L'APPLICATION EXPONENTIELLE POUR LES GROUPES p-DIVISIBLES CONNEXES

par

Joël Riou

Résumé. — On se propose de décrire l'application exponentielle associée à un groupe p-divisible connexe $\mathscr{G}$ sur l'anneau des entiers d'un corps local p-adique K. D'après Bloch et Kato, on peut définir différents sous-groupes du premier groupe de cohomologie galoisienne de K à valeurs dans le module de Tate p-adique de $\mathscr{G}$ et ce grâce aux anneaux de périodes de Fontaine. Pour préciser cela, on rappellera quelques résultats sur l'exponentielle classique pour les groupes de Lie formels p-divisibles et quelques théorèmes de Tate qui sont à la base des constructions de Bloch et Kato. On évoquera aussi brièvement quelques théorèmes portant sur la cohomologie galoisienne de K : théorèmes de finitude, théorèmes de dualité, calculs de caractéristiques d'Euler. Ces résultats permettront de déterminer le comportement vis-à-vis de la dualité de certains sous-groupes des groupes de cohomologie que nous définirons.

Table des matières

1. Dualité locale 2
   1.1. Rappels sur la cohomologie galoisienne d'un corps local 2
   1.2. Représentations de de Rham 5
   1.3. Sous-groupes du $\mathbf{H}^1$ d'un corps local 7
2. L'application exponentielle 9
   2.1. Rappels sur les groupes de Barsotti-Tate 9
   2.2. Le logarithme classique 10
   2.3. L'exponentielle de Bloch-Kato 12
Bibliographie 14

Soit p un nombre premier et K un corps local p-adique d'anneau d'entiers $\mathscr{O}_K$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, ce qui permet de définir le groupe de Galois absolu G_K de K et le complété $\mathbb{C}_p$ de $\overline{K}$ dont on note $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ l'anneau des entiers.

1. Dualité locale

1.1. Rappels sur la cohomologie galoisienne d'un corps local. — Si V est une représentation continue de G_K dans un groupe abélien topologique, on note $\mathbf{H}^n(K,V)$ le n-ième groupe de cohomologie galoisienne continue de K à valeurs dans V, définie *via* les cochaînes continues usuelles. Si V est discret, cette définition coïncide avec la cohomologie galoisienne classique *i.e.* la cohomologie étale.

1.1.1. Théorèmes de finitude. —

Théorème 1.1. — *Soit A un G_K-module discret fini. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{H}^n(K,A)$ est un groupe fini et $\mathbf{H}^n(K,A) = 0$ si $n \geq 3$.*

Démonstration. — On admet le résultat concernant la ℓ-dimension cohomologique de K pour tout nombre premier ℓ, ce qui s'obtient en combinant le fait que la ℓ-dimension cohomologique du corps résiduel de K est 1 et qu'il en va de même de l'extension maximale non ramifiée de K (ce qui utilise le fait que ce corps soit $(C1)$).

Quitte à faire une extension finie galoisienne de K, en utilisant une suite spectrale de Hochschild-Serre, on peut supposer que $V = \mu_n$. On utilise alors la suite exacte $0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \to 0$, et on constate alors que les groupes de cohomologie sont finis, puisque $\mathrm{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et que $K^\times \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini. □

Corollaire 1.2. — *Soit ℓ un nombre premier. Si T est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini muni d'une action continue de G_K, alors les $\mathbb{Z}_\ell$-modules $\mathbf{H}^n(K,T)$ sont de type fini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et nuls pour $n \geq 3$.*

Démonstration. — Grâce au théorème de finitude précédent, on peut montrer que l'on a un isomorphisme canonique pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{H}^n(K,T) = \lim_{\nu \in \mathbb{N}} \mathbf{H}^n(K, T/\ell^\nu)$$

et par conséquent que $\mathbf{H}^n(K,T)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module profini. De plus, par une formule des « coefficients universels », on montre que $\mathbf{H}^n(K,T) \underset{\mathbb{Z}_\ell}{\otimes} \mathbb{Z}/\ell$ est un groupe fini. On utilise ensuite le lemme facile disant qu'un $\mathbb{Z}_\ell$-module profini M tel que $M/\ell M$ soit fini est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini. □

Corollaire 1.3. — *Soit ℓ un nombre premier. Si V est un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de G_K, alors les $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels $\mathbf{H}^n(K,V)$ sont de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et nuls pour $n \geq 3$.*

Démonstration. — On vérifie aussitôt que V contient un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini T stable par G_K et que l'on a $\mathbf{H}^n(K,V) = \mathbf{H}^n(K,T) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. □

1.1.2. Théorèmes de dualité. —

Définition 1.4. — Si A est un G_K-module fini, on note A^* son dual de Pontrjagin, c'est-à-dire $\mathbf{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, et $A(1)$ son twist de Tate $A \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$, le produit tensoriel étant pris sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ désignant la réunion des μ_n dans $\mathbb{G}_m$ pour tout $n \geq 1$. Si ℓ est un nombre premier, on note $\mathbb{Z}_\ell(1)$ la limite projective des μ_{ℓ^ν} les morphismes de transition étant induits par l'élévation à la puissance ℓ. De même, on note $\mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$. Si V est un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel, on note $V^\vee = \mathbf{Hom}(V, \mathbb{Q}_\ell)$ son dual ordinaire.

Théorème 1.5 **(Tate, [Serre1**, Théorème 2, paragraphe II.5.2, page 101])

Soit A un G_K-module discret fini. Le $\cup$-produit définit une dualité parfaite (au sens de Pontrjagin) entre groupes finis, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{H}^n(K, A) \times \mathbf{H}^{2-n}(K, A^*(1)) \to \mathbf{H}^2(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Corollaire 1.6. — *Soit ℓ un nombre premier. Soit T un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini muni d'une action continue de G_K. Le $\cup$-produit définit une dualité parfaite (au sens de Pontrjagin) pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbf{H}^n(K, T) \times \mathbf{H}^{2-n}(K, \mathbf{Hom}(T, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))) \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$$

Démonstration. — Il suffit de faire passer à la limite le théorème de dualité précédent. □

Corollaire 1.7. — *Soit ℓ un nombre premier. Soit T un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini muni d'une action continue de G_K. Le $\cup$-produit définit une dualité parfaite dans la catégorie dérivée bornée des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini :*

$$\mathsf{R}\Gamma(K, T) \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathsf{R}\Gamma(K, \mathsf{R}\,\mathbf{Hom}(T, \mathbb{Z}_\ell(1))) \to \mathbb{Z}_\ell[-2]$$

Démonstration. — On a un morphisme canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(K, T) \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathsf{R}\Gamma(K, \mathsf{R}\,\mathbf{Hom}(T, \mathbb{Z}_\ell(1))) \to \mathsf{R}\Gamma(K, \mathbb{Z}_\ell(1))$$

que l'on peut composer avec $\mathsf{R}\Gamma(K, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to \tau^{\geq 2}\mathsf{R}\Gamma(K, \mathbb{Z}_\ell(1))$. Grâce à l'isomorphisme canonique $\tau^{\geq 2}\mathsf{R}\Gamma(K, \mathbb{Z}_\ell(1)) = \mathbb{Z}_\ell[-2]$, on obtient le morphisme voulu.

Pour vérifier que ce morphisme est une dualité parfaite dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini, il suffit de vérifier que l'on obtient une dualité parfaite dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Z}/\ell$-vectoriels de dimension finie après application de $- \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell$, et dans ce cas, grâce notamment à une formule des coefficients universels, cela se ramène au théorème 1.5. □

Corollaire 1.8. — *Soit ℓ un nombre premier. Soit V un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de G_K. Le $\cup$-produit définit une dualité parfaite de $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbf{H}^n(K, V) \times \mathbf{H}^{2-n}(K, V^\vee(1)) \to \mathbb{Q}_\ell$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à un réseau de V stable par G_K. □

1.1.3. Caractéristiques d'Euler-Poincaré. — Soit ℓ un nombre premier. Soit A un anneau parmi $\{\mathbb{Z}/\ell, \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell\}$, on note $\mathsf{G}(A)$ (resp. $\mathsf{G}(A[G_K])$) le groupe de Grothendieck de la catégorie dérivée bornée des A-modules de type fini (resp. de celle des A-modules de type fini munis d'une action continue de G_K). Le but de cette partie est de décrire le morphisme

$$\mathbf{R}\Gamma(K, -)\colon \mathsf{G}(A[G_K]) \to \mathsf{G}(A).$$

Avant cela, nous allons rappeler un théorème de Tate concernant les G_K-modules finis.

***Théorème 1.9* (Tate, [Serre1, Théorème 5, paragraphe II.5.7, page 109])**
Soit A un G_K-module discret fini. Dans le groupe de Grothendieck des groupes abéliens finis, identifié à $\mathbb{Q}_+^\times$, on a l'égalité

$$[\mathbf{R}\Gamma(K, A)] = p^{-[K\colon \mathbb{Q}_p]v_p(\#A)}$$

Démonstration. — On peut clairement supposer que A est tué par une puissance de ℓ où ℓ est un nombre premier. On se contente de donner un argument pour $\ell \neq p$, le cas $\ell = p$ étant nettement plus difficile. On suppose donc que A est d'ordre premier à p.

Notons U le groupe de Galois absolu de la plus grande extension non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$. On a une suite exacte de groupes profinis $1 \to U \to G_K \to \widehat{\mathbb{Z}} \to 1$ à laquelle on peut appliquer la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathbf{H}^i(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbf{H}^j(U, A)) \Rightarrow \mathbf{H}^{i+j}(K, A)$$

On rappelle que si M est un $\widehat{\mathbb{Z}}$-module discret fini, alors $\mathbf{R}\Gamma(\widehat{\mathbb{Z}}, M)$ est représenté par le complexe $M \overset{F-1}{\to} M$ où F est le générateur topologique canonique de $\widehat{\mathbb{Z}}$ et où M est placé en degrés 0 et 1. Par conséquent, la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathbf{R}\Gamma(\widehat{\mathbb{Z}}, M)$ est nulle dans le groupe de Grothendieck des groupes abéliens finis.

Admettons provisoirement que les groupes $\mathbf{H}^j(U, A)$ soient finis pour tout $j \in \mathbb{N}$ et nuls pour $j \geq 2$. D'après les remarques précédentes sur la cohomologie de $\widehat{\mathbb{Z}}$, on obtient que le terme E_2 de la suite spectrale est formée de groupes finis et que seul un nombre fini de cases contient un groupe non nul. Par ailleurs, la caractéristique d'Euler de chacune des lignes est nulle, ce qui permet de conclure que la classe de $\mathbf{R}\Gamma(K, A)$ est nulle dans le groupe de Grothendieck des groupes abéliens finis.

Pour établir la propriété de finitude annoncée pour le groupe d'inertie U, il s'agit d'utiliser la filtration de ramification. On note U_1 le sous-groupe distingué fermé de G_K formé des éléments agissant trivialement sur $\mathscr{O}_K/\mathfrak{m}^2$, $\mathscr{O}_K$ désignant l'anneau des entiers de K et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On rappelle que U_1 est un pro-p-groupe et que U/U_1 est isomorphe (non canoniquement) à $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$. Comme A est d'ordre premier à p, on a un isomorphisme canonique $\mathbf{H}^j(U, A) = \mathbf{H}^j(U/U_1, \mathbf{H}^0(U_1, A))$, et ces groupes sont clairement finis et nuls pour $j \geq 2$. □

Corollaire 1.10. — *Soit ℓ un nombre premier. Pour tout $A \in \{\mathbb{Z}/\ell, \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell\}$, le morphisme $\mathbf{R}\Gamma(K, -)\colon \mathsf{G}(A[G_K]) \to \mathsf{G}(A) = \mathbb{Z}$ se factorise par le morphisme d'oubli de l'action de G_K $\mathsf{G}(A[G_K]) \to \mathsf{G}(A)$ et le morphisme induit $\mathsf{G}(A) \to \mathsf{G}(A)$ est nul si $\ell \neq p$ et est la multiplication par $-[E\colon \mathbb{Q}_p]$ si $\ell = p$.*

Démonstration. — Pour $A = \mathbb{Z}/\ell$, c'est une reformulation du théorème de Tate. On a par ailleurs un diagramme commutatif grâce à la formule des coefficients universels et aux théorèmes de finitudes concernant la cohomologie galoisienne de K :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{G}(\mathbb{Q}_\ell[G_K] \arrow[d, "\mathbf{R}\Gamma(K,-)"] & \mathsf{G}(\mathbb{Z}_\ell[G_K]) \arrow[l, "-\otimes\mathbb{Q}_\ell"'] \arrow[r, "-\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\mathbb{Z}/\ell"] \arrow[d, "\mathbf{R}\Gamma(K,-)"] & \mathsf{G}(\mathbb{Z}/\ell[G_K]) \arrow[d, "\mathbf{R}\Gamma(K,-)"] \\
\mathsf{G}(\mathbb{Q}_\ell) & \mathsf{G}(\mathbb{Z}_\ell) \arrow[l, "-\otimes\mathbb{Q}_\ell"] \arrow[r, "-\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\mathbb{Z}/\ell"'] & \mathsf{G}(\mathbb{Z}/\ell)
\end{tikzcd}$$

On obtient le cas de $\mathbb{Z}_\ell$ à partir du cas de $\mathbb{Z}/\ell$ grâce à la commutativité du carré de droite et le cas de $\mathbb{Q}_\ell$ à partir du cas de $\mathbb{Z}_\ell$ en utilisant la commutativité du carré de gauche et la surjectivité de $\mathsf{G}(\mathbb{Z}_l[G_K]) \to \mathsf{G}(\mathbb{Q}_l[G_K])$. □

1.2. Représentations de de Rham. — On suppose le lecteur familier avec les anneaux de périodes B_{dR} et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ de Fontaine (cf. [**BK**, paragraphe 1]).

Définition 1.11. — Soit V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $\rho\colon G_K \to \mathbf{GL}(V)$ un morphisme continu ; on dit que V est une représentation p-adique de G_K. On dit qu'une représentation p-adique V de G_K est de de Rham si $\dim_K(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, sachant qu'on a toujours l'inégalité $\dim_K(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

On rappelle que B_{dR} est un corps de valuation discrète complet dont le corps résiduel est $\mathbb{C}_p$ et dont on a fixé une uniformisante t et que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$.

***Proposition 1.12* (Fontaine).** — *La catégorie des représentations de de Rham est stable par sommes directes finies, facteurs directs, produits tensoriels, dualité, homomorphismes internes.*

Démonstration. — La stabilité par sommes directes finies et facteurs directs est évidente. La stabilité par produit tensoriel est facile. Comme on est en caractéristique 0, les puissances extérieures sont des facteurs directs des puissances tensorielles. Ainsi, si V est une représentation de de Rham de dimension d, alors $\Lambda^{d-1}V$ est de de Rham. Or, on a un isomorphisme canonique $\Lambda^{d-1}V \otimes \det^{-1}V \xrightarrow{\sim} V^\vee$. Ainsi, pour montrer la stabilité par dualité, on peut se ramener au cas des représentations de dimension 1, mais dans ce cas, être de de Rham équivaut à être isomorphe, après extension des scalaires à $\mathbb{C}_p$, à $\mathbb{C}_p(i)$ pour un certain $i \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat. La stabilité par homomorphismes internes en résulte. □

Définition 1.13. — On note $\mathbf{DR}(V) = \mathbf{H}^0(K, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$; c'est un K-vectoriel de dimension finie. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{F}il^i\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ le sous G_K-module de B_{dR} formé des éléments de valuation $\geq i$. On peut alors définir une filtration décroissante de $\mathbf{DR}(V)$ par des sous-K-vectoriels, pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}il^i\mathbf{DR}(V) = \mathbf{H}^0(K, (\mathcal{F}il^i\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

On note $\mathbf{Cris}(V) = \mathbf{H}^0(K, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$; c'est un K_0-vectoriel de dimension finie où K_0 est le plus grand sous-corps non ramifié de K. On dit que V est cristalline si $\dim_{K_0} \mathbf{Cris}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

La proposition suivante sera utilisée implicitement dans la suite.

Proposition 1.14. — *Soit V une représentation de de Rham. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq j \leq \infty$, l'application évidente $\mathcal{F}il^{i-j}\mathbf{DR}(V)/\mathcal{F}il^i\mathbf{DR}(V) \to \mathbf{H}^0(K, (\mathcal{F}il^{i-j}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathcal{F}il^i\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Cela résulte simplement d'un calcul de dimensions utilisant le fait que

$$\mathcal{F}il^i\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathcal{F}il^{i+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \simeq \mathbb{C}_p(i)$$

et que V est de de Rham. □

***Proposition 1.15* (Suites exactes fondamentales)**. — *Les deux suites de G_K-modules continus qui suivent sont exactes*[1] *:*

$$0 \to \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\alpha} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{f=1} \oplus \mathcal{F}il^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\beta} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \to 0$$

où $\alpha(x) = (x, x)$ et $\beta(x, y) = x - y$;

$$0 \to \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\alpha} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathcal{F}il^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\beta} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \to 0$$

où $\alpha(x) = (x, x)$ et $\beta(x, y) = (x - f(x), x - y)$.

Définition 1.16. — Soit V une représentation de de Rham. On pose :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^1_e(K, V) &= \ker(\mathbf{H}^1(K, V) \to \mathbf{H}^1(K, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{f=1} \otimes V)) \\ \mathbf{H}^1_f(K, V) &= \ker(\mathbf{H}^1(K, V) \to \mathbf{H}^1(K, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)) \\ \mathbf{H}^1_g(K, V) &= \ker(\mathbf{H}^1(K, V) \to \mathbf{H}^1(K, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)) \end{cases}$$

Corollaire 1.17. — *Soit V une représentation de de Rham. Alors, on a un diagramme commutatif, les lignes étant exactes :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{H}^0(K,V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{Cris}(V)^{f=1} \oplus \mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{DR}(V) \arrow[r] \arrow[d, hook, "{(0,\mathrm{Id})}"] & \mathbf{H}^1_e(K,V) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{H}^0(K,V) \arrow[r] & \mathbf{Cris}(V) \oplus \mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V) \arrow[r] & \mathbf{Cris}(V) \oplus \mathbf{DR}(V) \arrow[r] & \mathbf{H}^1_f(K,V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De plus, $\mathbf{H}^1_f(K, V)/\mathbf{H}^1_e(K, V) \simeq \mathbf{Cris}(V)_{f=1}$

[1]Pour les besoins de l'algèbre homologique, on dira qu'une suite de G_K-modules topologiques $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$ est exacte si u est le noyau de v et que v admet une section continue (*a priori* ni équivariante ni linéaire).

1.3. Sous-groupes du $\mathbf{H}^1$ d'un corps local. —

Définition 1.18. — Soit ℓ un nombre premier et V un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de G_K. Si $\ell \neq p$, on note $\mathbf{H}^1_e(K,V) = 0$, $\mathbf{H}^1_f(K,V) = \ker(\mathbf{H}^1(K,V) \to \mathbf{H}^1(K_{nr},V))$, $\mathbf{H}^1_g(K,V) = \mathbf{H}^1(K,V)$ où K_{nr} désigne la plus grande extension non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$.

Proposition 1.19 ([**BK**, Proposition 3.8, page 354]). — *Soit ℓ un nombre premier et V un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de G_K. Si $\ell = p$, on suppose que V est une représentation de de Rham. Alors, dans la dualité parfaite*

$$\mathbf{H}^1(K,V) \times \mathbf{H}^1(K,V^\vee(1)) \to \mathbb{Q}_\ell$$

chacun des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels $\mathbf{H}^1_a(K,V)$ et $\mathbf{H}^1_b(K,V^\vee(1))$ est l'orthogonal de l'autre pour (a,b) dans $\{(e,g),(f,f),(g,e)\}$.

Définition 1.20. — Soit ℓ un nombre premier. Si T est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini muni d'une action continue de G_K, on pose $V = T \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ et on note $\mathbf{H}^1_\star(K,T)$ l'image inverse de $\mathbf{H}^1_\star(K,V)$ dans $\mathbf{H}^1(K,T)$ *via* le morphisme canonique $\mathbf{H}^1(K,T) \to \mathbf{H}^1(K,V)$ pour $\star \in \{e,f,g\}$. De plus, si T est *libre* sur $\mathbb{Z}_\ell$, on note $\mathbf{H}^1_\star(K,T\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = \mathbf{H}^1_\star(K,T)\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ dont on vérifie qu'il s'agit d'un groupe s'identifiant à un sous-groupe de $\mathbf{H}^1(K,T\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$.

Signalons le corollaire suivant à la proposition 1.19, qui se démontre en examinant de près la situation et les définitions.

Corollaire 1.21. — *Soit ℓ un nombre premier et T un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de type fini muni d'une action continue de G_K. Alors, dans la dualité parfaite*

$$\mathbf{H}^1(K,T) \times \mathbf{H}^1(K,\mathbf{Hom}(T,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))) \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$$

chacun des groupes $\mathbf{H}^1_a(K,T)$ et $\mathbf{H}^1_b(K,\mathbf{Hom}(T,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)))$ est l'orthogonal de l'autre pour (a,b) dans $\{(e,g),(f,f),(g,e)\}$.

Démonstration de la proposition 1.19. — Il s'agit de montrer que les deux espaces considérés sont annulés *via* le $\cup$-produit et que la somme de leurs dimensions est égale à celle de $\mathbf{H}^1(K,V)$.

Commençons par le cas $\ell \neq p$. Pour toute représentation ℓ-adique V de G_K, on a une suite spectrale E_2-dégénérée de $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels de dimension finie :

$$\mathrm{E}_2^{pq} = \mathbf{H}^p(\widehat{\mathbb{Z}},\mathbf{H}^q(U,V)) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(K,V)$$

où U désigne le groupe d'inertie. On obtient ainsi une suite exacte courte :

$$0 \to \mathbf{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}},V^U) \overset{\mathrm{Inf}}{\to} \mathbf{H}^1(K,V) \overset{\mathrm{Res}}{\to} \mathbf{H}^1(K_{nr},V)^{\widehat{\mathbb{Z}}} \to 0$$

Par conséquent, $\mathbf{H}^1_f(K,V) = \mathbf{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}},V^U)$. On en déduit que le $\cup$-produit

$$\mathbf{H}^1_f(K,V) \times \mathbf{H}^1_f(K,V^\vee(1)) \to \mathbb{Q}_\ell$$

est le morphisme nul puisqu'il se factorise par $\mathbf{H}^2(\widehat{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}_\ell(1))$ grâce à la compatibilité des morphismes d'inflation au $\cup$-produit. Il reste à montrer que

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}},V^U)+\dim_{\mathbb{Q}_\ell}\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}},(V^\vee(1))^U)=\dim_{\mathbb{Q}_\ell}\mathbf{H}^1(K,V)$$

Comme pour tout $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de dimension finie M avec action continue de $\widehat{\mathbb{Z}}$, on a $\dim\mathbf{H}^0(\widehat{\mathbb{Z}},M)=\dim\mathbf{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}},M)$, le résultat découle du fait que

$$\dim\mathbf{H}^0(K,V)-\dim\mathbf{H}^1(K,V)+\dim\mathbf{H}^2(K,V)=0$$

(car $\ell\neq p$) compte tenu du théorème de dualité qui implique l'égalité $\dim\mathbf{H}^2(K,V)=\dim\mathbf{H}^0(K,V^\vee(1))$.

On suppose maintenant que $\ell=p$ et que V (et donc $V^\vee(1)$) est de de Rham. On traite seulement le cas $(a,b)=(f,f)$. On se donne un élément $\alpha\in\mathbf{H}^1(K,V)$ et on considère le diagramme commutatif suivant dont les flèches (1) et (2) sont données par le $\cup$-produit avec α et les flèches horizontales par les morphismes de connexions obtenus en appliquant la suite exacte longue de cohomologie galoisienne aux suites exactes obtenues en tensorisant avec $V^\vee(1)$ et $V\otimes V^\vee(1)$ la deuxième suite exacte fondamentale :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cris}(V^\vee(1))\oplus\mathbf{DR}(V^\vee(1)) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(1)"] & \mathbf{H}^1_f(K,V^\vee(1)) \arrow[d, "(2)"] \\
\mathbf{H}^1(K,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes V\otimes V^\vee(1))\oplus\mathbf{H}^1(K,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V\otimes V^\vee(1)) \arrow[r] & \mathbf{H}^2(K,V\otimes V^\vee(1)) \arrow[d] \\
 & \mathbb{Q}_p
\end{tikzcd}$$

Puisque $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et B_{dR} sont des anneaux et que $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est contenu dans B_{dR}, le morphisme (1) est uniquement déterminé par l'image de α dans $\mathbf{H}^1(K,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes V)$, ce qui montre bien que $\mathbf{H}^1_f(K,V)$ et $\mathbf{H}^1_f(K,V^\vee(1))$ sont orthogonaux.

Il reste à montrer que $\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{H}^1_f(K,V)+\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{H}^1_f(K,V^\vee(1))=\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{H}^1(K,V)$. En combinant le corollaire 1.17 et le théorème de dualité, on obtient que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{H}^1_f(K,V)+\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{H}^1_f(K,V^\vee(1)) &= \dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{H}^0(K,V)+\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{H}^2(K,V)\\ &+ \dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{DR}(V)/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V)\\ &+ \dim_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{DR}(V^\vee(1))/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V^\vee(1))\end{aligned}$$

D'après le théorème de Tate sur la caractéristique d'Euler, il reste à montrer que

$$\dim_K\mathbf{DR}(V)/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V)+\dim_K\mathbf{DR}(V^\vee(1))/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V^\vee(1))=\dim_{\mathbb{Q}_p}V$$

ce qui résulte simplement du fait que V soit une représentation de de Rham. □

Remarque 1.22. — Soit ℓ un nombre premier et V un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de G_K. On sait que $\mathbf{H}^1(K,V)$ paramétrise les classes d'isomorphisme d'extensions $[1\to V\to E\to\mathbb{Q}_\ell\to 1]$. On voit aussitôt que si $l\neq p$ et que V est non ramifiée, alors $\mathbf{H}^1_f(K,V)$ paramétrise les classes d'extensions telles que E soit aussi non ramifiée. De manière moins évidente, si $l=p$ et que V est cristalline (resp. de de

Rham), alors $\mathbf{H}^1_f(K,V)$ (resp. $\mathbf{H}^1_g(K,V)$) paramétrise les classes d'extensions telles que E soit cristalline (resp. de de Rham).

2. L'application exponentielle

2.1. Rappels sur les groupes de Barsotti-Tate. —

Définition 2.1. — Un groupe de Barsotti-Tate (ou groupe p-divisible) $\mathscr{G}$ de hauteur $h \in \mathbb{N}$ sur un anneau R est la donnée d'un système inductif de R-schémas en groupes de présentation finie, commutatifs finis et plats $(\mathscr{G}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $\mathscr{G}_\nu$ soit d'ordre $p^{\nu h}$ et que le morphisme $\mathscr{G}_\nu \to \mathscr{G}_{\nu+1}$ identifie $\mathscr{G}_\nu$ au noyau de la multiplication par p^ν dans $\mathscr{G}_{\nu+1}$.

Définition 2.2. — Soit $\mathscr{G}$ un groupe p-divisible sur $\mathscr{O}_K$. On définit le groupe des points de $\mathscr{G}$ à valeurs dans $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ par la formule suivante :

$$\mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) = \lim_i \operatorname*{colim}_\nu \mathscr{G}_\nu(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{m}^i\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$$

où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathscr{O}_K$. De même, on pose $\mathscr{G}(\mathscr{O}_K) = \lim_i \operatorname*{colim}_\nu \mathscr{G}_\nu(\mathscr{O}_K/\mathfrak{m}^i)$.

Remarque 2.3. — Si X est un schéma fini sur $\mathscr{O}_K$, alors X est connexe si et seulement si la fibre spéciale de X est connexe. En effet, notons $\mathscr{A}$ l'algèbre de X, qui est séparée et complète pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. La notion de connexité étant topologique, on voit que se donner un idempotent de $\mathscr{A}/\mathfrak{m}\mathscr{A}$ équivaut à se donner un idempotent de $\mathscr{A}/\mathfrak{m}^n\mathscr{A}$ pour tout $n \geq 1$ (quelle que soit la manière de comprendre cette assertion). Ainsi, les idempotents de $\mathscr{A}$ sont en bijection avec les idempotents de $\mathscr{A}/\mathfrak{m}\mathscr{A}$ de sorte que le nombre de composantes connexes de X est le même que le nombre de composantes connexes de sa fibre spéciale.

Remarque 2.4. — Si $\mathscr{G}$ est un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathscr{O}_K$, on a une suite exacte courte canonique :

$$0 \to \mathscr{G}^0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{\text{ét}} \to 0$$

où $\mathscr{G}^0$ est un groupe p-divisible connexe (i.e. tous les $\mathscr{G}^0_\nu$ sont connexes) et où $\mathscr{G}^{\text{ét}}$ est un groupe p-divisible étale (i.e. les $\mathscr{G}^{\text{ét}}_\nu$ sont étales).

Définition 2.5. — Soit $\mathscr{G}$ un groupe p-divisible sur un anneau R. On note $\mathscr{G}'$ le groupe p-divisible sur R dual de Cartier[(2)] de $\mathscr{G}$. Plus précisément, $\mathscr{G}'_\nu$ est le dual de Cartier de $\mathscr{G}_\nu$ et l'inclusion $\mathscr{G}'_\nu \to \mathscr{G}'_{\nu+1}$ est le morphisme dual de Cartier de l'épimorphisme $\mathscr{G}_{\nu+1} \to \mathscr{G}_\nu$ induit par la multiplication par p.

[(2)] On rappelle que si G est un schéma en groupes commutatifs localement libre de rang fini sur un schéma de base S, alors le dual de Cartier G' de G, qui est un tel schéma en groupes, représente le foncteur $\mathbf{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$ où le bifoncteur $\mathbf{Hom}$ est à prendre dans la catégorie des foncteurs en groupes abéliens.

Définition 2.6. — Un groupe de Lie formel (commutatif) Γ de dimension n sur $\mathscr{O}_K$ consiste en la donnée d'une $\mathscr{O}_K$-algèbre $\mathscr{A}$ isomorphe à une algèbre de séries formelles $\mathscr{O}_K[[X_1, \ldots, X_n]]$ et d'une comultiplication $\mathscr{A} \to \mathscr{A}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_K}\mathscr{A}$ vérifiant les axiomes bien connus.

On dit que Γ est divisible si le morphisme d'anneaux $\Psi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ induit par la multiplication par p dans Γ détermine une isogénie $\Gamma \to \Gamma$, c'est-à-dire que $\mathscr{A}$ devient un module libre de rang fini sur lui-même *via* Ψ.

Définition 2.7. — Soit Γ un groupe de Lie formel commutatif de dimension n sur $\mathscr{O}_K$. On note $\Gamma(p)$ le groupe p-divisible $(\operatorname{Spec} \mathscr{A}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ où $\mathscr{A}_\nu = \mathscr{A}/J_\nu$, J_ν désignant l'idéal engendré par les éléments $\Psi^\nu(X_i)$. On peut montrer que Γ est un groupe p-divisible connexe.

Théorème 2.8. — *Le foncteur $\Gamma \longmapsto \Gamma(p)$ réalise une équivalence de catégories de la catégorie des groupes de Lie formels commutatifs divisibles vers celle des groupes p-divisibles connexes sur $\mathscr{O}_K$.*

2.2. Le logarithme classique. —

2.2.1. Définition. —

Définition 2.9. — Soit Γ un groupe de Lie formel sur $\mathscr{O}_K$. On note $\mathscr{T}_\Gamma$ l'espace tangent de Γ : si $\mathscr{A}$ est l'algèbre de Γ et I son idéal d'augmentation, alors $\mathscr{T}_\Gamma = \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_K}(I/I^2, \mathscr{O}_K)$, c'est un $\mathscr{O}_K$-module libre de rang $\dim \Gamma$. Si Γ est le groupe de Lie formel correspondant à la composante neutre d'un groupe p-divisible $\mathscr{G}$, on note encore $\mathscr{T}_\mathscr{G} = \mathscr{T}_\Gamma$. Si R est une $\mathscr{O}_K$-algèbre, on pose $\mathscr{T}_\Gamma(R) = \mathscr{T}_\Gamma \otimes_{\mathscr{O}_K} R$.

Définition 2.10. — Si $\mathscr{G}$ est un groupe p-divisible (connexe) sur $\mathscr{O}_K$, on définit le logarithme $\log\colon \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \to \mathscr{T}_\mathscr{G}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $\log\colon \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathscr{T}_\mathscr{G}(K)$) par la formule suivante[(3)] :

$$\forall f \in I/I^2 \qquad (\log x)(f) = \lim_{i\to\infty} \frac{f(p^i x)}{p^i}$$

Remarque 2.11. — On remarque que si $\mathscr{A} \simeq \mathscr{O}_K[[X_1, \ldots, X_n]]$, alors le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathscr{G}(\mathscr{O}_K)$ (resp. $\mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$) est en *bijection* avec l'ensemble des n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ d'éléments de l'idéal maximal de $\mathscr{O}_K$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$).

Lemme 2.12. — *Soit $\mathscr{G}$ un groupe p-divisible connexe sur $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$. Alors,* log *est un morphisme de groupes topologiques. Son noyau est la torsion de $\mathscr{G}(\mathscr{O}_K)$ (resp. $\mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$). L'image du logarithme* $\log\colon \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathscr{T}_\mathscr{G}(K)$ *est un sous $\mathscr{O}_K$-module de type fini de $\mathscr{T}_\mathscr{G}(K)$ et* $\log\colon \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \to \mathscr{T}_\mathscr{G}(\mathbb{C}_p)$ *est surjectif. Enfin, le logarithme induit des isomorphismes :*

$$\mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}_\Gamma(K) \qquad \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}_\Gamma(\mathbb{C}_p)$$

On appelle exponentielle « classique » l'inverse de ces logarithmes.

---

(3) Cette formule est à rapprocher de $\log x = \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot (x^{\frac{1}{n}} - 1)\right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$.

2.2.2. Interprétation « cohomologique ». —

Définition 2.13. — Soit $\mathscr{G}$ un groupe p-divisible sur $\mathscr{O}_K$, on note $\mathrm{T}(\mathscr{G})$ le module de Tate de $\mathscr{G}$: c'est le $\mathbb{Z}_p$-module $\varprojlim_\nu \mathscr{G}_\nu(\overline{K})$ muni de l'action naturelle de G_K.

Remarque 2.14. — Le module de Tate ne dépend que de la fibre générique de $\mathscr{G}$. De plus, la connaissance du module de Tate équivaut à la connaissance de la fibre générique de $\mathscr{G}$ car, K étant de caractéristique 0, tout schéma en groupes fini sur K est étale.

La dualité de Cartier donne un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{T}(\mathscr{G}') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}}(\mathscr{G}_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}}, \mathbb{G}_m(p))$$

On en déduit deux accouplements et un diagramme commutatif (par « fonctorialité » du logarithme) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(\mathscr{G}') \times \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\log"] & (\mathbb{G}_m(p))(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) = U \arrow[d, "\log"] \\
\mathrm{T}(\mathscr{G}') \times \mathscr{T}_{\mathscr{G}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \arrow[r] & \mathscr{T}_{\mathbb{G}_m}(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p
\end{tikzcd}$$

où U désigne le groupe des unités de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ congrues à 1 modulo l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$.

Par adjonction, on obtient un diagramme commutatif de $\mathbb{Z}_p$-modules avec action de G_K :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathscr{T}_{\mathscr{G}}(\mathbb{C}_p) \arrow[d, "d\alpha"] \\
\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{T}(\mathscr{G}'), U) \arrow[r, "\log"] & \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{T}(\mathscr{G}'), \mathbb{C}_p)
\end{tikzcd}$$

Théorème 2.15 ([**Tate**, Théorème 3, page 179]). — *Soit $\mathscr{G}$ est un groupe p-divisible connexe sur $\mathscr{O}_K$. Les lignes verticales du diagramme précédent deviennent des isomorphismes quand on passe aux points fixes sous G_K :*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "\alpha", "\simeq"'] & \mathscr{T}_{\mathscr{G}}(K) \arrow[d, "d\alpha", "\simeq"'] \\
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathrm{T}(\mathscr{G}'), U) \arrow[r, "\log"] & \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathrm{T}(\mathscr{G}'), \mathbb{C}_p)
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2.16. — *Si $\mathscr{G}$ est un groupe p-divisible connexe, alors on a des isomorphismes*

$$\mathscr{T}_{\mathscr{G}}(K) = \mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p) \qquad \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) = \mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} U)$$

Démonstration. — Comme K est de caractéristique 0, la dualité de Cartier donne un accouplement non dégénéré

$$\mathscr{G}_\nu(\overline{K}) \times \mathscr{G}'_\nu(\overline{K}) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$$

où $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$ désigne le G_K-module discret des racines de l'unité dans $\overline{K}$ d'ordre une puissance de p. En passant convenablement à la limite, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{T}(\mathscr{G}) = \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{T}(\mathscr{G}'), \mathbb{Z}_p(1))$$

où $\mathbb{Z}_p(1)$ est le module de Tate de $\mathbb{G}_m(p)$.

Si on applique cette remarque à $\mathscr{G}'$, on peut faire le calcul formel suivant qui permet d'obtenir le premier isomorphisme, le second s'obtenant en remplaçant $\mathbb{C}_p$ par U :

$$\begin{aligned}\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{T}(\mathscr{G}'), \mathbb{C}_p) &= \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{T}(\mathscr{G}), \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{C}_p) \\ &= \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{T}(\mathscr{G}) \otimes \mathbb{Z}_p(-1), \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p \\ &= \mathrm{T}(\mathscr{G})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p = \mathrm{T}(\mathscr{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p(-1)\end{aligned}$$

□

2.3. L'exponentielle de Bloch-Kato. —

Définition 2.17. — Soit V une représentation p-adique de G_K de de Rham. L'application exponentielle de Bloch-Kato est le morphisme noté exp dans la suite exacte courte suivante qui se déduit du corollaire 1.17 :

$$0 \to \mathbf{Cris}(V)^{f=1}/\mathbf{H}^0(K, V) \to \mathbf{DR}(V)/\mathscr{F}il^0\mathbf{DR}(V) \stackrel{\exp}{\to} \mathbf{H}^1_e(K, V) \to 0$$

Dans ce numéro, on se donne un groupe p-divisible connexe $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{O}_K$. Dans [**Fo**], J.-M. Fontaine a montré que $V = V(\mathscr{G}) = \mathrm{T}(\mathscr{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est une représentation de de Rham.

On voit aisément que l'on a une suite exacte courte canonique pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \to \mathrm{T}(\mathscr{G})/p^n \to \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \stackrel{p^n}{\to} \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \to 0$$

En passant à la limite projective, on obtient une autre suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{T}(\mathscr{G}) \to \lim_{x \to px} \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \to \mathscr{G}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \to 0$$

La suite exacte longue de cohomologie galoisienne s'écrit :

$$0 \to \mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})) \to \lim_{x \to px} \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathbf{H}^1(K, \mathrm{T}(\mathscr{G}))$$

Or, on sait que $\mathscr{G}(\mathscr{O}_K)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, ainsi $\lim_{x \to px} \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) = 0$. Par conséquent, $\mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})) = 0$.

Définition 2.18. — On note $\delta\colon \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathbf{H}^1(K, T)$ le morphisme de connexion dans la suite exacte précédente. Ce morphisme δ a la vertu d'être injectif.

La compatibilité entre l'exponentielle classique et celle de Bloch-Kato se traduit par la proposition suivante :

Proposition 2.19. — *Soit $\mathscr{G}$ un groupe p-divisible connexe sur $\mathscr{O}_K$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}_{\mathscr{G}}(K) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \arrow[d, "\delta"] \\
\mathbf{DR}(V)/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V) \arrow[r, "\exp"] & \mathbf{H}^1(K,V)
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme de gauche est induit par l'isomorphisme du corollaire 2.16 et par l'inclusion canonique $\mathbb{C}_p(-1) \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathcal{F}il^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$.

Démonstration. — Il s'agit en fait de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}_{\mathscr{G}}(K) \arrow[d, "\simeq"] & \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \arrow[l, "\log"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathbf{DR}(V)/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V) \arrow[r, "\exp"] & \mathbf{H}^1(K,V)
\end{tikzcd}$$

On considère alors le diagramme de suites exactes courtes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p(1) \arrow[r] \arrow[d] & \lim\limits_{x\to px} U \arrow[r] \arrow[d, "\log[\cdot]"] & U \arrow[r] \arrow[d, "\log"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}_p(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{f=p} \cap \mathcal{F}il^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \arrow[r] \arrow[d, "x\to xt^{-1}\otimes t"] & \mathbb{C}_p \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}_p(1) \arrow[r] & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{f=1} \otimes \mathbb{Z}_p(1) \arrow[r] & (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathcal{F}il^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On peut tensoriser ce diagramme avec $\mathrm{T}(\mathscr{G})(-1)$ sur $\mathbb{Z}_p$ et en déduire un diagramme commutatif après application de la suite exacte longue de cohomologie galoisienne, diagramme que l'on peut augmenter sur la gauche avec les isomorphismes du corollaire 2.16.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \arrow[r] \arrow[d, "\log"] & \mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} U) \arrow[r] \arrow[d, "\log"] & \mathbf{H}^1(K,T) \arrow[dd] \\
\mathscr{T}_{\mathscr{G}}(K) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p) \arrow[d, "\simeq"] & \\
& \mathbf{DR}(V)/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V) \arrow[r, "\exp"] & \mathbf{H}^1(K,V)
\end{tikzcd}$$

Pour conclure, il reste seulement à vérifier que $\mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} U) \to \mathbf{H}^1(K, \mathrm{T}(\mathscr{G}))$ s'identifie $\delta\colon \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathbf{H}^1(K,T)$, ce qui est clair. $\square$

Remarque 2.20. — Comme on sait que $\delta\colon \mathscr{G}(\mathscr{O}_K) \to \mathbf{H}^1(K, \mathrm{T}(\mathscr{G}))$ est injectif, on obtient que $\exp\colon \mathbf{DR}(V)/\mathcal{F}il^0\mathbf{DR}(V) \to \mathbf{H}^1_e(K,V)$ est un isomorphisme. Dans la démonstration de l'injectivité de δ, on a vu que $\mathbf{H}^0(K, \mathrm{T}(\mathscr{G})) = 0$, ainsi on obtient que $\mathbf{Cris}(V)^{f=1} = 0$, et par conséquent $\mathbf{Cris}(V)_{f=1} = 0$, ce qui permet de conclure que $\mathbf{H}^1_f(K, V) = \mathbf{H}^1_e(K, V)$.

Bibliographie

[BK] **Spencer Bloch**, **Kazuya Kato**. L-Functions and Tamagama Numbers of Motives *in The Grothendieck Festschrift : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck*, Volume I, pages 333-400. *Progress in Mathematics*, **86** (1990). *Birkhaüser*. (M 750 700 (086))

[Fo] **Jean-Marc Fontaine**. Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Annals of Mathematics*, **115** (1982), no. 3, pages 529-577.

[Serre1] **Jean-Pierre Serre**. Cohomologie galoisienne. *Cinquième édition. Lectures Notes in Mathematics*, **5** (1994). *Springer-Verlag*. (M 726 705)

[Serre2] **Jean-Pierre Serre**. Corps locaux. *Troisième édition. Actualités scientifiques et industrielles*, **1296** (1968). Publications de l'institut mathématique de l'université de Nancago. *Hermann*. (M 711 296)

[Tate] **John Tate**. p-divisible groups *in Proceedings of a conference on local fields* (Driebergen, 1966), pages 158-183. *Springer*, (1967). (SM Cong 833)

[Sch] **Peter Schneider**. p-adic points of motives *in Motives* (Seattle, WA, 1991). *Proceedings of symposia of pure mathematics*, **55** (1994), partie 2, pages 225-249. *American Mathematical Society*. (SM Cong AMS 2-55/2)

Le 23 mai 2002

Joël Riou, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *Url :* `http://www.eleves.ens.fr/home/jriou/`
• *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~riou/`
• *E-mail :* `riou@math.jussieu.fr`