# FONCTORIALITÉ DES CATÉGORIES HOMOTOPIQUES

*par*

Joël Riou

**Table des matières**

1. Énoncé du théorème principal ........ 1
2. Quelques notations ........ 1
3. Catégories de modèles fermées considérées ........ 2
4. Construction des catégories bi-fibrées ........ 3
5. $t$-structures et $t$-exactitudes ........ 5
6. Le théorème de recollement ........ 6
7. Quelques exemples ........ 6
Bibliographie ........ 7

## 1. Énoncé du théorème principal

***Théorème 1.1***. — *Il existe une catégorie bi-fibrée qui à tout schéma noethérien $S$ associe la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}(S)$ (resp. $\mathbf{SH}_{\mathrm{s}}^{S^1_{\mathrm{s}}}(S)$, $\mathbf{SH}_{\mathbb{A}^1}^{S^1_{\mathrm{s}}}(S)$). Les images directes sont triangulées et les images inverses sont des foncteurs monoïdaux symétriques et triangulés. De plus, pour tout morphisme lisse $T \xrightarrow{f} S$, le foncteur image réciproque $f^\star$ admet un adjoint à gauche triangulé $\mathbf{L}f_\flat$.*

Nous allons commencer par construire les foncteurs images directes $\mathbf{R}f_\star$. Ensuite, nous montrerons qu'ils admettent des adjoints à gauche et que ce sont les foncteurs dérivés à gauche des foncteurs images réciproques au niveau des catégories de spectres. Enfin, puisque les foncteurs images réciproques ainsi construits se composent bien, il en ira de même pour les foncteurs images directes et on aura gagné.

À partir de maintenant, tous les schémas seront implicitement supposés noethériens et, en attendant que la construction soit terminée, les foncteurs dérivés à droite (resp. à gauche) seront toujours précédés de la lettre $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{L}$).

## 2. Quelques notations

Soit $T \xrightarrow{f} S$ un morphisme de schémas. On en déduit un foncteur $\mathbf{Sm}/S \xrightarrow{f^{-1}} \mathbf{Sm}/T$ qui à $X$ fait correspondre $X \times_S T$. La composition avec $f^{-1}$ définit un foncteur image directe (de préfaisceaux) $\mathbf{PreFais}(\mathbf{Sm}/T) \xrightarrow{f_\sharp} \mathbf{PreFais}(\mathbf{Sm}/S)$. Le foncteur $f^{-1}$ étant continu pour la topologie de Nisnevich, $f_\sharp$ induit un foncteur image directe (de faisceaux) $\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/T_{Nis}) \xrightarrow{f_\star} \mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})$ qui admet un foncteur adjoint à gauche $f^\star$.

***Remarque 2.1.*** — Le fait de travailler avec les grands sites Nisnevich lisses fait que pour un morphisme de schémas général $f$ les foncteurs $(f^\star, f_\star)$ ne constituent pas un morphisme de sites, c'est-à-dire que $f^\star$ ne commute pas forcément aux limites projectives finies.

On étend les foncteurs $f_\star$ et $f^\star$ de façon évidente aux catégories de faisceaux simpliciaux et aux catégories de faisceaux simpliciaux pointés.

***Lemme 2.2.*** — *Pour tout morphisme de schémas $f$, le foncteur $f^\star$ commute aux produits finis et au $\wedge$-produit (dans le cas pointé).*

*Démonstration.* — Pour montrer que $f^\star$ commute aux produits finis, il suffit de montrer que le morphisme canonique $f^\star(X \times Y) \to (f^\star X) \times (f^\star Y)$ est un isomorphisme quand $X$ et $Y$ sont des faisceaux représentables et que $f^\star$ préserve l'objet final, ce qui est évident. Le cas du $\wedge$-produit se déduit facilement de la commutation de $f^\star$ aux produits finis et aux limites inductives. $\square$

***Définition 2.3.*** — Soit $S' \xrightarrow{f} S$ un morphisme de schémas. Soient $T \in \mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})_\bullet$ et $T' \in \mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S'_{Nis})_\bullet$. On se donne un isomorphisme $T' = f^\star T$. On peut alors définir un foncteur $f^\star \colon \mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_T(S) \to \mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{T'}(S')$ de manière évidente de sorte que pour tout $T$-spectre $\mathsf{E}$, $(f^\star \mathsf{E})_n = f^\star(\mathsf{E}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le foncteur $f^\star$ admet un adjoint à droite $f_\star \colon \mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{T'}(S') \to \mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_T(S)$.

En particulier, si pour tout faisceau simplicial pointé, on note $\mathsf{F}_n X$ le $T$-spectre défini de manière évidente par $(\mathsf{F}_n X)_k = T^{\wedge n-k} \wedge X$ pour $k \geq n$ et $\bullet$ pour $k < n$, alors on a la formule $f^\star(\mathsf{F}_n X) = \mathsf{F}_n(f^\star X)$.

## 3. Catégories de modèles fermées considérées

Comme les démonstrations sont strictement parallèles, nous allons étudier la fonctorialité des différentes catégories homotopiques intervenant dans la théorie homotopique des schémas. Rappelons en les notations ainsi que les structures de catégories de modèles fermées que nous considérons pour tout schéma $S$ :

1. $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})$, $\mathsf{W} = \{$équivalences faibles simpliciales$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{H}_s(S)$ ;
2. $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})_\bullet$, $\mathsf{W} = \{$équivalences faibles simpliciales$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})_\bullet[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{H}_{s,\bullet}(S)$ ;
3. $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})$, $\mathsf{W} = \{\mathbb{A}^1$-équivalences faibles$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{H}(S)$ ;
4. $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})_\bullet$, $\mathsf{W} = \{\mathbb{A}^1$-équivalences faibles$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{Nis})_\bullet[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{H}_\bullet(S)$ ;
5. $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)$, $\mathsf{W} = \{$équivalences faibles simpliciales niveau par niveau$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{SH}^{S^1_s}_{\mathrm{s,str}}(S)$ ;
6. $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)$, $\mathsf{W} = \{\mathbb{A}^1$-équivalences faibles niveau par niveau$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{SH}^{S^1_s}_{\mathbb{A}^1,str}(S)$ ;
7. $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{P}^1}(S)$, $\mathsf{W} = \{\mathbb{A}^1$-équivalences faibles niveau par niveau$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{P}^1}(S)[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{SH}_{\mathbb{A}^1,str}(S)$ ;
8. $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)$, $\mathsf{W} = \{$équivalences stables simpliciales$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{SH}^{S^1_s}_{\mathrm{s}}(S)$ ;
9. $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)$, $\mathsf{W} = \{\mathbb{A}^1$-équivalences stables$\}$,
   $\mathsf{Cof} = \{$monomorphismes$\}$, $\mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_{S^1_s}(S)[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{SH}^{S^1_s}_{\mathbb{A}^1}(S)$ ;

10. $\mathbf{Spect}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{P}^1}(S)$, $\mathsf{W} = \{\mathbb{A}^1\text{-équivalences stables}\}$,
$\mathsf{Cof} = \{\text{monomorphismes}\}$, $\mathbf{Spect}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{P}^1}(S)[\mathsf{W}^{-1}] = \mathbf{SH}(S)$.

Dans la suite, ? désignera un élément dans l'ensemble $\{1, \dots, 10\}$, $\mathscr{C}_?(S)$ la catégorie de modèles correspondant à ce numéro dans la liste précédente et $\mathbf{H}_?(S)$ la catégorie homotopique associée, et ce pour tout schéma $S$.

## 4. Construction des catégories bi-fibrées

***Proposition 4.1***. — *Pour tout morphisme de schémas $T \xrightarrow{f} S$, le foncteur image directe susdéfini $f_\star\colon \mathscr{C}_?(T) \to \mathscr{C}_?(S)$ admet un foncteur dérivé total à droite $\mathbf{R}f_\star\colon \mathbf{H}_?(T) \to \mathbf{H}_?(S)$. Plus précisément, pour ces structures de catégories de modèles, $f_\star$ transforme équivalences faibles entre objets fibrants en équivalences faibles.*

*Démonstration*. — Dans le cas des catégories instables simpliciales (pointées ou non), une équivalence faible entre objets fibrants induit une équivalence faible au niveau des sections sur tout schéma dans le grand site Nisnevich, d'où le résultat dans ce cas. Dans le cas $\mathbb{A}^1$-localisé, une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible entre objets simplicialement fibrants et $\mathbb{A}^1$-locaux (c'est-à-dire $\mathbb{A}^1$-fibrants) est une équivalence faible simpliciale, d'où le résultat à partir du cas précédent.

Ces cas impliquent formellement les énoncés analogues au niveau des catégories de modèles « niveau par niveau » sur les catégories de spectres. Quand on stabilise, vu que les spectres stablement fibrants sont exactement les spectres injectivement fibrants qui sont aussi des $\Omega$-spectres et qu'une équivalence stable entre $\Omega$-spectres est une équivalence niveau par niveau, on peut se ramener au cas précédent. □

Nous allons maintenant construire les adjoints à gauche des foncteurs $\mathbf{R}f_\star$ précédemment construits pour tout morphisme de schémas $f\colon T \to S$. Si $X \in \mathscr{C}_?(S)$, on se demande si l'image de $f^\star X$ dans $\mathbf{H}_?(T)$ représente le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathbf{H}_?(S)}(X, \mathbf{R}f_\star(-))\colon \mathbf{H}_?(T) \to \mathbf{Ens}$.

Plus précisément, pour tout $Y$ *fibrant* dans $\mathscr{C}_?(T)$, on peut construire le diagramme suivant, où $\mathsf{Hom}$ est l'« enrichissement » canonique de $\mathscr{C}_?(T)$ au dessus de $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ *via* la structure simpliciale sur cette catégorie de modèles, et où $\mathbf{R}\,\mathsf{Hom}$ désigne le bifoncteur dérivé total à droite de ce bifoncteur pour cette structure, la construction suivante étant basée sur le fait que l'adjonction $(f^\star, f_\star)$ est simpliciale et que tous les objets sont cofibrants :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(f^\star X, Y) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\simeq"] & \mathsf{Hom}(X, f_\star Y) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbf{R}\,\mathsf{Hom}(f^\star X, Y) \arrow[r, dotted] & \mathbf{R}\,\mathsf{Hom}(X, f_\star Y) \end{tikzcd}$$

***Définition 4.2***. — Soit $X$ un objet de $\mathscr{C}_?(S)$. Si $T \xrightarrow{f} S$ est un morphisme de schémas, on dit que $X$ est $f$-?-admissible si pour tout $Y$ fibrant dans $\mathscr{C}_?(S)$, le morphisme $\mathsf{Hom}(X, f_\star Y) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}\,\mathsf{Hom}(X, f_\star Y)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{H}^{\mathrm{top}}$. On dit que $X$ est universellement ?-admissible s'il est $f$-?-admissible pour tout morphisme $T \xrightarrow{f} S$.

En appliquant le foncteur $\pi_0$ au morphisme en pointillés sur le diagramme précédent, on obtient que pour tout objet $X$ $f$-?-admissible, le foncteur adjoint à gauche de $\mathbf{R}f_\star$ est défini sur l'objet $X$ (vu dans la catégorie homotopique $\mathbf{H}_?(S)$). En particulier, pour montrer que $\mathbf{R}f_\star$ admet un adjoint à gauche, il suffit de montrer que tout objet de $\mathbf{H}_?(S)$ est isomorphe à l'image d'un objet $f$-?-admissible par le foncteur de localisation $\mathscr{C}_?(S) \to \mathbf{H}_?(S)$. Si tel est le cas, pour montrer que l'adjoint à gauche de $\mathbf{R}f_\star$ s'identifie au foncteur dérivé total à gauche de $f^\star$, il suffit de montrer qu'il existe une équivalence faible *fonctorielle* $X_a \to X$ dans $\mathscr{C}_?(S)$ avec $X_a$ $f$-?-admissible. Enfin, pour montrer que les foncteurs $\mathbf{R}f_\star$ et $\mathbf{L}f^\star$ se composent, il sera clairement suffisant de construire des résolutions universellement ?-admissibles, ce que nous allons faire. Tout d'abord, étudions les propriétés de stabilité des objets admissibles.

***Proposition 4.3.*** — *Soit $f$ un morphisme de schémas $T \to S$. Notons* $\mathsf{Adm}$ *la classe des objets de $\mathscr{C}_?(S)$ qui sont $f$-?-admissibles.*

1. *La classe* $\mathsf{Adm}$ *est stable par sommes directes ;*
2. *Si* $Y_0 \xrightarrow{u_0} Y_1 \xrightarrow{u_1} Y_2 \xrightarrow{u_2} \cdots$ *est un diagramme dans $\mathscr{C}_?(S)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in \mathsf{Adm}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ et $f^\star u_n$ sont des monomorphismes, alors la limite inductive* $\operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} Y_n \in \mathsf{Adm}$ *;*
3. *Dans un carré cocartésien de la forme suivante, si $Y_0$, $Y_1$ et $Y_2$ sont dans* $\mathsf{Adm}$ *et que $u$ et $f^\star u$ sont des monomorphismes, alors $Y_3 \in \mathsf{Adm}$ :*

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d] \\ Y_2 \arrow[r] & Y_3 \end{tikzcd}$$

*Démonstration.* — Le premier point est évident, de même que le troisième à partir de la « théorie » des carrés homotopiquement cartésiens dans $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$. Le deuxième point résulte du fait qu'un morphisme de tours de fibrations (entre ensembles simpliciaux fibrants) qui induit une équivalence faible à chaque étage induit une équivalence faible sur la limite projective. □

***Remarque 4.4.*** — Nous ne nous servirons pas de ce fait, mais au niveau des catégories de faisceaux simpliciaux (pointées ou non), si $Y$ est un faisceau simplicial, alors $Y \in \mathsf{Adm}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in \mathsf{Adm}$.

***Lemme 4.5.*** — *Soit $S$ un schéma. Pour tout ensemble simplicial $K$ et tout $X \in \mathbf{Sm}/S$, $X \times K$ est universellement ?-admissible pour $? \in \{1, 3\}$, $(X \times K)_+$ est universellement ?-admissible pour $? \in \{2, 4\}$ et $\mathsf{F}_n\big((X \times K)_+\big)$ est universellement ?-admissible pour tout $? \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.*

*Démonstration.* — Si $\mathscr{F} \in \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/T_{Nis})_\bullet$ est simplicialement fibrant et que $T \xrightarrow{f} S$ est un morphisme de schémas, alors $f_\star\mathscr{F}$ vérifie encore la propriété de Mayer-Viétoris généralisée. Ainsi, grâce à la version Nisnevich du théorème de Brown-Gersten, $X \times K$ est universellement 1-admissible. Comme l'image directe d'un faisceau simplicial simplicialement fibrant et $\mathbb{A}^1$-local est $\mathbb{A}^1$-local, on obtient que $X \times K$ est également universellement 3-admissible. On obtient facilement les versions pointées de ces résultats.

On en déduit tautologiquement que $\mathsf{F}_n\big((X \times K)_+\big)$ est ?-admissible pour $? \in \{5, 6, 7\}$. Comme l'image directe d'un $\Omega$-spectre projectivement fibrant est encore un $\Omega$-spectre, on obtient que $\mathsf{F}_n\big((X \times K)_+\big)$ est universellement ?-admissible pour $? \in \{8, 9, 10\}$. □

***Lemme 4.6.*** — *Soit $S$ un schéma. Pour tout $? \in \{1, \ldots, 10\}$, il existe une équivalence faible fonctorielle $X_a \to X$ pour tout $X \in \mathscr{C}_?(S)$ avec $X_a$ universellement ?-admissible.*

*Démonstration.* — On définit les classes de morphismes suivantes (qui à isomorphismes près de morphismes sont des ensembles) :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \{U \times \partial\Delta^n \to U \times \Delta^n, n \in \mathbb{N}, U \in \mathbf{Sm}/S\} \\ \mathscr{A}_\bullet &= \big\{(U \times \partial\Delta^n)_+ \to (U \times \Delta^n)_+, n \in \mathbb{N}, U \in \mathbf{Sm}/S\big\} \\ \mathscr{A}_{st} &= \big\{\mathsf{F}_k\big((U \times \partial\Delta^n)_+\big) \to \mathsf{F}_k\big((U \times \Delta^n)_+\big), n \in \mathbb{N}, U \in \mathbf{Sm}/S, k \in \mathbb{N}\big\} \end{aligned}$$

Tous ces morphismes sont des monomorphismes et le restent après application de tout changement de base $T \to S$. On peut appliquer l'argument du petit objet avec ces classes de morphismes dans les catégories $\mathscr{C}_?(S)$ pour obtenir une factorisation $\varnothing \longrightarrow X_a \longrightarrow X$ pour tout objet $X \in \mathscr{C}_?(S)$ de telle sorte que le morphisme $X_a \to X$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes dans $\mathscr{A}_?$ (donc $X_a \to X$ est une équivalence faible) et que $\varnothing \to X_a$ soit un composé dénombrable d'« images directes » de sommes directes de morphismes dans $\mathscr{A}_?$. D'après les propriétés de stabilité de la classe des objets universellement admissibles, $X_a$ est universellement ?-admissible, d'où le résultat. □

On a ainsi essentiellement démontré le théorème, mis-à-part la partie concernant les morphismes lisses, mais celle-ci est totalement analogue(1) à la construction des $\mathsf{L}f^\star$. Si $f$ est lisse, $f^\star$ préserve en fait les équivalences faibles, puisque $(f^\star, f_\star)$ est une adjonction de Quillen et que tous les objets sont cofibrants. On peut donc omettre la lettre $\mathsf{L}$ dans la notation $\mathsf{L}f^\star$ dans ce cas.

***Définition 4.7.*** — Si $f\colon T \to S$ est un morphisme lisse, on note $\mathsf{L}f_\flat$ l'adjoint à gauche de $f^\star\colon \mathbf{H}_?(X) \to \mathbf{H}_?(U)$ et c'est le foncteur dérivé total à gauche du foncteur adjoint à gauche $f_\flat$ de $f^\star\colon \mathscr{C}_?(X) \to \mathscr{C}_?(U)$. Si $f$ est une immersion ouverte, on note plutôt $f_! = \mathsf{L}f_\flat$ et on appelle ce foncteur le prolongement par le vide si $\mathscr{C}_?$ est non pointée et le prolongement par $\bullet$ sinon.

On peut montrer que pour tout morphisme de schémas $f$, les foncteurs $\mathsf{L}f^\star$ induits au niveau des diverses catégories homotopiques stables sont triangulés en remarquant que d'une part les foncteurs $f^\star$ correspondant aux catégories de spectres « commutent » au foncteur $- \wedge S^1_{\mathrm{s}}$ et à la formation du cône, et que le cône d'un morphisme entre deux spectres admissibles est admissible. Pour les images directes $\mathsf{R}f_\star$, on utilise la description duale de la structure triangulée qui dit que si $\mathsf{X} \xrightarrow{g} \mathsf{Y}$ est un morphisme de spectres fibrants, on a un triangle distingué canonique $\mathsf{Hom}\left(S^1_{\mathrm{s}}, \mathsf{Y}\right) \longrightarrow \mathsf{F} \longrightarrow \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ où $\mathsf{F}$ désigne la fibre homotopique de $f$. Comme $f_\star$ commute à la formation des fibres homotopiques, on obtient très facilement que $\mathsf{R}f_\star$ est triangulé. L'argument pour montrer que si $f$ est lisse, alors $\mathsf{L}f_\flat$ est triangulé est très similaire à celui permettant de montrer que $\mathsf{L}f^\star$ est triangulé.

## 5. $t$-structures et $t$-exactitudes

Rappelons rapidement les définitions dont nous aurons besoin. Pour les besoins de certaines démonstrations, nous allons considérer une $t$-structure sur la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}(S)$ pour tout schéma de base noethérien, même si certaines propriétés que nous avons vues(2) ne sont peut-être pas vérifiées si $S$ n'est pas le spectre premier d'un corps parfait.

***Théorème 5.1.*** — *Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée possédant des sommes directes et $\mathscr{S}$ un ensemble d'objets de $\mathscr{T}$ de présentation finie au sens triangulé. On note $\mathscr{T}_{<0}$ la classe des objets $X$ de $\mathscr{T}$ tels que* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(S[n], X) = 0$ *pour tout objet $S \in \mathscr{S}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{T}_{\geq 0}$ la classe des objets $Y$ de $\mathscr{T}$ tels que* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y, X) = 0$ *pour tout $X \in \mathscr{T}_{<0}$. Alors, $(\mathscr{T}, \mathscr{T}_{\geq 0}, \mathscr{T}_{<0})$ constitue une $t$-structure. On l'appelle la $t$-structure sur $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathscr{S}$.*

*Démonstration.* — Voir [**Mor**, lemme 4.2.2]. □

***Définition 5.2.*** — Pour tout schéma noethérien $S$, on peut considérer les $t$-structures suivantes sur les diverses catégories homotopiques stables :

1. la $t$-structure sur $\mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S)$ engendrée par les $U_+$ pour tout $U \in \mathbf{Sm}/S$ ;
2. la $t$-structure sur $\mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathbb{A}^1}(S)$ engendrée par les $U_+$ pour tout $U \in \mathbf{Sm}/S$ ;
3. la $t$-structure sur $\mathbf{SH}(S)$ engendrée par les $S^k_{\mathrm{t}} \wedge U_+$ pour tout $U \in \mathbf{Sm}/S$ et $k \in \mathbb{Z}$.

***Théorème 5.3.*** — *Pour tout morphisme de schémas $f\colon S' \to S$, les foncteurs $\mathsf{R}f_\star\colon \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S') \to \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S)$ (resp. $\mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathbb{A}^1}(S') \to \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathbb{A}^1}(S)$, $\mathbf{SH}(S') \to \mathbf{SH}(S)$) sont $t$-exacts à gauche. Leurs adjoints à gauche $\mathsf{L}f^\star\colon \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S) \to \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S')$ (resp...) sont $t$-exacts à droite.*

*Si $f$ est lisse, alors les trois foncteurs $f^\star$ sont $t$-exacts et les trois $\mathsf{L}f_\flat$ sont $t$-exacts à droite. Si $f$ est étale, le foncteur $\mathsf{L}f_\flat\colon \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S') \to \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S)$ est $t$-exact.*

*Enfin, si $f$ identifie(3) $S'$ à la limite projective d'un système projectif filtrant de $S$-schémas lisses ayant des morphismes de transition affines, alors les trois foncteurs $f^\star$ sont $t$-exacts.*

(1) On doit quand même utiliser la formule $f_\flat(X \times f^\star Y) = (f_\flat X) \times Y$ où $f_\flat$ est l'adjoint à gauche de $f^\star$ si $f$ est lisse (dans le cas non pointé).

(2) *cf.* les exposés d'Alban

(3) Cette condition est vérifiée si $f$ est de la forme $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ où $k'/k$ est une extension (non nécessairement de type fini) de corps qui est séparable, ce qui est toujours le cas si $k$ est parfait.

*Si $f$ est fini, alors $f_\star$ préserve les équivalences faibles (pour tout ?), et ce foncteur image directe $f_\star\colon \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S') \to \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathrm{s}}(S)$ est $t$-exact. Si, de plus, $S$ et $S'$ sont des spectres de corps parfaits, $f_\star\colon \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathbb{A}^1}(S') \to \mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathbb{A}^1}(S)$ est $t$-exact.*

*Démonstration.* — Il est clair que tous les foncteurs $\mathsf{L}f^\star$ considérés envoient les générateurs des $t$-structures de la catégorie de départ vers des générateurs de la $t$-structure sur la catégorie d'arrivée, ce qui implique la $t$-exactitude à gauche (resp. à droite) des images directes (resp. inverses) pour un morphisme de schémas $f$ général.

Si $f$ est lisse, $f^\star$ préserve les équivalences faibles et $\mathsf{L}f_\flat$ est l'adjoint à gauche de $f^\star$, pour les trois catégories bi-fibrées envisagées. De plus, $\mathsf{L}f_\flat$ envoie clairement les générateurs des $t$-structures sur les catégories de départ vers des générateurs des $t$-structures sur les catégories d'arrivée. On en déduit que dans ce cas $\mathsf{L}f_\flat$ est $t$-exact à droite et $f^\star$ $t$-exact à gauche.

Pour le cas où $f$ est « pro-lisse », il s'agit d'effectuer un passage à la limite. Soit $(X_i)_{i\in I}$ un système projectif filtrant d'objets de $\mathbf{Sm}/S$ dont les morphismes de transition sont affines et tel que $S' = \lim\limits_{i\in I} X_i$. On note $f_i\colon X_i \to S$ le morphisme structural. Soit $\mathsf{E} \in \mathsf{Spect}^{\mathbb{N}}_T(S)$. On suppose que $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}^?_?(S)_{<0}$ et on veut montrer que $f^\star\mathsf{E}$ est encore strictement négatif (rappelons que $f^\star$ préserve les équivalences faibles dans le cas considéré). On peut supposer que $\mathsf{E}$ est un spectre fibrant pour la structure de catégorie de modèles envisagée. Pour tout $i \in I$, $f_i^\star\mathsf{E}$ va vérifier la propriété de Mayer-Vietoris généralisée, ainsi il sera strictement négatif. D'après la formule donnant $f^\star$, les résultats de [**EGA**, chapitre 4, paragraphe 8] et le théorème de Brown-Gersten, $f^\star\mathsf{E}$ est un $\Omega$-spectre vérifiant la propriété de Mayer-Viétoris généralisée, $\mathbb{A}^1$-local si la structure considérée est $\mathbb{A}^1$-localisée, et en utilisant encore le théorème de Brown-Gersten, on voit facilement que $f^\star\mathsf{E}$ est strictement négatif.

Dans le cas où $f$ est étale, on peut vérifier que $\pi_n(j_\flat\mathsf{E}) = j_?\pi_n(\mathsf{E})$ où $j_?$ est l'analogue abélien de $j_\flat$, ce qui implique que $j_\flat$ est $t$-exact au niveau des catégories stables simpliciales.

On suppose maintenant que $f$ est fini. Comme un schéma fini sur un schéma local hensélien est une réunion disjointe d'un nombre fini de schémas locaux henséliens, on vérifie facilement que les fibres de $f_\star\mathscr{F}$ s'expriment comme un produit fini de celles de $\mathscr{F}$, ce qui implique clairement que $f_\star$ préserve les équivalences simpliciales (instables et stables). D'après [**MV**, proposition 2.12, page 109], $f_\star$ préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles entre faisceaux simpliciaux (pointés ou non). On en déduit que $f_\star$ préserve les équivalences faibles niveau par niveau au niveau des différentes catégories de spectres. Moyennant un argument supplémentaire utilisant le théorème de Brown-Gersten et le fait que $\Lambda^\infty f_\star = f_\star\Lambda^\infty$ si $\Lambda^\infty$ désigne le foncteur « lacets infinis », on obtient que $f_\star$ préserve les équivalences stables. La $t$-exactitude de $f_\star$ au niveau des catégories stables simpliciales des $S^1_{\mathrm{s}}$-spectres est claire d'après le calcul des fibres. Dans le cas $\mathbb{A}^1$-localisé et si $f$ est une extension finie de corps parfaits, cela provient du fait[(4)] que la $t$-structure $\mathbb{A}^1$-localisée est « induite » par la $t$-structure simpliciale si on identifie les catégories homotopiques stables $\mathbb{A}^1$-localisées des $S^1_{\mathrm{s}}$-spectre aux sous-catégories pleines des catégories homotopiques simpliciales des $S^1_{\mathrm{s}}$-spectres formées des objets $\mathbb{A}^1$-locaux. □

## 6. Le théorème de recollement

***Théorème 6.1.*** — *Soit $S$ un schéma, $F$ un sous-schéma fermé de $S$ et $U$ l'ouvert complémentaire. Notons $j\colon U \to S$ l'immersion ouverte et $i\colon F \to S$ l'immersion fermée. Alors, pour tout $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}(S)$ (resp. $\mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_{\mathbb{A}^1}(S)$), il existe un triangle distingué canonique :*

$$j_!j^\star\mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E} \longrightarrow i_\star i^\star\mathsf{E} \xrightarrow{+} j_!j^\star\mathsf{E}[1]$$

*Démonstration.* — Cela résulte essentiellement du théorème [**MV**, théorème 2.21, page 114]. □

(4) *cf.* les exposés d'Alban

## 7. Quelques exemples

Comme l'exemple très simple que j'ai en vue utilise une petite généralisation de ce qui précède, je vais d'abord expliquer comment on construit des spectres représentant la cohomologie singulière ordinaire et la cohomologie étale.

**7.1. Cohomologie étale et cohomologie singulière.** — On pourra consulter mon mémoire de DEA (pages 104-107).

**7.2. Un exemple très simple.** — Nous allons voir que le groupe de Grothendieck-Witt de $\mathbb{R}$ s'injecte dans l'algèbre des endomorphismes du spectre de $S^0_{\mathrm{s}}$ dans $\mathbf{SH}(S)$ pour tout schéma $S$ admettant un point réel.

***Proposition 7.1.*** — *Soit $S$ un schéma admettant un point réel. Alors, dans $\mathbf{SH}(S)$, la transposition $\left(\mathbb{P}^1\right)^{\wedge 2} \xrightarrow{\tau} \left(\mathbb{P}^1\right)^{\wedge 2}$ est différente de l'identité.*

*Démonstration.* — Par fonctorialité, on peut supposer que $S = \operatorname{Spec}\mathbb{R}$. On utilise alors l'existence d'un spectre $\mathsf{H} \in \mathbf{SH}(\mathbb{R})$ tel que pour tout schéma $X$ et tous $p, q \in \mathbb{Z}$, $\mathsf{H}^{pq}(X)$ s'identifie au $(p-q)$-ième groupe de cohomologie singulière de $X(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Or, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1_{\mathrm{s}}$ et l'action de $\tau$ sur la sphère $S^2_{\mathrm{s}} = \left(S^1_{\mathrm{s}}\right)^{\wedge 2}$ vaut $-1$, d'où l'impossibilité(5) que $\tau$ vaille l'identité dans $\mathbf{SH}(\mathbb{R})$.

L'existence de $\mathsf{H}$ résulte aussi d'un argument de fonctorialité pour l'application « raisonnable » de sites du site formé des variétés analytiques réelles munies de la topologie usuelle vers le grand site Nisnevich lisse de $\mathbb{R}$. □

## Bibliographie


[EGA] **Alexander Grothendieck**, **Jean Dieudonné**. Éléments de géométrie algébrique. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **4** (1960), **8** (1961), **11** (1961), **17** (1963), **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[Mor] **Fabien Morel**. The homotopy $t$-structure of the stable homotopy category of schemes. Preprint. (2000).

[MV] **Fabien Morel**, **Vladimir Voevodsky**. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **90** (1999), pages 45–143.

[SGA 4] **Alexander Grothendieck**, **Michael Artin**, **Jean-Louis Verdier**. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, (1963-1964). *Lectures Notes in Mathematics*, **269** (1972), **270** (1972), **305** (1973). *Springer*.


*Les 28 novembre et 5 décembre 2001*


JOËL RIOU, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *Url :* http://www.eleves.ens.fr/home/jriou/
• *Url :* http://www.math.jussieu.fr/~riou/
• *E-mail :* riou@math.jussieu.fr


(5) Ceci donne par ailleurs un automorphisme $\varepsilon$ du spectre $S^0_{\mathrm{s}} \in \mathbf{SH}(\mathbb{R})$ qui devrait en avoir exactement 4 : 1, $-1$, $\varepsilon$, $-\varepsilon$, avec la relation $\varepsilon^2 = 1$. L'automorphisme $\varepsilon$ est aussi différent de $-1$ car l'action induite par $\tau$ sur la cohomologie singulière des points complexes de « $\left(\mathbb{P}^1\right)^{\wedge 2}$ » est l'identité. Plus généralement, avec ce genre de petits calculs on peut montrer que $\Lambda(\mathbb{R}) = \operatorname{End}_{\mathbf{SH}(\mathbb{R})}\left(S^0_{\mathrm{s}}\right)$ contient comme sous-anneau l'anneau $\mathbb{Z}[\varepsilon]/\left(\varepsilon^2 - 1\right)$.