, la pensée est *a priori* confrontée à une *exponentiation potentielle* de ses actes, et donc à l'impossibilité de tout embrasser. Il faut par conséquent définir une *posture décisionnelle viable*. Là est tout l'enjeu pour qui veut engendrer de l'irréversible-synthétique en mathématiques.

Micro-spéculation sur la dynamique du calcul. Tout le possible des métamorphoses pose question et s'offre au pivot de la réeffectuation. Chaque retour en arrière implique acte de décision, réinterprétation des gradients symboliques et *reprise* des calculs. Parce qu'*aucun possible n'appartient à la mathématique idéale*, les actes d'homogénéisation formelle qui semblaient définitifs sont eux aussi indéfiniment soumis à révision.

Métaphysique de l'instant propre de tout acte. Les exigences du principe de raison ne sont presque jamais respectées d'une manière absolue. Formulées au niveau le plus élevé, *ces exigences voudraient que chaque acte mathématique porte en lui des raisons justifiantes qui le motivent et* *qui l'expliquent*. Ces exigences voudraient que soient effacées au mieux les traces rémanentes de mystère qui entachent l'instant propre de tout acte. Les mathématiques ne sont-elles pas une science des causalités abstraites, objectives et *a priori* ? À son plus haut niveau, l'exigence de penser en raison voudrait donc que soit mis au point un langage mathématique totalisant qui *exprime à chaque instant les motivations et les causalités de tout acte et de tout calcul*.

Toute notation doit être soumise à une révisibilité permanente

Il y a un *voir géométral* du calcul formel qui est au centre de toute genèse conceptuelle

Subduction relative du langage. L'écriture mathématique doit savoir profiter de l'élasticité du langage pour opérer en subduction relative avec l'information formelle qu'elle choisit de transmettre.

Tensions. Même dans l'*a posteriori* d'une découverte, tests d'adéquation et examens de nécessités soumettent la pensée mathématique à une forte tension interne. Ces exigences qui sont enracinées dans le penser philosophique relèvent avant tout d'un penser spéculatif et universel que rien néanmoins ne systématise ou ne désigne explicitement dans les pratiques contemporaines des mathématiques. Malgré ce manque de définition des méthodes, on n'en est pas moins toujours spontanément conduit à continuer à « chercher » encore, là où il pourrait sembler que tout ce qui était visé a déjà été « trouvé ». À savoir : chercher à mieux comprendre les causalités techniques et à mieux deviner les raisons profondes. Trop peu analysées par l'épistémologie contemporaine, ces tensions dirigent et orientent quasiment toutes les pratiques de recherche.

Mathematics is amazingly compressible

Alchimie cognitive de la compréhension. Nous savons pour l'avoir pratiqué à l'école ou en faculté que la pensée scientifique, lorsqu'elle est gestualisée, c'est-à-dire accompagnée par le corps dans sa mobilité disponible, s'enrichit d'une dynamique intuitive qui guide l'esprit vers l'élémentaire, le concret et le compréhensible. Grâce au mouvement physique et à la parole, une construction mentale s'opère de manière beaucoup plus rapide, efficace, et prégnante qu'à la lecture, car nous sommes tous, en tant qu'êtres humains, principalement structurés par nos appareils moteurs et perceptifs, y compris lorsqu'il s'agit de s'approprier des concepts très abstraits. C'est pour cette raison, entre autres, que nous éprouvons souvent de réelles difficultés à accéder aux significations profondes des théories, lorsqu'elles ne nous sont présentées que sous forme écrite et désincarnée, pour peu qu'elles ne nous soient pas encore familières ou que nous n'en maîtrisions pas les fondamentaux, et nous avons pour confirmation de cet état de fait que parfois, par la suite, au hasard d'un séminaire ou d'une conférence, lorsque cette théorie nous est dévoilée oralement, nous faisons l'expérience psychologiquement douloureuse de découvrir que nous n'étions pas parvenus à reconstituer les bons paysages conceptuels par notre seule force de pensée à partir d'un simple déchiffrement de l'écrit. L'alchimie d'appropriation de la pensée qu'on appelle la *compréhension* exige en effet une dépense mentale bien plus extraordinaire quand on lit que lorsque les choses nous sont expliquées par un être humain, parce que celui qui nous parle use et abuse de ses capacités de parole, de répétition, de désignation et de raccourci, ce qui fait voler en éclat tous les handicaps artificiels auxquels nous nous soumettons au contact de l'écrit imprimé.

Orchestrer les actes de pensée. Toutefois, après avoir signalé notre incapacité à faire le plein d'essence intuitive aussi rapidement qu'on téléchargerait des textes électroniques sur un ordinateur (on pourrait rêver de posséder un cerveau susceptible d'ingurgiter des mathématiques directement « à la pompe » sur le *web*, ou qui puisse apprendre des langues étrangère la nuit pendant le sommeil par simple branchement à des canaux de fibres optiques), il est absolument hors de question pour nous de disqualifier l'écriture, parce que, dans le rapport de complémentarité qu'elle entretient au domaine plus aisé de l'oralité, l'écriture a pour objectif principal de fixer une *concentration orchestrée d'actes de pensée*, en les purgeant de la contingence et du chaos des gestes. Jamais aucun exposé oral ne sera en mesure de supplanter l'écriture sur ce point, et nous savons que certaines théories mathématiques compilées dans des traités d'ampleur exigent des années d'apprentissage, même lorsque l'esprit bénéficie du secours des exposés oraux. En sciences, les livres, monographies, ouvrages, traités ou notes de cours, compactifient chacun des milliers d'actes de connaissance, avec l'espoir de faciliter un accès ordonné au désordre gigantesque d'hésitations, de refontes, de remanipulations de réécritures, de calculs inexacts et de microcorrections qu'ils ont subi, sans oublier que le contenu interne est souvent le fruit d'années de méditations. Chaque bible scientifique « lyophilise » une pensée que ses lecteurs doivent « réhydrater » avec leur seule « sueur intellectuelle ». Et comme le nombre de ces ouvrages augmente exponentiellement, les efforts de lecture que chacun peut entreprendre ne peuvent, depuis bien longtemps, plus suivre le rythme.

Ces considérations soulignent notre finitude, cette « rétrécitude » que l'on ressent de manière accentuée à cause de l'explosion du nombre de publications scientifiques. Il s'agit d'une limitation intrinsèque, et le « nous » doit renvoyer ici à l'individualité propre de l'appareil biologique de pensée, ainsi qu'à sa durée de vie, qu'on dit ordinairement « limitée ».

Mais alors, toute décision d'écrire s'expose à de formidables difficultés.

Comment écrire ? En effet : **comment inventer une écriture qui diminue la lenteur, dilate la finitude du compréhensible et resserre au maximum l'écart entre la pensée vivante et le texte symbolique ?** Cet écart, nous l'avons dit, agit comme une différence de potentiel ineffaçable.

Et d'autres obstacles encore, d'ordre cognitif, s'interposent — en voici un qui nous paraît déterminant : dans le domaine de la pensée, nos cerveaux exigent des explications à chaque instant ; par l'effet d'un réflexe sain qui date de l'enfance, **la question du « pourquoi » et la question du « comment » surgissent à chaque nouvelle information reçue** ; et c'est grâce à cela que nous pouvons orienter notre corps et notre pensée à tous les instants de la vie, chaque *question* subissant la pression d'une exigence de *décision*. Tout aussi puissant et disponible que le système perceptif, le « *système spéculatif* » — c'est-à-dire l'ensemble des structures qui nous permettent de penser en questionnant — exige des explications, demande des motivations, cherche les nécessités, souhaite des informations historiques et désire une possession intuitive totale des choses.

> Mathematics is amazingly compressible : you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a *tremendous mental compression*. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics[a].
>
> [a]William P. THURSTON, *Mathematical education*, `math.HO/0503081`, 2005.

Comment alors satisfaire le « **désir spéculatif avide** » du lecteur, cet ingénu du pourquoi qui ne possède pas encore sa toile préférée de perspectives mentales ? Reprenons donc la question : comment se constituer un **style d'écriture scientifique** qui procure au mieux les compressions intuitives ? Voici en résumé quelques principes élémentaires, compilés dans une liste non exhaustive que chacun pourra amender ou corriger :

- ☐ **respecter rigoureusement la successivité, la progressivité et la continuité des raisonnements** ;
- ☐ **illustrer les constructions par des figures** ;
- ☐ **piloter au mieux l'intuition du lecteur** ;
- ☐ **écrire l'ignorance** ;
- ☐ **formuler de la pensée littérale au sein même des paragraphes les plus techniques** ;
- ☐ **détailler scrupuleusement les calculs** ;
- ☐ **virtualiser et anticiper** ;
- ☐ **expliquer, commenter et interpréter les énoncés de théorèmes** ;
- ☐ **charpenter la clarté rhétorique** ;
- ☐ **rappeler et redéfinir les notions qui interviennent dans un énoncé** ;
- ☐ **formuler des questions ouvertes** ;
- ☐ **expliciter des motivations** ;
- ☐ **articuler soigneusement les moments d'opposition dialectique** ;
- ☐ **décrire l'architecture des démonstrations en langage ordinaire** ;
- ☐ **temporaliser le cours des démonstrations en utilisant les temps des verbes** ;
- ☐ **filtrer mentalement l'écriture par la relecture et par les reprises** ;
- ☐ **tester inlassablement la lisibilité en se dédoublant** ;
- ☐ **réordonner, impitoyablement, toujours**.

Die Gaussche Strenge

Le levier symbolique. À cause de la grande difficulté qu'il y a à exposer pleinement la signification des notions géométriques, on se contente généralement de présenter seulement de manière formelle ou axiomatique les concepts de connexion, de dérivée covariante, de courbure, de torsion, ainsi que les identités de type Bianchi auxquelles satisfont les dérivées covariantes des tenseurs fondamentaux. Les présentations résumées des quantités g_{kl}, g^{pq}, Γ_{ij}^k, R_{ijk}^l, R_{ij}, R et E_{ij} que l'on s'autorise en relativité générale souffrent parfois de cette imperfection. À vrai dire, par l'effet d'un penchant au calcul auquel la pensée est entraînée dès que le langage symbolique s'introduit dans les raisonnements, l'« essence du tensoriel » incite à l'« algébrisation des contenus ».

> Il est dans la nature des mathématiques des temps modernes (en contraste avec celles de l'Antiquité) que nous possédons un levier sous la forme de notre langage symbolique et de notre terminologie, grâce à quoi les raisonnements les plus complexes sont réduits à un certain mécanisme. De cette manière, la science a gagné infiniment en richesse, mais elle a autant perdu en beauté et en caractère, comme on le fait ordinairement dans la pratique. Combien ce levier est-il fréquemment appliqué de manière purement mécanique ! bien que l'autorisation de l'employer implique, dans la plupart des cas, certaines hypothèses passées sous silence*. Gauß, Werke, **10**, 1, p. 434.

Die Gaussche Strenge. Cependant, comme l'exigeait Gauss lui-même dans cette lettre du 1er septembre 1850 adressée à son fidèle interlocuteur Schumacher (où il critiquait le peu de souci de rigueur que Prehn manifestait dans un mémoire sur les séries divergentes paru la même année dans le *Journal de Crelle*) :

† « Est ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir eine Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mecanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt. »

> Chaque fois que l'on utilise le calcul et chaque fois qu'on emploie des concepts, j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles [ursprünglichen Bedingungen], et que tous les résultats du mécanisme ne soient jamais considérés comme des propriétés en dehors d'une autorisation claire **. *Ibidem*.

Ainsi s'exprime la rigoureuse et austère sévérité mathématique de Gauss (die GAUSSche Strenge) : jamais acte de calcul ne doit être engagé qui ne soit encadré au préalable par des conditions précises quant à l'extension de ses significations. Par exemple, quel que soit le sens qu'on donne aux séries divergentes en choisissant un procédé de sommation déterminé, de type Cesaro, Féjer ou Toeplitz, il faut impérativement justifier par des propositions dûment établies à partir des définitions initiales que l'on peut effectuer toutes les opérations algébriques élémentaires sur les séries ainsi « apprivoisées », et notamment la multiplication ; on ne pourrait certainement pas se contenter d'exécuter ces opérations au prétexte qu'elles sont justifiées pour les séries convergentes. Tout calcul que l'on transfère graduellement à des objets qui s'élèvent en généralité expose en effet à des non-sens éventuels. Ainsi l'addition, la soustraction et la multiplication entre séries divergentes doit-elle conserver la mémoire des processus sommatoires qui ont été choisis pour leur donner un sens. C'est donc la première interprétation immédiate de cette citation de Gauss : nécessité de se conformer au sens interne ; nécessité de respecter les bornes définitionnelles ; sous peine d'incohérence.

Science et conscience coprésente. Mais au-delà, Gauss évoque sans la développer une pensée plus profonde qui nous est suggérée par le membre de phrase « j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles ». On sait combien il est délicat et malaisé de répondre à cet impératif de « conscientisation continue du sens », surtout lorsqu'il s'agit de calculs de type tensoriel qui sont assez longs ou considérables pour égarer l'intuition géométrique ou noyer l'esprit de synthèse, un peu comme si les « masses-pensées » chères à Riemann devaient se réserver à tout instant l'énergie de « se rendre présentes les totalités conceptuelles » ; toutefois, l'austérité ou la rigueur gaussienne (die GAUSSche Strenge) sont là pour nous rappeler les *impératifs catégoriques de la pensée mathématique*, similaires aux impératifs que Kant théorisa dans sa *Critique de la raison pratique*, c'est-à-dire des règles qui sont constituées par des principes scientifiques abstraits et qui sont désignées par des devoirs.

†† « Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugniss hinaus als Eigenthum betrachten. »

Impératifs catégoriques de la pensée mathématique

L'impératif catégorique de la morale kantienne. D'après Kant, l'impératif moral est un *impératif catégorique* : il commande absolument la poursuite d'une fin morale, en elle-même et pour elle-même, et il détermine la volonté en indiquant une loi objective de la raison : la *loi morale*, valable universellement pour tout être raisonnable en tant que tel. D'une portée inférieure, les *impératifs hypothétiques* ne se rapportent qu'à la nécessité pratique d'une action considérée comme *moyen* de parvenir à quelque chose, la *fin* visée incitant à recourir à la technique, à l'habileté, à la prudence, à la méthode et au pragmatisme. Quant à lui, l'impératif catégorique représente une action comme nécessaire pour elle-même, cette action n'étant subordonnée en tant que moyen à aucune fin déterminante étrangère à son principe. Il commande de se conformer aux actions qui sont bonnes en elles-mêmes, et par l'effet d'une nécessité inconditionnée et véritablement objective, il soumet la volonté à une *loi morale* interne et autonome que Kant énonce comme suit : « *Agis uniquement d'après la maxime qui fait que tu peux vouloir en même temps qu'elle devienne une loi universelle parmi les hommes* ». Est donc *immorale* toute action qui, si on la supposait perpétrée par tous les hommes universellement en même temps, conduirait à une perte dommageable d'équilibre de la communauté des hommes, à un chaos des mœurs, aux conflits, au crime, à la mort. L'impératif catégorique kantien énonce donc une règle absolue et universelle propre à déterminer l'action morale en toutes circonstances : il suffit de tester la moralité d'une action en s'imaginant les conséquences d'une universalisation pour se décider en conséquence. Ainsi, le catégorique domine et se ramifie dans l'hypothétique.

Impératifs catégoriques de la pensée mathématique. En mathématiques, l'impératif catégorique — si tant est qu'on puisse lui donner un sens tout analogue au sens kantien — doit nécessairement s'exprimer dans une pure abstraction immanente, parce que la matière même des mathématiques transcende les conditions biologiques ou neuronales de son exploration effective[18]. De plus les impératifs se démultiplient et se pluralisent pour se disposer en un tripôle fondamental abstrait qui n'influe pas aussi directement la volonté que dans le champ de la raison pratique.

□ D'abord l'exigence absolue de **cohérence** : non-contradiction, vigilance architecturale, et vérité des raisonnements.

[18] D'autres langages imprévisibles ou approches dont la teneur reste insoupçonnée se révèleront probablement plus adéquats pour le traitement et la compréhension de problèmes encore ouverts à ce jour : tel est le *credo* fondamental en l'être-disponible de la chose mathématique que partagent tous les mathématiciens.

☐ Ensuite, le devoir pérenne et indéfectible de **recherche** : indéfini potentiel, ouverture dynamique, et *in situ* de l'Inconnu.

☐ Enfin, l'admission de la **nouveauté** comme critère et règle de participation : absorption effective, progrès (im)perceptibles, et enrichissement croissant des arborescences.

Trois impératifs, donc, inscrits dans une relation triangulaire où les hiérarchies sont interchangeables et où les connexions sont cycliques. Au centre du cercle circonscrit, l'exigence gaussienne de présence permanente de la pensée conceptuelle comme conscience : liée à chacun des trois pôles, elle exerce sa capacité d'activation en mesurant sa force au champ opaque de l'ouverture.

☐ Vérification constante de rigueur.

☐ Maintien absolu des questions indécidées.

☐ Évaluation conceptuelle des apports.

Thèse sur le questionnement

Dans le régime assertorique du langage, questionner semble *à part*, plein de mystère, magique, réservé à une virtuosité enfantine virginale, en tout cas profondément lié aux facultés supérieures de la raison et de la pensée, ne serait-ce que parce que nous sommes toujours environnés de nombreuses questions vertigineuses propices aux angoisses métaphysiques, telles que par exemple :

— Qu'est-ce que ma mort ? — « Dieu » existe-t-il ? — Comment voyager jusqu'aux exoplanètes susceptibles d'héberger une vie extraterrestre ? — Y avait-il quelque chose avant le Big Bang ? — Où est l'infini ? — Comment la reproductibilité des végétaux s'est-elle construite à l'échelle géologique ? — Pourrons-nous un jour créer artificiellement des êtres vivants doués d'une autonomie biologique indéfinie ?

Mais en vérité, même dans la question la plus ouverte et la plus inaccessible, il y a souvent autant de platitude, d'ouverture vide et de béance naïve que dans les toutes petites interrogations de la vie courante auxquelles il est en général si facile de répondre : questionner, c'est facile, on peut répéter cet acte, et on prend goût à relancer de nouvelles questions lorsque les réponses se font trop attendre.

Thèse. *Les questions sont des actes minimaux de position d'ouverture, des quanta d'attente provisoire n'ayant aucun contenu prédéfini a priori. Presque toujours superflues en tant qu'artifices rhétoriques, elles sont intrinsèquement causées par la nécessité d'orienter le mouvement des êtres animés face au divers, au multiple et à l'indéfini.* Le questionnement remonte à la nuit des temps de la constitution biologique des êtres animés.

En mathématiques, une *théorie de la question* pourrait s'avérer essentiellement superflue pour des êtres percevant de manière globale filiations conceptuelles et totalités de relations algébriques. Mais pour nous, êtres terrestres, la théorie semble déjà trop difficile à embrasser et à écrire : il y a déjà trop de gesticulations questionnantes dans l'entendement et dans la raison.

Impossible codification des illustrations ?

C'est un fait singulier du développement historique de la géométrie, un trou béant et presque inexplicable dans la pratique mathématique : nulle mise au point n'a jamais été décidée en commun pour codifier rigoureusement l'insertion du diagrammatique dans le texte formel. Trop grande richesse des intuitions créatrices, trop grande variabilité des tracés, trop grande puissance d'appréciation esthétique du système visuel, ou trop grande pauvreté du croquis mathématique exécuté à la sauvette, ou même encore : volonté systématique de bannir toute illustration comme susceptible de détourner l'attention vigilante de la rigueur par une séduction intempestive de l'appareil perceptif, quelles qu'en soient les causes, rien ne s'est jamais présenté dans l'histoire des mathématiques, en tant que nécessité ressentie de manière purement interne, comme un devoir de codifier spécifiquement le géométral, au même titre et avec la même dignité que l'on a graduellement donné de l'ampleur à la méthode axiomatique comme le fit Bourbaki. Visiblement, la complexité objective de l'appropriation subjective des concepts n'est pas encore suffisamment comprise ou étudiée, tant sur le plan biologique que sur un plan purement spéculatif.

La cloche de Nietzsche

Il ne suffit pas que tu comprennes dans quelle ignorance vivent l'homme et l'animal ; il faut encore que tu aies la volonté d'ignorance et que tu en fasses l'apprentissage. Il est nécessaire pour toi que tu comprennes que sans ce genre d'ignorance la vie elle-même serait impossible, qu'elle est une condition nécessaire pour que le vivant se conserve et prospère : une grande, une solide cloche d'ignorance doit t'enclore de toutes parts.

Friedrich NIETZCHE, Fragments posthumes, Été-automne 1884, 26 [294], Paris, Gallimard, vol. X, 1982, p. 254.

Écrire l'ignorance

Question : Quels principes directeurs élaborer afin d'expliciter l'ignorance de manière structurale dans les architectures de la connaissance mathématique ?

Dans un premier moment, le savoir abstrait certain de lui-même concentre son attention sur le déploiement contentuel du spéculatif. Confiance purement non dubitative s'exerce à l'égard à ce qui est promis, présenté, dispensé, procuré, attribué, offert et réoffert. L'avant, l'après, et le présent permanent du discours temporalisent régulièrement le jeu irréversible de la délivrance des connaissances. Seuls arbitres de la circulation dans l'étant, de très neutres métronomes communs cadencent toutes les mobilisations de l'entendement.

À ce premier niveau, l'ignorance ne se manifeste alors que comme privation provisoire, toujours corrigée par de nouveaux contenus généreusement et continuellement distribués. Inutile de signaler le **non-connu** comme un **in-connu**, car ce qui n'est pas dit est en fait déjà su ailleurs et n'attend que d'être prononcé. L'ignorance se désiste en n'insistant pas. Elle n'a nul besoin de se dire, et encore moins de s'écrire. Le règne absolu de la connaissance effective ne l'utilise qu'en tant qu'artifice rhétorique transitoire.

Mais dans un moment ultérieur, le champ expansif de l'ignorance se manifestera comme quelque chose à quoi aucune réponse préparée à l'avance ne saurait pourvoir. Ce sera la propagation d'un vide conceptuel isotropique dans des **commencements absolus locaux renouvelables**. À tout le moins, une exigence de pure « *in-a-prioricité* sera imposée par un contrat rigoureux avec l'inconnu qui résiste. — Les rappels à l'ordre ? Toute activité rationnelle se fait capturer au futur.

L'algèbre immanente nous est inaccessible

Nonobstant tout ce que le jeu dominant du *conceptuel a posteriori* aime à faire accroire, les mathématiques *sont dans leur essence même* du calcul pur. La dynamique d'égalisation n'est qu'une simple arme humaine de mobilité dans l'immobilité symbolique. Mais l'algèbre quant à elle, non locale, non temporelle et non sérielle synthétise toutes les relations possibles immanentes dans son internalité immobile inaccessible. Prenons donc l'altérisation dynamique du concept d'égalité comme le signe de notre incapacité à voir vraiment le :

$$A = A$$

absolu de l'Algèbre.

Département de Mathématiques et Applications, UMR 8553 du CNRS, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France.
Internet : `www.dma.ens.fr/~merker/`
E-mail address: `merker@dma.ens.fr`