Algèbre d'un groupe fini G et représentations irréductibles de G

Joël RIOU

7 février 2000

On supposera que G est un groupe fini et que k est un corps commutatif, dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G.

1 Généralités

Définition 1 (Algèbre de G) *$k[G]$ est un espace vectoriel de base $\{e_g, g \in G\}$ muni d'une structure de k-algèbre par l'action suivante $e_g e_h = e_{gh}$. (On identifiera souvent $e_g \in k[G]$ et $g \in G$.)*

Définition 2 (Représentations d'un groupe) *Une représentation d'un groupe G est un couple (V, ρ_V), avec V un k-espace vectoriel, et ρ_V un morphisme de groupe de G dans $GL(V)$.*

De façon équivalente, on peut définir une représentation du groupe G comme la donnée d'un $k[G]$-module V, ou encore d'un morphisme ρ de k-algèbres de $k[G]$ vers $End_k(V)$. (On appelle cela aussi un G-module.)

Définition 3 (Morphismes) *Un morphisme de représentations de G est un morphisme de $k[G]$-modules. Si V et W sont deux représentations de G, on note $Hom_G(V, W)$ l'ensemble des morphismes de G-modules de V vers W.*

Définition 4 (Représentations irréductibles) *Un G-module $V \neq \{0\}$ est irréductible si et seulement si ses seuls sous-G-modules sont $\{0\}$ et V.*

On note $\hat{G}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G (à isomorphisme de G-modules près).

Lemme 1 (Schur) *Si V et W sont deux représentations irréductibles de G, alors pour tout $f \in Hom_G(V, W)$, $f = 0$ ou f est un isomorphisme.*

En particulier, si V est une représentation irréductible, $End_G(V)$ est un corps.

Si k est algébriquement clos, $End_G(V)$ coïncide avec les homothéties de V.

Lemme 2 *Si V est un G-module et W un sous-module de V (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel G-invariant), alors W admet un supplémentaire G-invariant.*

Preuve. Si $p \in \mathrm{End}_k(V)$ est un projecteur d'image W, alors $q = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \circ p \circ \rho_{g^{-1}} \in \mathrm{End}_G(V)$ est un projecteur d'image W. Le noyau de q est alors un supplémentaire G-invariant de W. □

Lemme 3 *Les représentations irréductibles d'un groupe fini sont de dimension finie sur k.*

Théorème 1 *Toute représentation de dimension finie est somme directe de représentations irréductibles, et les représentations irréductibles (avec leurs multiplicités) qui interviennent dans cette décomposition sont uniques (à isomorphisme près).*

Preuve. L'existence provient du lemme précédent. Pour l'unicité, il suffit de voir que si $V = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} {V_\rho}^{n_\rho}$, par le lemme de Schur, on a pour tout $\rho \in \hat{G}$, $\dim_k \mathrm{Hom}_G(V, V_\rho) = n_\rho \dim_k \mathrm{End}_G(V_\rho)$. □

Définition 5 *Étant donné un G-module V, on peut définir une représentation $End_k(V)$ par*

$$\forall g \in G \qquad \forall f \in End_k(V) \qquad g.f = \rho_g \circ f$$

$$\forall a \in k[G] \qquad \forall f \in End_k(V) \qquad \forall x \in V \qquad a.f(x) = a.(f(x))$$

2 Théorème d'isomorphisme

On suppose que k est algébriquement clos.

Théorème 2 *L'unique morphisme Φ de G-modules et de k-algèbres entre $k[G]$ et $\prod_{\rho\in\hat{G}} End_k(V_\rho)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Le morphisme Φ est nécessairement défini par :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} k[G] & \longrightarrow & \prod_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{End}_k(V_\rho) \\ a & \longmapsto & (\rho(a))_{a\in\hat{G}} \end{array} \right.$$

Injectivité Soit $a \in k[G]$ qui annule toutes les représentations irréductibles de G. D'après le théorème de décomposition en sommes d'irréductibles, a annule la représentation régulière $k[G]$, donc $a.e = a = 0$. $\ker\Phi = \{0\}$

Finitude On peut commencer par étudier, pour tout $\rho \in \hat{G}$, la multiplicité de V_ρ dans $k[G]$. Pour cela, il suffit de remarquer l'isomorphisme de k-espaces vectoriels suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_G(k[G], V_\rho) & \longrightarrow & V_\rho \\ f & \longmapsto & f(e) \end{array} \right.$$

On en déduit que V_ρ apparaît dans $k[G]$ avec une multiplicité égale à $\dim_k V_\rho$. Il s'ensuit que $\hat{G}$ est fini. Ainsi, le produit $\prod_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{End}_k(V_\rho)$ s'identifie à une somme directe $\bigoplus_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{End}_k(V_\rho)$.

Surjectivité Φ est un morphisme injectif de k-espaces vectoriels entre deux espaces dont la dimension est $\sum_{\rho\in\hat{G}} (\dim_k V_\rho)^2$.

Φ est donc un isomorphisme. □

3 Conséquences

Corollaire 1 *$\hat{G}$ est fini.*

Corollaire 2

$$|G| = \sum_{\rho\in\hat{G}} (\dim_k V_\rho)^2$$

Preuve. Il suffit de considérer la dimension de $k[G]$ et de $\prod_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{End}_k(V_\rho)$. □

Corollaire 3

$$\left|\hat{G}\right| = \#\textit{classes de conjugaisons}$$

Preuve. Il suffit de considérer la dimension des centres des algèbres $k[G]$ et de $\prod_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{End}_k(V_\rho)$. A chaque classe de conjugaison C de G, on peut associer un élément de l'algèbre du groupe $a_C = \sum_{g\in C} e_g$. L'ensemble des a_C lorsque C décrit toutes les classes de conjugaison de G constitue une base du centre de $k[G]$. □

Références

[1] William Fulton, Joe Harris. *Representation theory : a first course.* Springer, 1991. (Graduate Texts in Mathematics)