THÉORIE DE HODGE ET 1-MOTIFS SUR $\mathbb{C}$

par

Joël Riou

Table des matières

1. Structures de Hodge réelles

Nous allons présenter deux points de vue sur les structures de Hodge réelles, le premier permettant de mieux "motiver" le second.

1.1. Représentations de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$. —

Définition 1.1. — On note $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ la restriction de Weil du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. Autrement dit, $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ est le $\mathbb{R}$-schéma en groupes affine dont le foncteur des points associe à une $\mathbb{R}$-algèbre A l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Rappelons que si k est un corps et V est un k-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathbf{GL}(V)$ le k-schéma en groupes dont le foncteur des points associe à une k-algèbre A l'ensemble des automorphismes A-linéaires du A-module $A \otimes_k V$.

Définition 1.2. — On appelle $\mathbb{R}$-structure de Hodge un $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$-module de dimension finie sur $\mathbb{R}$, autrement dit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie V muni d'une action linéaire de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$, c'est-à-dire un morphisme de $\mathbb{R}$-schémas en groupes $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \overset{\rho}{\to} \mathbf{GL}(V)$.

En particulier, cette définition petmet de munir la catégorie des $\mathbb{R}$-structures de Hodge d'un produit tensoriel $\otimes$ et d'un hom. interne $\mathbf{Hom}$.

Pour donner une description concrète des $\mathbb{R}$-structures de Hodge, nous allons décrire "géométriquement" $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$, c'est-à-dire décrire le $\mathbb{C}$-schéma en groupes $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ et l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur ce schéma vu comme $\mathbb{R}$-schéma.

Par définition, le $\mathbb{C}$-schéma en groupes $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ associe à une $\mathbb{C}$-algèbre A le groupe des éléments inversibles de $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et comme $\mathbb{R}$-schéma, il associe à une $\mathbb{R}$-algèbre A le produit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, A) \times (A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\times$.

Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre de morphisme structural $\varphi \colon \mathbb{C} \to A$, alors on a un isomorphisme canonique d'anneaux $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = A \times A$ envoyant $a \otimes 1$ sur (a, a) et $a \otimes \imath$ sur $(\varphi(\imath)a, -\varphi(\imath)a)$, autrement dit envoyant $a \otimes z$ sur $(\varphi(z)a, \varphi(\overline{z})a)$. Quand A est une $\mathbb{R}$-algèbre et que l'on considère deux morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres conjugées $\varphi, \varphi' \colon \mathbb{C} \to A$, on voit aussitôt que l'automorphisme de $A \times A$ induit par les deux identifications avec $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ induites par φ et φ' est la permutation des deux facteurs A de $A \times A$.

On en déduit que si on note $X(G) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(G, \mathbb{G}_{m\,\mathbb{C}})$ pour tout $\mathbb{C}$-schéma en groupes, alors on a identifié canoniquement $X(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m)$ à $\mathbb{Z}^2$ et que l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $X(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m)$ se fait par permutation des coordonnées de $\mathbb{Z}^2$.

La proposition suivante en résulte essentiellement :

Proposition 1.3. — *La catégorie des représentations de dimension finie du $\mathbb{R}$-groupe algébrique $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ est équivalente à la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels V dont le $\mathbb{C}$-espace vectoriel complexifié $V_{\mathbb{C}}$ est muni d'une bigraduation $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} V^{p,q}$ telle que $V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$ pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.*

Démonstration. — Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Se donner un morphisme de $\mathbb{R}$-groupes algébriques $\rho \colon \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \to \mathbf{GL}(V)$ équivaut, par "descente galoisienne", à la donnée d'un $\mathbb{C}$-morphisme $\rho_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \to \mathbf{GL}(V_{\mathbb{C}})$ commutant à l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur ces $\mathbb{R}$-groupes.

Dans un premier temps, étudions le $\mathbb{C}$-groupe $G = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$. On a construit un $\mathbb{C}$-isomorphisme $G = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. On en déduit que G est un tore, et donc un groupe diagonalisable. En particulier, tous les éléments de $G(\mathbb{C})$ agissent de manière semi-simple(1) sur les représentations de dimension finie de G. Si $\pi \colon G \to \mathbf{GL}(W)$ est une représentation W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, tous les éléments de la forme $\pi(g) \in \mathbf{GL}(W)(\mathbb{C})$ avec $g \in G(\mathbb{C})$ vont être diagonalisables. Or, comme G est commutatif, tous ces éléments commutent. Il est bien connu qu'ils

(1)On rappelle que dans un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos, tous les éléments se décomposent en une partie semi-simple et une partie unipotente qui commutent, et que cette décomposition est compatible aux morphismes de groupes algébriques et à la notion usuelle pour les groupes $\mathbf{GL}_n$.

peuvent alors se diagonaliser simultanément. On a ainsi une décomposition $W = \bigoplus_{\chi\in X(G)} W^{\chi}$, où W^{χ} est le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de W où G agit par multiplication par le caractère χ.

Revenons à l'étude des représentations de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$. D'après ce qui précède, si V est une représentation de dimension finie de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V_{\mathbb{C}}$ se décompose en la somme directe suivante :

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} V^{p,q}$$

où l'on a identifié $X(G)$ à $\mathbb{Z}^2$. La condition de commutation à l'action du groupe de Galois se traduit clairement par l'égalité $V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$ pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. □

Définition 1.4. — Si V est une $\mathbb{R}$-structure de Hodge, pour tous entiers relatifs $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, on note $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} V^{p,q}$. On dit que V est pure de poids n si et seulement si pour tous $p, q \in \mathbb{Z}^2$, $h^{p,q} \neq 0$ implique $p + q = n$.

Remarque 1.5. — Notons w le $\mathbb{R}$-morphisme $\mathbb{G}_m \to \mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ associé au $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-morphisme $X(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m) \to X(\mathbb{G}_m)$ induit par l'addition des coordonnées $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. La décomposition par le poids d'une structure de Hodge réelle V en la somme des $\mathbb{R}$-espaces V^n avec $V^n_{\mathbb{C}} = \oplus_{p+q=n} V^{p,q}$ correspond à la décomposition de la représentation de $\mathbb{G}_m$ sur V induite par le morphisme $\rho_V \circ w$, ρ_V désignant le morphisme $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \to \mathbf{GL}(V)$.

1.2. Filtration de Hodge. —

Définition 1.6. — Soit V une structure de Hodge réelle. On définit une filtration décroissante de $V_{\mathbb{C}}$, appelée filtration de Hodge, par la formule suivante, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\mathscr{F}^p(V_{\mathbb{C}}) = \sum_{p'\geq p} V^{p',q'}$$

On note $\overline{\mathscr{F}}^{\bullet}$ la filtration complexe conjuguée de la filtration de Hodge sur $V_{\mathbb{C}}$, définie par $\overline{\mathscr{F}}^p = \overline{\mathscr{F}^p}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

La clef de tous nos problèmes est dans la définition suivante :

Définition 1.7. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, A un objet de $\mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Soient $\mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ deux filtrations finies de A. On dit que $\mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ sont n-opposées si et seulement si pour tous entiers $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $p+q = n+1$, le morphisme évident est un isomorphisme $\mathscr{F}^p(A)\oplus\overline{\mathscr{F}}^q(A) \xrightarrow{\sim} A$. Dans ce cas, on note $A^{p,q} = 0$ si $p + q \neq n$ et $A^{p,q} = \mathscr{F}^p(A) \oplus \overline{\mathscr{F}}^q(A)$ si $p + q = n$.

Proposition 1.8. — *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout objet A de $\mathscr{A}$ muni de deux filtrations n-opposées $\mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$, on a une décomposition $A = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$. De plus, pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, on a :*

$$\mathscr{F}^p(A) = \sum_{p'\geq p} A^{p',q'} \qquad \overline{\mathscr{F}}^q(A) = \sum_{q'\geq q} A^{p',q'}$$

Ces constructions définissent une équivalence de la catégorie des objets A de $\mathscr{A}$ munis de deux filtrations[(2)] *finies n-opposées $\mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ vers la catégorie des objets bigradués A de $\mathscr{A}$ tels que $A^{p,q} = 0$ pour $p + q \neq n$ et $A^{p,q} \neq 0$ seulement pour un nombre fini de couples (p,q). De plus, les morphismes sont strictement dans cette catégorie sont strictement compatibles aux filtrations $\mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$. Enfin, pour tous $p \in \mathbb{Z}$, le gradué $\mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}}(A)$ s'identifie canoniquement au sous-objet $A^{p,n-p}$ de A.*

(2) Par convention (à moins que le contexte ne veuille le contraire), les filtrations sont supposées décroissantes. Un morphisme d'un objet filtré $(A, \mathscr{F}^{\bullet})$ vers un autre $(B, \mathscr{F}^{\bullet})$ est un morphisme $A \xrightarrow{f} B$ tel que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(\mathscr{F}^p(A)) \subset \mathscr{F}^p(B)$. Les noyaux et conoyaux existent dans la catégorie des objets filtrés de $\mathscr{A}$, mais ce n'est pas une catégorie abélienne. On dit cependant qu'un morphisme f entre objets filtrés est strictement comptatible aux filtrations si le morphisme canonique $\mathrm{coïm}\, f \to \mathrm{im}\, f$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'image inverse de $\mathscr{F}^p(B)$ dans A par f est $\mathscr{F}^p(A) + \ker f$ ce qui est équivalent à demander que $f(\mathscr{F}^p(A)) = f(A) \cap \mathscr{F}^p(B)$. On note $\mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}}(A) = \mathscr{F}^p(A)/\mathscr{F}^{p+1}(A)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

En appliquant la proposition précédente dans le cas où $\mathscr{A}$ désigne la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.9. — *Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a une équivalence de catégorie entre la catégorie des structures de Hodge réelles pures de poids n et la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{R}$-vectoriels de dimension finie V dont on a muni le complexifié $V_{\mathbb{C}}$ d'une filtration $\mathscr{F}^\bullet$, appelée filtration de Hodge, telle que $\mathscr{F}^\bullet$ soit n-opposée à sa filtration complexe conjuguée $\overline{\mathscr{F}}^\bullet$.*

1.3. $\mathbb{Z}$-structures de Hodge pures. — Nous allons introduire la définition suivante, qui nous suffira dans un premier temps pour l'étude du n-ième groupe de cohomologie singulière des variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$. Si on enlève l'hypothèse de propreté ou de lissité, il faut utiliser des structures de Hodge mixtes que nous ne définirons que plus tard.

Définition 1.10. — Soit $n \in \mathbb{Z}$. On appelle $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids n la donnée d'un groupe abélien de type fini H et d'une structure de Hodge réelle pure de poids n sur $H_{\mathbb{R}}$.

Il est clair que l'on peut définir des foncteurs $\otimes$ et Hom au niveau des structures de Hodge entières pures en le faisant coïncider avec les foncteurs analogues pour les groupes abéliens de type fini et les $\mathbb{R}$-structures de Hodge.

2. Structures de Hodge pures associées à une variété projective lisse

Avant d'étudier la cohomologie des variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$, nous allons construire des complexes de faisceaux sur le site des variétés analytiques sur $\mathbb{C}$. Grâce à des complexes et des filtrations que nous construirons, nous pourrons définir, pour toute variété $\mathbb{C}$-analytique X, une suite spectrale dont le terme E_1 sera la constitué de la cohomologie de Dolbeault de X convergeant vers la cohomologie singulière de X à coefficients *complexes*. Nous disposerons ainsi d'une filtration de l'aboutissement de cette suite spectrale. Le théorème principal de la théorie de Hodge nous dira que cette suite spectrale est E_1-dégénérée si X désigne les points complexes d'une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et que la filtration obtenue sur le $\mathbf{H}^n(X;\mathbb{C})$, appellée filtration de Hodge, est n-opposée à sa filtration complexe conjuguée, nous permettant de munir $\mathbf{H}^n(X;\mathbb{Z})$ d'une structure de Hodge pure de poids n, dont le gradué pour la filtration de Hodge sera la somme directe des espaces de cohomologie de Dolbeault.

2.1. Définitions. —

2.1.1. Bigraduation de l'espace des formes différentielles complexes. — Soit X une variété analytique complexe. On note $\mathscr{E}^\bullet$ le faisceau des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur X à valeurs réelles. Notons $\mathscr{T}$ le fibré tangent de X, qui est un fibré vectoriel complexe. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}^n$ est le faisceau des sections $\mathcal{C}^\infty$ du fibré vectoriel réel $\mathbf{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^n\mathscr{T},\mathbb{R}) = \Lambda^n_{\mathbb{R}}(\mathscr{T}^\star)$.

À partir de maintenant, on s'intéressera surtout au fibré vectoriel complexe $\mathscr{C} := \mathscr{T}^\star \otimes \mathbb{C} = \mathbf{Hom}(\mathscr{T},\mathbb{C})$. Plus précisément, dans cette définition, on oublie la structure complexe de $\mathscr{T}$, et on considère les applications $\mathbb{R}$-linéaires $\mathscr{T} \to \mathbb{C}$. La structure de fibré vectoriel complexe sur $\mathscr{C}$ est ainsi induite par la structure complexe de $\mathbb{C}$. Si maintenant on se souvient que $\mathscr{T}$ possède une structure complexe, on a la décomposition $\mathscr{C} = \mathscr{C}^h \oplus \mathscr{C}^{ah}$ de $\mathscr{C}$ en somme directe de deux fibrés vectoriels complexes. On en déduit :

$$\mathscr{E}^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (\Lambda^\bullet_{\mathbb{R}}\mathscr{T}^\star) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^\bullet_{\mathbb{C}}\mathscr{C} = \Lambda^\bullet_{\mathbb{C}}(\mathscr{C}^h \oplus \mathscr{C}^{ah})$$

Si, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{A}^{p,q} = \Lambda^p_{\mathbb{C}}\mathscr{C}^h \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q_{\mathbb{C}}\mathscr{C}^{ah}$, il en résulte formellement une décomposition canonique pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{E}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} \mathscr{A}^{p,q}$$

De plus, par définition, on a $\mathscr{A}^{p,q} = \overline{\mathscr{A}^{q,p}}$.

Définition 2.1. — On appelle (p,q)-forme différentielle une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré vectoriel $\mathscr{A}^{p,q}$.

Remarque 2.2. — Dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$, une (p,q)-forme différentielle peut s'écrire de façon unique sous la forme $\sum_{I,J} f_{I,J} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge \overline{dz_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz_{j_q}}$ où I et J sont deux suites croissantes à valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal p et q respectivement et d'images disjointes, et où $f_{I,J}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Comme cela ne nuit plus, on identifie dès à présent tout fibré vectoriel complexe au faisceau de ses sections $\mathcal{C}^\infty$, autrement dit à un $\mathcal{C}^\infty$-Module localement libre de rang fini. Néanmoins, on prendra garde au fait que les opérateurs différentiels ne sont pas $\mathcal{C}^\infty$-linéaires !

Proposition 2.3. — *La différentielle extérieure s'écrit $d = \partial + \overline{\partial}$ où ∂ et $\overline{\partial}$ sont des endomorphismes bigradués du faisceau de groupes abéliens $\mathscr{A}^{\bullet,\bullet}$ de degrés respectifs $(+1,0)$ et $(0,+1)$. En particulier, on a les formules suivantes :*

$$\partial \circ \partial = 0 \qquad \overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0 \qquad \partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial = 0$$

Définition 2.4. — On note $\Omega^\bullet$ sous-complexe de faisceaux de $\mathscr{E}^\bullet \otimes_R \mathbb{C}$ formé des sections holomorphes du fibré vectoriel complexe $\mathscr{A}^{\bullet,0}$.

On remarque que l'on a muni $\mathscr{A}^{\bullet,\bullet}$ d'une structure de bicomplexe de faisceaux. On note respectivement $\mathscr{H}_\partial^{\bullet,\bullet}$ et $\mathscr{H}_{\overline{\partial}}^{\bullet,\bullet}$ ses objets de cohomologie (qui sont des faisceaux) par rapport aux différentielles(3) ∂ et $\overline{\partial}$.

Remarque 2.5. — Nous allons préciser avec le théorème suivant, qui est loin d'être évident, les deux énoncés suivants, qui sont bien connus :

Lemme de Poincaré : Le complexe de faisceaux $\mathscr{E}^\bullet$ constitue une résolution du faisceau constant $\mathbb{R}$, l'image de l'inclusion $\mathbb{R} \to \mathscr{E}^0$ étant le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs réelles ;

Lemme de Poincaré holomorphe : Le complexe de faisceaux $\Omega^\bullet$ constitue une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$, l'image de l'inclusion $\mathbb{C} \to \Omega^0$ étant le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs complexes.

Théorème 2.6. — [**Weil**, corollaire 1, page 71] *Pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, avec $p > 0$, on a $\mathscr{H}_{\overline{\partial}}^{p,q} = 0$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{H}_{\overline{\partial}}^{p,0} = \Omega^p$.*

Autrement dit, quand on prend la cohomologie verticale dans le bicomplexe $\mathscr{A}^{\bullet,\bullet}$, il ne reste qu'une ligne qui s'identifie au complexe de faisceaux $\Omega^\bullet$. Et quand on prend la cohomologie horizontale de $\Omega^\bullet$, on obtient le faisceau constant $\mathbb{C}$ en degré 0, grâce au lemme de Poincaré (holomorphe ou pas suivant les goûts).

Remarque 2.7. — On rappelle que le faisceaux d'anneaux $\mathcal{C}^\infty$ est mou, c'est-à-dire que toute section sur un fermé est la restriction d'une section globale. Autrement dit, on a des partitions de l'unité pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On sait que tout faisceau de modules sur un faisceau d'anneau mou est fin. Il en résulte que pour toute variété différentielle X, les faisceaux de groupes abéliens $\mathscr{E}^n$ sur X sont acycliques pour le foncteur sections globales, et qu'il en va de même des faisceaux $\mathscr{A}^{p,q}$ pour tout variété analytique complexe X.

2.1.2. Cohomologie de Dolbeault. — Pour toute variété complexe X, on note $A^{\bullet,\bullet}(X)$ le bicomplexe obtenu en prenant les sections sur X dans le bicomplexe de faisceaux $\mathscr{A}^{p,q}$.

Définition 2.8. — Soit X une variété analytique complexe. Pour tous entiers $(p,q) \in \mathbb{Z}$, on définit la cohomologie de Dolbeault de X en bidegré (p,q) par la formule suivante :

$$H_{\overline{\partial}}^{p,q}(X) = \mathbf{H}^q(A^{p,\bullet}(X), \overline{\partial})$$

La proposition découle des résultats précédents.

(3)On aura tendance à voir ∂ comme allant vers la droite et $\overline{\partial}$ vers le haut.

Proposition 2.9. — *Pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et toute variété analytique X, on a un isomorphisme canonique :*

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) = \mathbf{H}^q(X;\Omega^p)$$

Définition 2.10. — Si X est une variété lisse sur $\mathbb{C}$, on note X^{an} la variété analytique complexe $X^{\mathrm{an}} = X(\mathbb{C})$.

Le théorème suivant est un corollaire des théorèmes G.A.G.A. de Serre sur les faisceaux cohérents sur les variétés projectives sur $\mathbb{C}$. Dans ce contexte, ce théorème permet de donner une définition purement algébrique de la cohomologie de Dolbeault qui n'a rien d'algébrique *a priori*.

Théorème 2.11. — *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. Pour tous entiers $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, l'application canonique suivante est un isomorphisme :*

$$\mathbf{H}^q(X;\Omega^{p,alg}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q(X^{\mathrm{an}};\Omega^p)$$

2.1.3. Comparaison entre la cohomologie de Dolbeault et la cohomologie singulière. — Soit X une variété analytique complexe. Le complexe simple associé au complexe double $A^{\bullet,\bullet}(X)$ n'est autre que le complexe des sections sur X du complexe de faisceaux $\mathscr{E}^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui d'après le lemme de Poincaré fournit une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ par des faisceaux fins. On en déduit formellement la proposition suivante :

Proposition 2.12. — *Pour tout variété analytique complexe X, il existe une suite spectrale de $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie :*

$$E_1^{p,q} = H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \Rightarrow \mathbf{H}^{p,q}(X;\mathbb{C})$$

Définition 2.13. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et r_0 un entier naturel. Une suite spectrale à valeurs dans $\mathscr{A}$ commençant en E_{r_0} consiste en la donnée, pour tout entier $r \geq r_0$ d'un objet bigradué $(E_r^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}^2}$ muni d'un différentielle d_r de bidegré $(r,-r+1)$ telle que $d_r \circ d_r = 0$ et d'un isomorphisme $E_{r+1}^{p,q} = \mathbf{H}^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)$. On dispose d'une notion évidente de catégorie des suites spectrales à valeurs dans $\mathscr{A}$ commençant en E_{r_0}. Dans une suite spectrale, pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, si pour r assez grand, les différentielles de source ou de but $E_r^{p,q}$ sont toutes nulles, on note $E_\infty^{p,q}$ la limite inductive du système constant $(E_r^{p,q})_{r\geq r'}$, qui a un sens pour r' assez grand. On dit qu'une suite spectrale converge vers un certain objet gradué $(H^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dès que l'on s'est donné, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une filtration décroissante finie $\mathscr{F}^\bullet$ de H^n et un isomorphisme, pour tous entiers $p,q \in \mathbb{Z}^2$, $E_\infty^{p,q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}}(H^{p+q})$.

Rappelons d'où provient la suite spectrale de ce bicomplexe. Notons $K = \mathbf{tot}(A^{\bullet,\bullet}(X))$ le complexe simple de $A^{\bullet,\bullet}(X)$. On dispose d'une filtration de Hodge de $A^{\bullet,\bullet}(X)$ (qui correspond à une filtration décroissante du complexe de faisceaux $\mathbf{tot}(A^{\bullet,\bullet}) = \mathscr{E}^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$). On peut en effet poser :

$$\mathscr{F}^p K^n = \bigoplus_{p'+q'=n,\, p'\geq p} A^{p,q}(X)$$

Il est immédiat que $\mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}} K^\bullet$ s'identifie au complexe simple $(A^{p,\bullet}(X), \overline{\partial})$ à la renumérotation près. La suite spectrale de la proposition 2.12 n'est autre que la suite spectrale associée au complexe filtré $(K^\bullet, \mathscr{F})$. Dans ce contexte des complexes filtrés[(4)], on définit comme suit la suite spectrale associée :

Définition 2.14. — Pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $r \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, on définit des sous-objets $Z_r^{p,q} \subset B_r^{p,q}$ de K^{p+q} par les formules suivantes :

$$Z_r^{p,q} = \ker(d\colon \mathscr{F}^p(K^{p+q}) \to K^{p+q+1}/\mathscr{F}^{p+r}(K^{p+q+1}))$$
$$K^{p+q}/B_r^{p,q} = \operatorname{coker}(d\colon \mathscr{F}^{p-r+1}(K^{p+q-1}) \to K^{p+q}/\mathscr{F}^{p+1}(K^{p+q}))$$

On pose $E_r^{p,q} = \operatorname{im}(Z_r^{p,q} \to K^{p+q}/B_r^{p,q}) = Z_r^{p,q}/(B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q})$.

(4) On suppose que la filtration induite sur chacun des K^n est finie pour ne pas avoir de problèmes de convergence. On dit alors que la filtration est birégulière.

En travaillant un peu, on peut définir une structure de suite spectrale sur ces termes E_r, $r \geq 0$. On définit une filtration $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{H}^n(K^\bullet)$ par la formule $\mathscr{F}^p\mathbf{H}^n(K^\bullet) = \mathrm{im}(\mathbf{H}^n(\mathscr{F}^pK^\bullet) \to \mathbf{H}^n(K^\bullet))$. On vérifie aussitôt que l'on a des isomorphismes canoniques

$$E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}}(\mathbf{H}^n(K^\bullet)) \qquad E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}}\, K^{p+q}$$

On en déduit la formule annoncée pour le terme E_1 :

$$E_1^{p,q} = \mathbf{H}^{p+q}(\mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}}\, K^\bullet)$$

2.2. Dégénérescence de la suite spectrale et décomposition. —

Définition 2.15. — On dit qu'une suite spectrale dégénère en $E_{r'}$ si pour tout $r \geq r'$, $d_r = 0$, autrement dit si $E_{r'} = E_\infty$.

La moralité est la suivante concernant la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale d'un complexe filtré.

Lemme 2.16. — *Soit $(K^\bullet, \mathscr{F})$ un complexe muni d'une filtration birégulière. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite spectrale définie par $\mathscr{F}$ dégénère en E_1 ;*
2. *Les morphismes $d : K^i \to K^{i+1}$ sont strictement compatibles aux filtrations ;*
3. *Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme canonique $\mathbf{H}^n(\mathscr{F}^pK^\bullet) \to \mathbf{H}^n(K^\bullet)$ est un monomorphisme.*

Théorème 2.17. — *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors,*

1. *La suite spectrale de la proposition 2.12 pour X^{an} dégénère en E_1 ;*
2. *Si on appelle filtration de Hodge sur $\mathbf{H}^n(X^{\mathrm{an}}; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la filtration ssociée à la suite spectrale précédente, alors cette filtration est n-opposée à sa filtration complexe conjuguée.*

Ainsi, $\mathbf{H}^n(X; \mathbb{Z})$ est muni d'une structure de Hodge pure de poids n et on a la décomposition canonique suivante :

$$\mathbf{H}^n(X; \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$$

Nous allons donner quelques idées sur la démonstration de ce théorème.

2.2.1. Théorie de Hodge des variétés riemanniennes. — Pour l'instant, on se donne une variété riemannienne orientée X de dimension N. Cela signifie que l'on se donne un produit scalaire euclidien $\mathcal{C}^\infty$ sur le fibré tangent d'une variété différentielle orientée X.

Définition 2.18. — Pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, on note $\star$ l'isomorphisme canonique *évident*[(5)] de faisceaux $\star$: $\mathscr{E}^p_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}^{N-p}_X$. On remarquera que $\star\star\omega = (-1)^{p(N-p)}\omega$ pour tout p-forme différentielle ω. Si δ est un opérateur différentiel de degré $+1$, on note $\delta^\star = (-1)^{N(p+1)+1} \star \delta \star$, qui est un opérateur différentiel de degré -1.

Définition 2.19. — On appelle opérateur de Laplace-Beltrami l'opérateur Δ qui est de degré 0 et d'ordre 2 défini par la formule suivante :

$$\Delta = d^\star d + dd^\star$$

Théorème 2.20. — *Soit X une variété riemannienne orientée* compacte. *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathscr{H}^n(X) = \ker(\Delta \in \mathrm{End}(\mathscr{E}^p(X)))$ et on l'appelle l'espace des n-formes harmoniques. Les éléments de $\mathscr{H}^n(X)$ sont annulés par d et $d^\star$. De plus, l'application évidente $\mathscr{H}^n \to \mathbf{H}^n(X; \mathbb{R})$ est un isomorphisme.*

---

(5) Seul une question de signe peut nuire à la canonicité de cet isomorphisme, ce dont on ne se souciera guère.

Démonstration. — Il est essentiellement tautologique que $d^\star$ est l'adjoint de d pour le produit scalaire "évident" sur $\mathscr{E}^\bullet(X)$. L'opérateur de Laplace-Beltrami est donc un opérateur autoadjoint positif. Pour toute n-forme ω, on a $(x, \Delta x) = (dx, dx) + (d^\star x, d^\star x)$. De plus, un petit calcul montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les espaces $\mathscr{H}^n(X)$, $d\mathscr{E}^{n-1}(X)$ et $d^\star\mathscr{E}^{n+1}(X)$ sont en somme directe orthogonale. La théorie des équations aux dérivées partielles nous dit qu'en fait il s'agit d'une décomposition orthogonale de $\mathscr{E}^n(X)$! Le théorème en découle aisément. □

2.2.2. Théorie de Hodge des variétés complexes munis de métriques hermitiennes. — On suppose maintenant que X est une variété analytique complexe (que l'on convient d'orienter en tant que variété réelle par le choix d'une racine de l'équation $z^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$) munie d'une métrique hermitienne, c'est-à-dire que l'on munit le fibré tangent d'un produit scalaire hermitien, variant de façon $\mathcal{C}^\infty$. On appelera "hermitiennes" de telles variétés. On dispose d'une structure riemannienne évidente sur de telles variétés. Le théorème suivant est un analogue du théorème 2.20, où l'on note $\Delta_{\overline{\partial}}$ le laplacien associé à $\overline{\partial}$ par la formule $\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}^\star\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^\star$.

Théorème 2.21. — *Soit X une variété hermitienne. Pour tous entiers $p, q \in \mathbb{Z}$, on définit $\mathscr{H}^{p,q}(X)$ comme étant le noyau de $\Delta_{\overline{\partial}}$ agissant sur $A^{p,q}(X)$) et on l'appelle l'espace des formes harmoniques de bidegré (p, q). Les éléments de $\mathscr{H}^{p,q}(X)$ sont annulés par $\overline{\partial}$ et $\overline{\partial}^\star$. De plus, l'application évidente $\mathscr{H}^{p,q} \to H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$ est un isomorphisme.*

2.2.3. Théorie de Hodge des variétés kählériennes. — On se donne une variété hermitienne X. Si H désigne la métrique hermitienne sur le fibré tangent de X, on peut vérifier que $\Omega = -\frac{1}{2}\Im H$ est dans $A^{1,1}(X)$.

Définition 2.22. — On dit que X est kählérienne si et seulement si $d\Omega = 0$.

Remarque 2.23. —
- Une sous-variété complexe d'une variété kählérienne peut évidemment être munie d'une métrique kählérienne ;
- L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peut être muni d'une métrique kählérienne : on peut définir la métrique Ω de Fubini-Study en disant que si U est un ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et $\varphi\colon U \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ est un relèvement de la projection canonique, alors $\Omega_{|U} = \frac{\imath}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln|\varphi|^2$;
- Les deux points précédents impliquent que la variété complexe X^{an} peut être munie d'une structure kählérienne si X est une variété quasi-projective lisse sur $\mathbb{C}$: les résultats sur les variétés kählériennes compactes s'appliqueront donc à X^{an} si X est une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$.

Dans le lemme suivant réside une partie du miracle :

Lemme 2.24. — *Si X est une variété kählérienne, on a l'égalité suivante :*

$$\Delta = 2\Delta_{\overline{\partial}}$$

Démonstration du théorème 2.17. — Plus généralement, la conclusion du théorème reste vraie pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et toute variété kählérienne compacte X. D'après le lemme précédent, le miracle suivant se produit :

$$\mathscr{H}^n(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \oplus_{p+q=n}\mathscr{H}^{p,q}(X)$$

Comme l'opérateur de Laplace-Beltrami est défini sur $\mathbb{R}$, on peut donc définir une structure de Hodge réelle pure de poids n sur $\mathscr{H}^n(X)$, dont on note $\Phi^\bullet$ la filtration de Hodge définie par :

$$\Phi^p\mathscr{H}^n(X) = \oplus_{p'+q'=n, p'\geq p}\mathscr{H}^{p',q'}(X)$$

De plus, le théorème 2.20 nous dit que la flèche évidente est un isomorphisme $\mathscr{H}^n(X) \to \mathbf{H}^n(X; \mathbb{C})$. D'un autre côté, le théorème 2.21 nous dit que la flèche évidente est un isomorphisme $\mathscr{H}^{p,q}(X) \to H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$ pour tous p et q tels que $p + q = n$. En particulier, on voit que les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$ sont de dimension finie.

Pour démontrer le théorème, commençons par montrer la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale reliant la cohomologie de Dolbeault de X à sa cohomologie singulière à coefficients complexes. D'après ce qui précède, par un argument de dimension, les différentielles sont toutes nulles ! Plus directement, on peut relever tout élément de E_1^{pq} en un élément de $\mathscr{H}^{p,q}$, mais sur cet espace ∂ et $\overline{\partial}$ sont nulles, et on a donc affaire à un "cocycle permanent".

Pour conclure, il reste à voir que la filtration $\mathscr{F}^\bullet$ sur $\mathbf{H}^n(X;\mathbb{C})$ coïncide avec la filtration $\Phi^\bullet$ sur $\mathscr{H}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ *via* l'isomorphisme $\mathscr{H}^n(X)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbf{H}^n(X;\mathbb{C})$. Par définition, l'image de Φ^p est contenue dans $\mathscr{F}^p$. Il est aussi clair que le morphisme filtré qui s'en déduit induit un isomorphisme sur les gradués, cet isomorphisme correspondant à l'isomorphisme $\mathscr{H}^{p,q}(X) \to H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$. Le résultat en découle aussitôt. □

3. Théorie de Hodge mixte

3.1. Définitions. — Le lecteur pourra consulter à profit [**D2**] pour ce qui concerne les structures de Hodge mixtes.

Définition 3.1. — Une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge mixte consiste en la donnée d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie H pour lequel on se donne une filtration croissante $W_\bullet$ sur H et une filtration décroissante $\mathscr{F}^\bullet$ sur $H_{\mathbb{C}}$ soumises à l'axiome suivant : pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la filtration induite par $\mathscr{F}$ sur $(\mathrm{Gr}_n^W H) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ munit $\mathrm{Gr}_n^W H$ d'une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge pure de poids n. Une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge mixte consiste en la donnée d'un groupe abélien de type fini H et d'une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge mixte sur $H_{\mathbb{Q}} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On appelle $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Q}}$) la catégorie des $\mathbb{Z}$-structures (resp. $\mathbb{Q}$-structures) de Hodge mixtes. Si H est une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge mixte, on note $h^{p,q}$ la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^{p,q}(\mathrm{Gr}_{p+q}^W H)$

La filtration $W_\bullet$ est appellée la filtration par le poids et $\mathscr{F}^\bullet$ désigne la filtration de Hodge.

Théorème 3.2 **(Deligne,** [**D2**, théorème 2.3.5]**).** —
1. *Les catégories* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$ *et* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Q}}$ *sont abéliennes ;*
2. *Tout morphisme dans* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Q}}$ *(resp.*$\mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$*) est strictement compatible aux filtrations de Hodge et par la poids ;*
3. *Pour tout entier* $n \in \mathbb{Z}$*, le foncteur* Gr_n^W *est un foncteur exact de la catégorie* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$ *(resp.* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Q}}$*) vers la catégorie des* $\mathbb{Q}$*-structures de Hodge pures de poids* n *;*
4. *Pour tout entier* $p \in \mathbb{Z}$*, le foncteur* $\mathrm{Gr}^p_{\mathscr{F}}$ *est un foncteur exact de la catégorie* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$ *(resp.* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Q}}$*) vers la catégorie des* $\mathbb{C}$*-vectoriels.*

3.2. Structure de Hodge mixte associée au n-ième groupe de cohomologie singulière d'un schéma de type fini et séparé sur $\mathbb{C}$. —

Théorème 3.3 **(Deligne,** [**D3**, proposition 8.2.2, théorème 8.2.4]**).** — *Pour tout entier* $n \in \mathbb{Z}$*, il existe un foncteur contravariant de la catégorie des schémas de type fini et séparés sur* $\mathbb{C}$ *vers* $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$ *qui en tant que foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens coïncide avec* $\mathbf{H}^n(-^{\mathrm{an}};\mathbb{Z})$ *et prolonge le foncteur précédemment défini pour les variétés projectives et lisses.*

Soit X *un schéma de type fini et séparé sur* $\mathbb{C}$ *de dimension* N*. Soit* $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que le nombre de Hodge* $h^{p,q}$ *de* $\mathbf{H}^n(X^{\mathrm{an}};\mathbb{C})$ *soit non nul. Alors,* $(p,q) \in [0,n] \times [0,n]$*. Si* $n \geq N$*, alors* $(p,q) \in [n-N,N] \times [n-N,N]$*. De plus, si* X *est propre,* $p+q \leq n$ *et si* X *est lisse,* $p+q \geq n$*.*

Corollaire 3.4. — *La structure de Hodge sur* $\mathbf{H}^1(\mathbb{G}_m;\mathbb{Z})$ *est pure de poids* 2 *et le seul nombre de Hodge non nul est* $h^{1,1} = 1$*.*

3.3. Polarisation et variétés abéliennes. —

Définition 3.5. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{Z}(n)$ la structure de Hodge $\mathbb{Z}(n) = (2\imath\pi\mathbb{Z})^n \subset \mathbb{C}$ purement de poids $-2n$ et telle que $h^{-n,-n} = 1$.

Définition 3.6. — On note C l'élément de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m(\mathbb{R})$ correspondant à i *via* l'identification $\mathscr{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m(\mathbb{R}) = \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\star$. En termes de $\mathbb{R}$-structures de Hodge et après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, C agit sur $H^{p,q}$ par multiplication par i^{p-q}.

Définition 3.7. — Une polarisation d'une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge H pure de poids n est un homomorphisme $(\cdot,\cdot)\colon H\otimes H\to\mathbb{Z}(-n)$ tel que la forme bilinéaire réelle $(x,y)\to(2\imath\pi)^n(x,Cy)$ sur $H_{\mathbb{R}}$ soit symétrique et définie positive.

Définition 3.8. — Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{C}$. Notons $h^1(A)$ la $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids 1 $\mathbf{H}^1(A;\mathbb{Z})$. On définit une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids -1 $h_1(A;\mathbb{Z})$ de la façon suivante. Le réseau entier de $h_1(A;\mathbb{Z})$ est $\mathbf{H}_1(A(\mathbb{C}))=\pi_1(A(\mathbb{C}),0)$. On note $\alpha\colon\mathbf{H}_1(A(\mathbb{C}))\to\mathrm{Lie}(A(\mathbb{C}))$ l'inclusion évidente, où $\mathrm{Lie}(A(\mathbb{C}))$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $A(\mathbb{C})$ qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On pose $\mathscr{F}^0\mathbf{H}_1(A(\mathbb{C});\mathbb{C})=\ker(\alpha_{A,\mathbb{C}}\colon\mathbf{H}_1(A(\mathbb{C}))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}\to\mathrm{Lie}(A(\mathbb{C})))$, $\alpha_{A,\mathbb{C}}$ étant défini par la formule $x\otimes z\mapsto zx$. On pose $\mathscr{F}^1\mathbf{H}_1(A(\mathbb{C});\mathbb{C})=0$ et $\mathscr{F}^{-1}\mathbf{H}_1(A(\mathbb{C});\mathbb{C})=\mathbf{H}_1(A(\mathbb{C});\mathbb{C})$.

Le théorème suivant est essentiellement une reformulation des théorèmes caractérisant les variétés abéliennes parmi les tores complexes.

Théorème 3.9. — *Pour toute variété abélienne A, on a un isomorphisme canonique $h^1(A)=\mathbf{Hom}(h_1(A);\mathbb{Z}(0))$. Le foncteur covariant qui à une variété abélienne A associe $h_1(A)$ définit une équivalence de catégories entre la catégorie des variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ et la sous-catégorie pleine de $\mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$ formée des structures de Hodge sans torsion, pures de poids -1, de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$ et polarisables.*

4. 1-motifs

4.1. Schémas semi-abéliens. —

Définition 4.1. — Soit S un schéma noethérien. On appelle S-tore un S-schéma en groupes commutatif localement isomorphe, pour la topologie étale sur S, à un groupe de la forme $\mathbb{G}_m^d$. On appelle S-variété abélienne un S-schéma en groupes (commutatif) propre, lisse et géométriquement connexe. Un S-schéma semi-abélien est un S-schéma en groupes commutatif G tel qu'il *existe* une suite exacte courte $1\to T\to G\to A\to 1$ où avec T un S-tore et A une S-variété abélienne.

Remarque 4.2. — Si T est un S-tore, et $T=\ker(G\to A)$, dire que la suite $1\to T\to G\xrightarrow{\pi}A\to 1$ est exacte équivaut à dire que $G\to A$ est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie f.p.p.f., mais que l'on se rassure, d'après Hilbert 90, si T est S-déployé, cela revient à dire que localement pour la topologie de Zariski sur A, π admet une section. Dans le cas général, il suffit de prendre un revêtement étale fini de S pour déployer le tore T...

Proposition 4.3. — *Si G est un schéma semi-abélien sur $\mathbb{C}$, alors les schémas en groupes T et A sont déterminés à isomorphisme unique près*[(6)]. *Plus précisément, si $1\to T\to G\to A\to 1$ et $1\to T'\to G'\to A'\to 1$ définissent deux $\mathbb{C}$-schémas semi-abéliens, alors tout morphisme de $\mathbb{C}$-schémas en groupes induit un morphisme $T\to T'$ et un morphisme $A\to A'$.*

Démonstration. — Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que tout morphisme de $\mathbb{C}$-schémas en groupes $T\to A$ est trivial, où T est un $\mathbb{C}$-tore et A une variété abélienne sur $\mathbb{C}$. On peut clairement supposer que $T=\mathbb{G}_m$. Mézalor, on peut considérer le morphisme de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge induit $\mathbf{H}^1(A)_{\mathbb{Q}}\to\mathbf{H}^1(T)_{\mathbb{Q}}$. Ce morphisme est nul car $\mathbf{H}^1(A)$ est pure de poids 1 et $\mathbf{H}^1(T)$ pure de poids 2. Il s'ensuit que le morphisme induit $\mathbf{H}_1(T)\to\mathbf{H}_1(A)$ est nul car ce sont des groupes abéliens sans torsion. Puisque $\mathbf{H}_1(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}=\mathrm{Lie}(T(\mathbb{C}))$, on en déduit que la différentielle de $T(\mathbb{C})\to A(\mathbb{C})$ est nulle, et donc que $T\to A$ est le morphisme trivial. □

(6) Ce résultat est vrai dans un cadre plus général, mais on donne ici une démonstration basée sur la théorie de Hodge, qui permet néanmoins de montrer ce résultat pour $S=\operatorname{Spec}k$ avec k un corps de caractéristique 0.

4.2. 1-motifs. —

Définition 4.4. — Soit S un schéma. Un 1-motif sur S est la donnée d'un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{X}$ sur $S_{\text{ét}}$ localement isomorphe à un faisceau constant de la forme $\mathbb{Z}^n$ et d'un morphisme $[\mathscr{X} \to G]$ où G est un S-schéma semi-abélien. On note $\mathsf{1\text{-}mot}(S)$ la catégorie des 1-motifs sur S et on définit la catégorie des 1-isomotifs sur S comme étant $\mathsf{1\text{-}isomot}(S) = \mathsf{1\text{-}mot}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

À partir de maintenant, on suppose que $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

Théorème 4.5. — *On peut définir un foncteur de réalisation $T_{\mathbb{Z}}\colon \mathsf{1\text{-}mot}(\mathbb{C}) \to \mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$ qui est pleinement fidèle et d'image essentielle la catégorie des $\mathbb{Z}$-structures de Hodge sans torsion H de type $\{(0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1)\}$ telles que $\mathrm{Gr}^W_{-1} H$ soit polarisable.*

Démonstration. — Soit $M = \left[\mathscr{X} \xrightarrow{u} G\right]$ un 1-motif sur $\mathbb{C}$. On identifie $\mathscr{X}$ à un groupe abélien libre de type fini X, et u à un morphisme de groupes $X \xrightarrow{u} G(\mathbb{C})$ où G est un $\mathbb{C}$-schéma semi abélien. On a ainsi une extension $0 \to T \to G \to A \to 0$. On définit un groupe abélien de type fini de sans torsion $T_{\mathbb{Z}}(M)$ de sorte que dans le diagramme suivant le carré de droite soit cartésien :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{H}_1(G;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[r, "\exp"] & G(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{H}_1(G;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & T_{\mathbb{Z}}(M) \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "\alpha"] & X \arrow[r] \arrow[u, "u"] & 0 \end{tikzcd}$$

On peut définir la filtration par le poids sur $T_{\mathbb{Z}}(M)$ (la filtration est définie sur $\mathbb{Z}$ et non seulement sur $\mathbb{Q}$) pour les formules suivantes :

$$\begin{cases} W_0(T_{\mathbb{Z}}(M)) &= T_{\mathbb{Z}}(M) \\ W_{-1}(T_{\mathbb{Z}}(M)) &= \ker\beta \simeq \mathbf{H}_1(G(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \\ W_{-2}(T_{\mathbb{Z}}(M)) &= \ker(\mathbf{H}_1(G(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \to \mathbf{H}_1(A(\mathbb{C});\mathbb{Z})) \\ W_{-3}(T_{\mathbb{Z}}(M)) &= 0 \end{cases}$$

On note $\alpha_{\mathbb{C}}\colon T_{\mathbb{C}}(M) \to \mathrm{Lie}(G)$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire évidente. On peut alors définir la filtration de Hodge sur $T_{\mathbb{C}}(M) = T_{\mathbb{Z}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathscr{F}^{-1}(T_{\mathbb{C}}(M)) &= T_{\mathbb{C}}(M) \\ \mathscr{F}^{0}(T_{\mathbb{C}}(M)) &= \ker(\alpha_C\colon T_{\mathbb{C}}(M) \to \mathrm{Lie}(G)) \\ \mathscr{F}^{1}(T_{\mathbb{C}}(M)) &= 0 \end{cases}$$

Clairement, $T_{\mathbb{Z}}(M)$ est un groupe abélien sans torsion et la filtration par le poids à 3 crans. Commençons par étudier les gradués et vérifions que la filtration de Hodge induit bien une structure de Hodge pure sur chacun des gradués. Nous allons décrire les isomorphismes suivants de groupes abéliens :

$$\begin{cases} \mathrm{Gr}^W_0(T_{\mathbb{Z}}(M)) &= X \\ \mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathbb{Z}}(M)) &= H_1(A(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \\ \mathrm{Gr}^W_{-2}(T_{\mathbb{Z}}(M)) &= H_1(T(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \end{cases}$$

On a clairement $\mathrm{Gr}^W_0 = X$. Pour Gr^W_{-1} et Gr^W_{-2}, cela résulte simplement du fait que la suite $0 \to \mathbf{H}_1(T(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \to \mathbf{H}_1(G(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \to \mathbf{H}_1(A(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ est exacte : cela résulte de la suite exacte longue d'homotopie en vertu de la connexité de $T(\mathbb{C})$ et du fait que $\pi_2(A(\mathbb{C});0) = 0$ (en effet $\pi_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z},0) = 0$). Il reste donc à décrire les structures de Hodge sur ces gradués par le poids.

Commençons par montrer que l'on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-structures de Hodge et que par conséquent que $\mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathbb{Z}}(M))$ est polarisable :

$$\mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathbb{Z}}(M)) = h_1(A)$$

Pour cela, il suffit d'appliquer le lemme du serpent dans le diagramme suivant pour obtenir l'isomorphisme $\ker_{A,\mathbb{C}} = W_{-1}(T_{\mathbb{C}}(M)) \cap \mathscr{F}^0(T_{\mathbb{C}}(M))$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & W_{-1}(T_{\mathbb{C}}(M)) \cap \mathscr{F}^0(T_{\mathbb{C}}(M)) \arrow[r] \arrow[d] & \ker \alpha_{A,\mathbb{C}} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{H}_1(T(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{T,\mathbb{C}}", "\sim"'] & \mathbf{H}_1(G(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{F,\mathbb{C}}"] & \mathbf{H}_1(A(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{A,\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lie}(T) \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme implique aussi que $W_{-2}(T_{\mathbb{C}}(M)) \cap \mathscr{F}^0(T_{\mathbb{C}}(M)) = 0$ et par conséquent, on a une structure de Hodge sur $\mathrm{Gr}^W_{-2}(T_{\mathbb{Z}}(M))$, et elle est pure de poids 2 et de type $(-1,-1)$.

Étudions maintenant $\mathrm{Gr}^W_0(T_{\mathbb{Z}}(M))$. Notons V l'image de $\mathscr{F}^0(T_{\mathbb{C}}(M))$ dans $X \otimes \mathbb{C}$. On veut montrer que $V = X \otimes \mathbb{C}$. Pour cela, il suffit d'étudier le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & W_{-1}\mathscr{F}^0 \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathscr{F}^0 \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{H}_1(G(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & T_{\mathbb{Z}}(M) \otimes \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes \mathbb{C} \arrow[r] & 0 \\
 & \operatorname{coker} i \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Comme l'application $\mathbf{H}_1(G(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Lie}(G)$ est surjective, $\operatorname{coker} i \to \mathrm{Lie}(G)$ est surjective, et donc $V \to X \otimes \mathbb{C}$ aussi. Il en résulte que $\mathrm{Gr}^W_0(T_{\mathbb{C}}(M))$ est une structure de Hodge pure de poids 0 de type $(0,0)$.

On a donc défini le foncteur $T_{\mathbb{Z}} \colon \mathsf{1\text{-}mot}(\mathbb{C}) \to \mathrm{MHS}_{\mathbb{Z}}$. Réciproquement, soit H une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge mixte sans torsion $\{(0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1)\}$. On note G le groupe analytique complexe

$$W_{-1}(H_{\mathbb{Z}}) \backslash W_{-1}(H_{\mathbb{C}}) / (\mathscr{F}^0 \cap W_{-1}(H_{\mathbb{C}})$$

et A le groupe analytique complexe

$$\mathrm{Gr}^W_{-1}(H_{\mathbb{Z}}) \backslash \mathrm{Gr}^W_{-1}(H_{\mathbb{C}}) / (\mathscr{F}^0 \, \mathrm{Gr}^W_{-1}(H_{\mathbb{C}})$$

qui est une variété abélienne car $\mathrm{Gr}^W_{-1} H$ est polarisable. On voit qu'en tant que groupe analytique complexe G est extension de A par un tore T tel que $\mathbf{H}_1(T) = \mathrm{Gr}^W_{-2}(T)$. Pour conclure, il suffit d'algébriser cette extension ce qui est réalisé dans le lemme suivant. ☐

Lemme 4.6. — *Soit A une variété abélienne et T un $\mathbb{C}$-tore. Le foncteur $G \to G^{\mathrm{an}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des extensions G de A par T et la catégorie des extensions H de A^{an} par T^{an}.*

Ce lemme est clairement une conséquence de la proposition plus générale suivante :

Proposition 4.7. — *Soit V une variété projective (lisse) sur $\mathbb{C}$ et T un $\mathbb{C}$-tore. Le foncteur qui à un T-torseur X sur V associe le T^{an}-torseur X^{an} sur V^{an} est une équivalence de catégories.*

Démonstration. — Tout d'abord un peut supposer que $T = \mathbb{G}_m$. En effet, si G et H sont deux Groupes sur V, tout $G \times_V H$-torseur X se met de façon canonique sous la forme $X' \times_V X''$ avec X' un G-torseur sur V et X'' un H-torseur sur V, et l'on a $X' = X/H$ et $X'' = X/G$, et la situation est parallèle pour les torseurs sous des groupes analytiques sur V^{an}.

Si X est un schéma (resp. une variété analytique sur $\mathbb{C}$), on peut identifier canoniquement la catégorie des fibrés vectoriels de rang n sur X à la catégorie des $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur X (resp. celle des $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$-torseurs sur X) en associant à un fibré vectoriel E/X le $\mathbf{GL}_n$-torseur de ses bases locales. Dans le cas $n = 1$, on obtient une correspondance entre les $\mathbb{G}_m$-torseurs et les faisceaux inversibles.

On peut caractériser les faisceaux inversibles (et plus généralement les fibrés vectoriels) en termes internes à la $\otimes$-catégorie des faisceaux cohérents de Modules sur X (dans le cadre analytique ou algébrique). D'après les théorèmes G.A.G.A. de Serre, si X est une variété algébrique projective et lisse sur $\mathbb{C}$, le foncteur $\mathscr{M} \to \mathscr{M}^{\mathrm{an}}$ induit une $\otimes$-équivalence de la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X vers la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur X^{an}, d'où le résultat. □

On peut déduire du théorème précédent des renseignements intéressants sur les 1-motifs sur $\mathbb{C}$:

Théorème 4.8. — *Tout* 1*-motif (resp.* 1*-isomotif) sur $\mathbb{C}$ est muni d'une filtration croissante naturelle par le poids. Les morphismes de* 1*-motifs (resp.* 1*-isomotifs) sur $\mathbb{C}$ sont strictement compatibles à la filtration par le poids. De plus, la catégorie* 1-isomot($\mathbb{C}$) *est abélienne et les gradués par le poids des* 1*-isomotifs sur $\mathbb{C}$ sont des objets semi-simples. Le poids -2 correspond aux $\mathbb{C}$-tores, le poids -1 correspond aux variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ et le poids 0 correspond aux motifs d'Artin*[7]*. En particulier, la catégorie des variétés abéliennes à isogénie près (c'est-à-dire la catégorie des* 1*-isomotifs concentrés en poids -1) est semi-simple.*

Démonstration. — La seule chose qu'il faut démontrer est qu'avec des coefficients rationnels, les gradués par le poids sont semi-simples. En poids 0 et -2, c'est évident. Donnons-nous une suite exacte $0 \to H' \xrightarrow{i} H \to H'' \to 0$ de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge pures de poids -1. Supposons que H est polarisée et donnons nous une polarisation $\varphi\colon H \otimes H \to \mathbb{Q}(1)$. Par adjonction, on en déduit un isomorphisme $\varphi\colon H \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(H, \mathbb{Q}(1))$ entre $\mathbb{Q}$-structures de Hodge pures de poids -1. La restriction d'une polarisation à une sous-structure de Hodge est encore une polarisation, puisque c'est le cas pour les produits scalaires au niveau des $\mathbb{R}$-vectoriels, ainsi, dans le diagramme suivant, la flèche du bas est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] & \mathbf{Hom}(H, \mathbb{Q}(1)) \arrow[d, "\mathbf{Hom}(i,\mathbb{Q}(1))"] \\ H' \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \mathbf{Hom}(H', \mathbb{Q}(1)) \end{tikzcd}$$

On a ainsi construit une rétraction $H \to H'$ de l'inclusion $H' \to H$, ce qui permet de conclure. □

Bibliographie

[B] **Laurent Berger**. Introduction à la géométrie complexe : Théorie de Hodge. *Groupe de travail « Symétrie Miroir, d'après Kontsevich », ENS (1998-1999).*
`http://math.polytechnique.fr/cmat/auroux/math/gtmiroir/`

[7] La catégorie des motifs d'Artin sur un corps k est obtenue en "rendant additive" la catégorie des k-schémas étales *via* les correspondances algébriques et en prenant son enveloppe karoubienne. Sur un corps algébriquement clos, cette catégorie s'identifie à la catégorie des groupes abéliens libres de type fini ou celle des $\mathbb{Q}$-vectoriels de dimension finie si on a tensorisé avec $\mathbb{Q}$.

[D1] **Pierre Deligne**. Théorie de Hodge I. *Actes du Congrès International des mathématiciens*, Nice (1970).

[D2] **Pierre Deligne**. Théorie de Hodge II. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **40** (1971), pages 5-58.

[D3] **Pierre Deligne**. Théorie de Hodge III. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **44** (1974), pages 5-78.

[Weil] **André Weil**. Introduction à l'étude des variétés kählériennes. *Actualités scientifiques et industrielles*, **1267** (1958). Publications de l'institut mathématique de l'université de « Nancago ».

Les 8 et 15 janvier 2002

JOËL RIOU, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *Url :* `http://www.eleves.ens.fr/home/jriou/`
• *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~riou/`
• *E-mail :* `riou@math.jussieu.fr`