Première année de Magistère de Mathématiques Fondamentales et Appliquées et d'Informatique

Propriété (T) de KAZHDAN pour des groupes agissant sur les sommets d'un immeuble $\tilde{A}_2$

Jérôme PLÛT Joël RIOU
Exposé de maîtrise sous la direction de Vincent LAFFORGUE

Mercredi 7 juin 2000

Table des matières

Résumé

De façon générale, beaucoup de groupes peuvent être vus comme des groupes d'automorphismes de certaines structures mathématiques. Ici, nous allons nous intéresser aux groupes qui agissent sur des immeubles $\tilde{A}_2$. L'objet de cet exposé est d'étudier les représentations *unitaires* de ces groupes dans des espaces de Hilbert. Nous allons ainsi en construire des représentations unitaires dans des espaces de densités, en analogie avec ce que l'on peut faire sur des arbres homogènes. Enfin, nous allons calculer le spectre de la somme des générateurs de ce groupe dans la $C^\star$-algèbre pleine en vue d'établir la propriété (T) de KAZHDAN. De plus, nous mentionnons une autre preuve particulièrement élégante de la propriété (T) de Kazhdan obtenue par d'autres méthodes qui utilisent des propriétés du laplacien.

1 Immeubles $\tilde{A}_2$

1.1 Complexes simpliciaux

Définition 1.1 (Complexe simplicial) *Soit S un ensemble (de sommets). Un complexe simplicial est un ensemble X de parties finies non vides (appelées simplexes) de S tel que pour tout $s \in S$, $\{s\}$ est un simplexe, toute partie non vide d'un simplexe est un simplexe et tout simplexe est contenu dans un simplexe maximal (pour l'inclusion).*

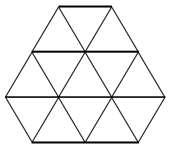
La *dimension* de X est $\sup_{\sigma \in X} |\sigma| - 1$. On appelle *chambre* un simplexe maximal.

Définition 1.2 (Morphismes) *Si X et Y sont deux complexes simplicaux, on définit l'ensemble $\boldsymbol{Hom}(X,Y)$ des morphismes de X vers Y comme l'ensemble des applications de l'ensemble des sommets de X vers l'ensemble des sommets de Y telles que l'image de tout simplexe de X soit un simplexe de Y.*

Définition 1.3 (Complexe simplicial typé) *Un complexe simplicial typé par un ensemble I est un complexe simplicial X muni d'une fonction $\tau : S \longrightarrow I$ (où S désigne l'ensemble des sommets de X) telle que pour toute chambre C de X, τ induise une bijection de C vers I.*

1.2 Appartement $\tilde{A}_2$

Dans la définition des immeubles $\tilde{A}_2$ interviendra un complexe simplicial très particulier qui est l'appartement $\tilde{A}_2$ que l'on notera W. Si on a un pavage du plan par des triangles équilatéraux, on peut noter S l'ensemble des sommets de ces triangles, et les simplexes du complexe simplicial W sont les ensembles (non vides) de sommets contenus dans un des triangles équilatéraux qui constituent ce pavage. De façon plus formelle, on peut poser $S = \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}(1,1,1)$ et dire qu'un simplexe de W est un ensemble σ constitués d'éléments voisins deux-à-deux (x et y sont voisins dans S si et seulement si $x - y \in \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$).



On peut munir W d'une structure de complexe simplicial typé par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par $\forall (x,y,z) \in S$, $\tau(x,y,z) = x+y+z \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On appelle ainsi W l'appartement $\tilde{A}_2$ (le nom provient du fait que cet appartement est lié au groupe de COXETER $\tilde{A}_2$ qui correspond à la matrice de Coxeter $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, cf. [Cart]).

1.3 Immeubles $\tilde{A}_2$

Définition 1.4 (Immeuble $\tilde{A}_2$) *On appelle immeuble $\tilde{A}_2$ un complexe simplicial (non vide) X tel qu'il existe un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X, que l'on appelle système d'appartements, satisfaisant les axiomes suivants :*

- *Tout appartement est isomorphe (comme complexe simplicial) à l'appartement $\tilde{A}_2$ standard W ;*
- *Si A et B sont deux simplexes de X, il existe un appartement contenant à la fois A et B ;*
- *Si Σ et Σ' sont deux appartements, il existe un isomorphisme de complexes simpliciaux $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ tel que $\varphi(\sigma) = \sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma \cap \Sigma'$.*

Remarque— Dans la définition d'un immeuble, il est question de l'existence d'un système d'appartements qui satisfasse ces axiomes, mais il peut y avoir plusieurs tels systèmes d'appartements, et en fait, dans [Bro1], il est démontré qu'il existe un système maximal d'appartements, et que, finalement, pour $\mathcal{A}$, on peut prendre l'ensemble de tous les sous-complexes de X isomorphes à W, et c'est ce que l'on fait à partir de maintenant.

Théorème 1.1 (Rétractions) *Pour tout appartement Σ_0 de X, et toute chambre C de Σ_0, il existe un unique morphisme $\rho : X \longrightarrow \Sigma_0$, tel que la restriction de ρ à l'appartement Σ_0 soit l'identité, et tel que la restriction de ρ à tout appartement Σ contenant C soit un isomorphisme $\Sigma \longrightarrow \Sigma_0$.*

Démonstration— On fixe une chambre C dans l'appartement Σ_0. Soit s un sommet de X. D'après la définition d'un immeuble, il existe un appartement Σ qui contient s et C. Il est clair qu'il existe un unique isomorphisme $\varphi_\Sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma_0$ qui fixe point par point C. On ne peut ainsi que poser $\rho(s) = \varphi_\Sigma(s)$. Il s'agit de montrer que $\varphi_\Sigma(s)$ ne dépend pas de Σ. Si Σ' est un autre appartement qui contienne C et s, on sait qu'il existe un isomorphisme $\psi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$ qui fixe point par point C et s. Il vient alors : $\varphi_\Sigma \circ \psi$ est un isomorphisme $\Sigma' \longrightarrow \Sigma_0$ qui fixe C, donc $\varphi_{\Sigma'} = \varphi_\Sigma \circ \psi$. Finalement $\varphi_\Sigma(s) = \varphi_\Sigma(\psi(s)) = \varphi_{\Sigma'}(s)$. $\lhd$

Corollaire 1.1 *Tout immeuble $\tilde{A}_2$ X peut être typé par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et si τ est un typage de X, les autres typages sont les fonctions $\sigma \circ \tau$ où σ est une permutation de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Démonstration— Si ψ est un isomorphisme entre un appartement Σ_0 de l'immeuble X et l'appartement standard W (typé grâce à la fonction τ), il est immédiat d'après le théorème précédent que $\tau \circ \psi \circ \rho$ est une fonction de typage pour X. Pour trouver tous les typages, fixons une chambre C, si τ et τ' sont deux typages de X, il existe une permutation σ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ telle que pour tout $s \in C$, $\sigma \circ \tau(s) = \tau'(s)$. $\sigma \circ \tau$ et τ' sont deux typages qui coïncident sur une chambre, donc par le même type d'argument d'unicité que pour la preuve de l'existence des rétractions, on a $\tau' = \sigma \circ \tau$. $\lhd$

Par abus de notation, X désignera parfois l'ensemble des sommets de X.

Si $g \in \mathbf{Aut}(X)$, G induit une permutation des types ; on a donc un morphisme canonique $\mathbf{Aut}(X) \to \mathfrak{S}_3$.

Définition 1.5 (Automorphismes *type-rotative*) *$g \in \mathbf{Aut}(X)$ est dit* type-rotative *s'il existe $c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tel que, pour tout $x \in X$,*

$$\tau(gx) = \tau(x) + c.$$

On notera $\mathbf{Aut}_{tr}(X)$ l'ensemble des automorphismes type-rotative *de X. C'est l'image réciproque sous le morphisme précédent du groupe alterné $\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

1.4 Voisins d'un sommet d'un immeuble $\tilde{A}_2$

On peut mettre sur l'ensemble des sommets d'un immeuble $\tilde{A}_2$ X une structure de graphe (qui caractérise en fait l'immeuble) en disant que deux sommets distincts s et t sont voisins si et seulement si $\{s,t\}$ est un simplexe de X. Dans les immeubles $\tilde{A}_2$ ce graphe une structure très particulière. En effet, grâce à la fonction de typage, on peut partionner les voisins de s en deux ensembles P et L. On peut de plus définir une relation d'incidence sur $P \coprod L$, deux voisins distincts x et y étants incidents si et seulement si x et y sont voisins c'est-à-dire que $\{s,x,y\}$ est un simplexe de X. On appelle *points* les éléments de P, *droites* les éléments de L, et on dit que $x \in P$ est situé sur $\mathcal{D} \in L$ si x et $\mathcal{D}$ sont incidents.

Propriété 1.1 *Deux points distincts sont situés sur une unique droite. Deux droites distinctes se coupent en un unique point.*

Démonstration— Soient x et y deux points distincts. Supposons que deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent les deux points x et y. On sait que $\{s,x,\mathcal{D}\}$ et $\{s,y,\mathcal{D}'\}$ sont deux chambres de X ; elles sont donc contenues dans un même appartement. Or dans un appartement, un sommet s ne possède que six voisins, disposés de telle façon que dans cet appartement il n'existe qu'une seule droite qui puisse convenir, donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Pour l'existence, il suffit de voir qu'il existe un appartement qui contienne les deux simplexes $\{s,x\}$ et $\{s,y\}$. L'énoncé dual résulte du choix arbitraire fait pour distinguer les deux types de voisins de s. $\lhd$

Définition 1.6 (Immeubles $\tilde{A}_2$ épais) *Un immeuble $\tilde{A}_2$ est dit* épais *si toute arête est contenue dans au moins trois chambres.*

Si l'immeuble X est épais, alors on voit facilement que le complémentaire d'une droite contient au moins deux points. (En effet, une droite contient alors au moins trois points, et l'intersection de deux droites distinctes est un singleton, donc une droite privée de son intersection avec une autre contient au moins deux points.) Ainsi, on a vérifié que dans un immeuble $\tilde{A}_2$ épais quelconque, les voisins (P,L) d'un sommet s vérifient les axiomes d'un plan projectif.

Remarque– Dans la suite, on supposera toujours que l'ensemble des voisins d'un sommet dans l'immeuble est un ensemble fini. Dans ce contexte, on sait[1] qu'il existe un entier $q \geq 2$ tel que :

- $|P| = |L| = q^2 + q + 1$;
- chaque droite contient exactement $q + 1$ points ;
- chaque point appartient à exactement $q + 1$ droites.

1.5 Exemple de l'immeuble $\mathbf{PGL}_3(K)/\mathbf{PGL}_3(\mathcal{O})$

On s'intéresse ici au quotient $\mathbf{PGL}_3(K)/\mathbf{PGL}_3(\mathcal{O})$, où K est un corps local non archimédien et $\mathcal{O}$ son sous-anneau compact maximal. On commence par rappeler quelques définitions.

1.5.1 Rappels sur les corps locaux

On énoncera ici sans démonstration quelques résultats sur les corps locaux. Les démonstrations se trouvent dans l'ouvrage de Jean-Pierre Serre [Ser].

Valuation – On appelle *valuation* sur un corps K tout morphisme surjectif $v : K^\star \to \mathbb{Z}$, tel que, pour tous $x, y \in K$:

$$v(x+y) \geq \min\left(v(x), v(y)\right)$$

On pose alors $v(0) = +\infty$.

Soit K un corps, v une valuation sur K. Alors $\mathcal{O} = \{x \in K, v(x) \geq 0\}$ est un sous-anneau de K. Soit $\pi \in K$ tel que $v(\pi) = 1$. Un tel π est appelé *uniformisante* de K. $\mathcal{O}$ est un anneau principal, dont les idéaux sont les $\pi^n\mathcal{O}, n \in \mathbb{N}$; il a un unique idéal premier $\pi\mathcal{O}$. On note $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ le corps résiduel de O. Soit $0 < r < 1$; alors l'application

$$\begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & r^{v(x)} \end{array}$$

est une valeur absolue sur K.

Si v est une valuation sur un anneau intègre A, à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors en appelant K le corps des fractions de A, v se prolonge en une valuation sur K. On en déduit deux exemples de corps valués :

- Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier : la valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$ se prolonge en une valuation v_p sur $\mathbb{Q}$. L'anneau $\mathcal{O}$ est alors le localisé en p de $\mathbb{Z}$; son corps résiduel est $\mathbb{F}_p$.
- Soit k un corps ; l'anneau de polynômes $k[t]$ est alors naturellement muni d'une valuation v, qui se prolonge donc au corps $k(t)$. Le corps résiduel de $k(t)$ pour cette valuation est k.

Complétion – On munit le corps K de la topologie induite par la valuation v. On remarque que K est localement compact si, et seulement si, k est fini et K est complet ; ceci est encore équivalent à la compacité de $\mathcal{O}$. On note $\hat{K}$ le complété de K ; la valuation v se prolonge alors en une valuation $v : \hat{K} \to \mathbb{Z}$. On note $\hat{\mathcal{O}}$ l'anneau $\left\{x \in \hat{K}, v(x) \geq 0\right\}$.

Si K est complet, alors $\mathcal{O}$ est son sous-anneau compact maximal.

On note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique, et $\mathbb{Z}_p$ le complété de $\mathbb{Z}$. On a alors :

$$\mathbb{Z}_p = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

Le complété de $k(t)$ est le corps $k((t))$ des séries formelles en t, à coefficient dans k, et comportant un nombre fini de termes de degré négatif.

On appelle *corps local* tout corps valué, localement compact pour la norme induite par la valuation.

On sait en outre qu'une extension finie L d'un corps local K peut être munie d'une valuation qui en fait encore un corps local.

1.5.2 Réseaux dans K^n

On se fixe un corps local K ; on note v la valuation sur K, $\mathcal{O} = \{x \in K, |x| \leq 1\}$ son sous-anneau compact maximal, et π une uniformisante de K. On appelle k le corps résiduel de $\mathcal{O}$, q son cardinal, et on pose, pour $x \in K$,

$$|x| = q^{-v(x)}.$$

On note en outre μ une mesure de Haar sur K, normalisée pour que $\mu(\mathcal{O}) = 1$, et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de K^n. On appelle μ_n la mesure produit de n copies de μ sur K^n.

[1] Vu en TD d'algèbre 1.

Définition 1.7 (Réseau) *Un* réseau *dans K^n est un sous-$\mathcal{O}$-module L de K^n, libre de rang n, soit :*

$$L = \mathcal{O}v_1 + \ldots + \mathcal{O}v_n,$$

où $v_1, \ldots v_n$ est une K-base de K^n.

Un exemple de réseau est le réseau standard

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{O}e_1 + \ldots + \mathcal{O}e_n.$$

On note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des réseaux dans K^n. On remarque que $\mathbf{GL}_n(K)$ agit transitivement sur $\mathcal{L}_n$; en outre, le stabilisateur du réseau standard est $\mathbf{GL}_n(\mathcal{O})$, ce qui montre :

$$\mathcal{L}_n = \mathbf{GL}_n(K)/\mathbf{GL}_n(O).$$

Contrairement aux réseaux dans $\mathbb{R}^n$, les réseaux dans K^n ont un volume non nul. En effet : $\mu_n(\mathcal{O}^n) = 1$, et si $g \in \mathbf{GL}_n(K)$ et L est un réseau, alors $\mu_n(g(L)) = |\det g|\, \mu_n(L)$. En particulier, si $a \in K$, alors $\mu_n(aL) = |a|^n\, \mu_n(L)$.

Lemme 1.1 *Soinet H, K deux sous-groupes d'un groupe G, et soient $g_1, g_2 \in G$. Alors :*

$$\{(gg_1h, gg_2k), g \in G, h \in H, k \in K\} = \{(a, ac), a \in G, c \in Hg_1^{-1}g2K\}.$$

Ceci identifie le double quotient $H\backslash G/K$ avec les orbites de $G/H \times G/K$ sous l'action diagonale de G.

Démonstration— On a $(gg_1h, gg_2k) = \big(gg_1h, gg_1h(h^{-1}g_1^{-1}g_2k)\big)$, soit encore, en posant $g' = gg_1h \in H\backslash G/K$, $(gg_1h, gg_2k) = \big(g', g'(h^{-1}g_1^{-1}g_2k)\big)$. ◁

1.5.3 Le théorème de diagonalisation

On pose ici $G = \mathbf{GL}_n(K)$ et $H = \mathbf{GL}_n(\mathcal{O})$. On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Soient L_1, L_2 deux réseaux dans K^n. Il existe alors une base $v_1, \ldots v_n$ de K^n et un unique n-uplet d'entiers $j_1 \leq j_2 \ldots \leq j_n \in \mathbb{Z}$, tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} L_1 & = & \mathcal{O}v_1 & + & \ldots & + & \mathcal{O}v_n \\ L_2 & = & \mathcal{O}\pi^{j_1}v_1 & + & \ldots & + & \mathcal{O}\pi^{j_n}v_n \end{array} \right. \tag{1}$$

Remarque 1.1 *1. On remarque que deux matrices distinctes de la forme*

$$\Delta(j_1, \ldots, j_n) = \begin{pmatrix} \pi^{j_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \pi^{j_n} \end{pmatrix}, j_1 \leq \ldots j_n,$$

ne sont pas équivalentes sous H.

2. Le théorème précédent est équivalent, d'après le lemme 1.1, à l'assertion suivante :

$$H\backslash G/H = \{H\Delta(j_1, \ldots, j_n)H, j_i \in \mathbb{Z}, j_1 \leq \cdots \leq j_n\}.$$

Soit $g \in G$, et x un coefficient de G de norme maximale. Par des opérations élémentaires sur des lignes et des colonnes de G et en se limitant à des multiplications à gauche et à droite par des matrices appartenant à H, on se ramène à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \pi^{j_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \star & \ldots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \ldots & \star \end{pmatrix}.$$

Le théorème s'obtient alors par récurrence.

1.5.4 Le graphe de $\mathbf{GL}_n(K)$

Définition 1.8 (L'immeuble $\tilde{A}_{n-1}$ de $\mathbf{GL}_n(K)$) *On appelle* immeuble $\tilde{A}_{n-1}$ *de* $\boldsymbol{GL}_n(K)$ *le quotient* $X = \mathcal{L}_n/K^\star$, *soit encore :*

$$X = \boldsymbol{PGL}_n(K)/\boldsymbol{PGL}_n(\mathcal{O}).$$

Définition 1.9 (Voisins) *Soient* $\bar{x}, \bar{y}$ *deux points de* X. *Ils sont dits* voisins *dans* X *si l'on peut trouver des représentants* $x \in \bar{x}$ *et* $y \in \bar{y}$ *tels que :*

$$\pi x \subsetneq y \subsetneq x \tag{2}$$

On remarque que cela définit un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est X ; en effet, si $\pi x \subsetneq y \subsetneq x$, alors $\pi y \subsetneq \pi x \subsetneq y$, avec $\pi x \in \bar{x}$.

On utilisera désormais indifféremment la lettre x pour noter un réseau ou sa classe dans X.

Soit x un point de X. La fonction volume μ_n n'est pas constante sur x, puisque, pour $a \in K^\star$, $\mu_n(ax) = |a|^n \mu_n(x)$. Cependant, le logarithme en base q de cette fonction est constant modulo n ; cela définit une fonction $\tau : X \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 1.10 (Volume projectif) *On appelle* volume projectif *cette fonction* τ.

Si x, y sont donnés par (1), alors on a $\pi x \subset y \subset x$ si, et seulement si, $j_1 \leq \ldots \leq j_n$, et l'inclusion est stricte si, et seulement si, $j_1 = 0$ et $j_n = 1$. En notant m le plus grand indice tel que $j_m = 0$, il vient alors :

$$\tau(y) = \tau(x) + m \mod n$$

On peut également voir x comme un groupe abélien : on a alors, pour $x = \oplus \mathcal{O} v_i$, $x/\pi x = \oplus(\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})v_i$, soit $x/\pi x = k^n$ où k est le corps résiduel de $\mathcal{O}$.

La relation (2) s'écrit alors :

$$\{0\} \subsetneq y/\pi x \subsetneq x/\pi x$$

Il y a donc une correspondance bijective entre les voisins de type m de x et les sous-espaces de dimension m de k^n.

On note d la distance dans le graphe X. On admettra le résultat suivant, démontré dans [Steg] :

Proposition 1.1 *Soient* $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *deux points de l'immeuble* X. *Alors*

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = min\{m, \pi^m x \subsetneq y \subsetneq x \text{ pour un } x \in \bar{x} \text{ et un } y \in \bar{y}\}.$$

1.5.5 Simplexes dans l'immeuble $\tilde{A}_{n-1}$ de $\mathbf{GL}_n(K)$

Définition 1.11 (Simplexes de X) *Une partie (non vide)* S *de* X *est un* simplexe *si pour tous* $x, y \in S$, *on a* $d(x, y) \leq 1$.

Si $\{x_1, \ldots, x_j\}$ est un simplexe dans X, on admettra qu'on peut ordonner les x_i de sorte que :

$$\pi x_j \subsetneq x_1 \ldots \subsetneq x_{j-1} \subsetneq x_j$$

$(x_1/\pi x_j, \ldots x_j/\pi x_j = k^n)$ est donc un drapeau de k^n, de longueur j ; cela prouve qu'un simplexe de X est de dimension au plus $n-1$.

Définition 1.12 (Appartements $\tilde{A}_{n-1}$) *Soit* $(v_1, \ldots v_n)$ *une base de* K^n. *On appelle* appartement *la partie* $A(v_1, \ldots, v_n)$ *de* X *définie par :*

$$A(v_1, \ldots v_n) = \left\{\pi^{j_1}\mathcal{O}v_1 + \ldots + \pi^{j_n}\mathcal{O}v_n, j_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

On note qu'un appartement est isomorphe à $\mathbb{Z}^n/(1, \ldots 1)\mathbb{Z}$. Le théorème de diagonalisation implique que toute paire de points de X est contenue dans un appartement commun.

On admettra ici le résultat suivant, pour $n = 3$:

Théorème 1.3 *Le quotient* $\boldsymbol{PGL}_3(K)/\boldsymbol{PGL}_3(\mathcal{O})$, *muni des simplexes et des appartements définis ci-dessus, est un immeuble* $\tilde{A}_2$, *typé par* τ.

2 Le bord d'un immeuble ou d'un arbre

2.1 Définitions

On fixe un sommet x de l'immeuble, qu'on appellera parfois point-base.

voisins plus éloignés d'un sommet x fixé (On appellera souvent ce sommet point-base). On peut supposer (quitte à effectuer une rotation des types) que x est de type 0. Soit y un autre sommet de l'immeuble X. Il existe un appartement Σ qui contient les sommets x et y. On appelle *enveloppe convexe* des sommets x et y l'ensemble des sommets de Σ qui font partie d'un chemin de longueur minimale entre x et y. On peut montrer que cette enveloppe convexe ne dépend pas de l'appartement Σ choisi. On peut définir la position relative de y par rapport à x au moyen d'un couple d'entiers naturels (m, n) de la façon suivante : l'enveloppe convexe de x et y a la forme d'un parallélogramme $\mathcal{P}$; on peut attribuer à chacun des côtés issus de x de ce parallélogramme l'adjectif *gauche* ou *droit* suivant le type du plus proche de voisin de x qui s'y trouve. m désigne alors la longueur du côté droit de $\mathcal{P}$, et n celle du côté gauche. L'enveloppe convexe de x et y s'identifie ainsi canoniquement à une fonction de $[\![0, m]\!] \times [\![0, n]\!]$ dans X.

Définition 2.1 *Soit x un point base. Pour tous $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $S_{m,n}(x)$ l'ensemble des sommets y de X dont la position relative par rapport à x est (m, n).*

Définition 2.2 *Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $(m', n') \in \mathbb{N}^2$ tels que $m' \leq m$ et $n' \leq n$, on définit une projection $p_{m',n'}$: $S_{m,n}(x) \longrightarrow S_{m',n'}(x)$ qui à y associe le point z de l'enveloppe convexe de x et y, situé à une position relative (m', n') de x (voir la figure 2.1).*

Définition 2.3 (Secteur) *Un* secteur *de point-base x dans un appartement Σ est un ensemble de sommets de Σ qui se trouve dans l'angle de $\frac{\pi}{3}$ formé par deux droites constituant le réseau de triangles équilatéraux.*

Un secteur *de point-base x dans un immeuble X est un secteur de point-base x dans un appartement Σ de X.*

Ainsi, un secteur S est délimité par les murs w et w', passant respectivement par (x, x') et (x, x''), où (x, x', x'') est une chambre dans Σ. Si $\tau(x)' = \tau(x) + 1$ (respectivement $\tau(x)' = \tau(x) - 1$) mod. 3, w' est appelé *mur droit* (respectivement *mur gauche*) de S.

Dans chaque appartement, pour tout point-base x, il existe six secteurs de point-base x. Et dans un immeuble $\tilde{A}_2$, les secteurs sont l'ensemble des parties de X qui sont des secteurs dans un appartement Σ de X.

Définition 2.4 (bord) *Le bord Ω d'un immeuble $\tilde{A}_2$ X est l'ensemble des classes d'équivalences de secteurs de X pour la relation d'équivalence suivante, appelée* parallélisme *: deux secteurs S et T sont parallèles si $S \cap T$ contient un secteur.*

La démonstration qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence figure dans [Ron]. On admettra également le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Pour tout élément $\omega \in \Omega$, et tout point-base x, il existe un unique représentant de ω qui de point-base x ; on notera ω_x ce représentant.*

Grâce à ce théorème et à la description des voisins éloignés d'un point-base x, on peut donner une autre définition du bord Ω :

Théorème 2.2 *Soit x un point-base, Ω s'identifie à la limite projective des $S_{m,n}$, $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec les flèches de projections $S_{m,n}(x) \longrightarrow S_{m',n'}(x)$ précédemment définies, c'est à dire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow X$ telles que*

$$\begin{cases} \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad f(m, n) \in S_{m,n}(x) \\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \forall (m', n') \in \mathbb{N}^2 \qquad m' \leq m \text{ et } n' \leq n \Rightarrow p_{m',n'}(f(m, n)) = f(m', n') \end{cases}$$

Il s'ensuit que la projection $p_{m,n} : \Omega \longrightarrow S_{m,n}(x)$ est bien définie. On la notera parfois $p^x_{m,n}$.

On note q l'ordre du plan projectif formé par les voisins de x. On peut montrer facilement, de proche en proche, que q ne dépend pas de x.)

2.2 Position relative de deux sommets par rapport à un secteur

Définition 2.5 *Soient x et y deux points de X, et ω un élément du bord Ω. Il existe alors deux entiers $n(x, y; \omega)$ et $m(x, y; \omega)$ tels que, pour i, j assez grands :*

$$p^x_{i,j}(\omega) \;=\; p^y_{i+m(x,y;\omega),j+n(x,y;\omega)}(\omega)$$

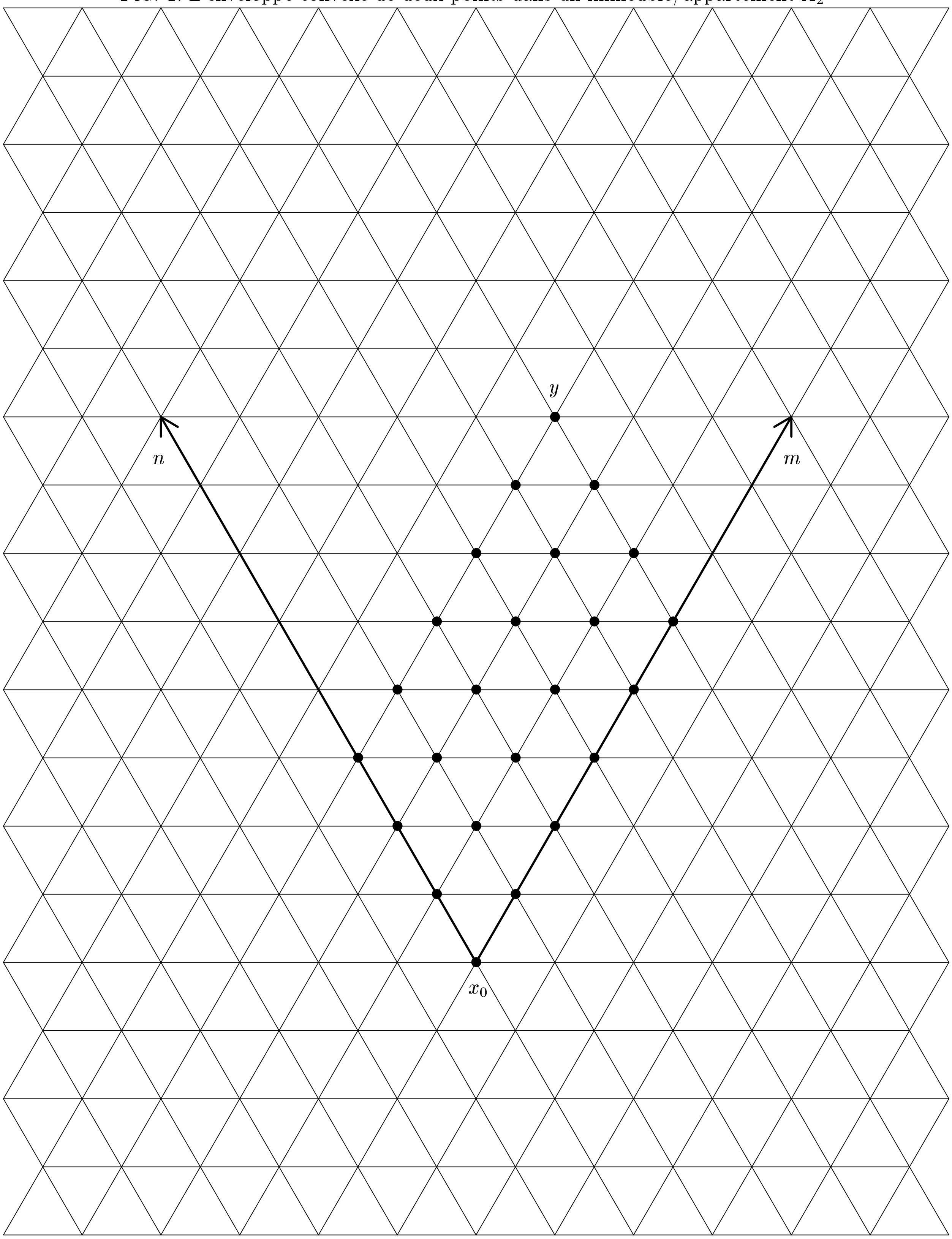
Démonstration — Par définition de Ω, $\omega_x \cap \omega_y$ contient un secteur. Soit

$$u = p^x_{a,b}(\omega) = p^y_{c,d}(\omega) \;\in\; \omega_x \cap \omega_y.$$

Alors : les secteurs

$$T = \left\{p^x_{a+m,b+n}; m, n \geq 0\right\} \text{ et } T' = \left\{p^y_{c+m,d+n}; m, n \geq 0\right\}$$

FIG. 1: L'enveloppe convexe de deux points dans un immeuble/appartement $\tilde{A}_2$



sont parallèles et ont même point base u ; il sont par conséquent égaux. On a donc, pour m,n entiers positifs, $p^x_{a+m,b+n} = p^y_{c+m,d+n}$. On en déduit que la paire $(c-a, d-b) = (m(x,y;\omega), n(x,y;\omega))$ ne dépend pas du point u choisi. La propriété en découle. $\triangleleft$

Si x et y sont voisins, on peut aisément déterminer les valeurs de $m(x,y;\omega)$ et $n(x,y;\omega)$:

Lemme 2.1 *Pour $\omega \in \Omega$ et $x \in X$, on a :*

$$(m(x,y;\omega), n(x,y;\omega)) = \begin{cases} (-1,0) & \textit{pour exactement un point } y \in S_{1,0}(x) \text{ ;} \\ (1,-1) & \textit{pour exactement } q \textit{ points } y \in S_{1,0}(x) \text{ ;} \\ (0,1) & \textit{pour exactement } q^2 \textit{ points } y \in S_{1,0}(x). \end{cases}$$

et :

$$(m(x,z;\omega), n(x,z;\omega)) = \begin{cases} (0,-1) & \textit{pour exactement un point } z \in S_{0,1}(x) \text{ ;} \\ (-1,1) & \textit{pour exactement } q \textit{ points } z \in S_{0,1}(x) \text{ ;} \\ (1,0) & \textit{pour exactement } q^2 \textit{ points } z \in S_{0,1}(x). \end{cases}$$

Démonstration — Soit Π le plan projectif des voisins de x : les points de Π correspondent alors aux voisins y de x tels que $\tau(y) = \tau(x) + 1 \pmod 3$, et les droites de Π sont les voisins z tels que $\tau(z) = \tau(x) - 1 \pmod 3$, avec y voisin de z si, et seulement si, $y \in z$ (dans Π).

Alors : si ω est déterminé par la chambre (x, x', x''), le mur droit étant porté par (x, x'), on a, pour $y \in S_{1,0}(x)$:

$$(m(x,y;\omega), n(x,y;\omega)) = \begin{cases} (-1,0) & \text{si, et seulement si, } y = x' \text{ ;} \\ (1,-1) & \text{si, et seulement si, } y \in x'' \text{ et } y \neq x' \text{ ;} \\ (0,1) & \text{si, et seulement si, } y \notin x''. \end{cases}$$

On raisonne de même pour les points $z \in S_{0,1}(x)$. $\triangleleft$

Corollaire 2.1 *Le cardinal $N_{m,n} = |S_{m,n}(x)|$ ne dépend pas du point x, et :*

$$\begin{array}{lcll} N_{0,0} & = & 1; & \\ N_{m,0} = N_{0,m} & = & (q^2+q+1)q^{2(m-1)} & \textit{si } m \leq 1; \\ N_{m,n} & = & (q^2+q+1)(q^2+q)q^{2(m+n-2)} & \textit{si } m,n \leq 1. \end{array}$$

Démonstration — On raisonne par induction, en montrant :

- $|S_{m+1,n}(x)| = q^2 \, |S_{m,n}(x)|$ pour $m \geq 1$ et $n \geq 0$;
  En effet, soit $y \in S_{m+1,n}(x)$; on note $f(y)$ l'unique point z de $S_{m,n}(x)$ tel que $z \in S_{0,1}(y)$, soit $y \in S_{1,0}(z)$.
  Si maintenant $z \in S_{m,n}(x)$, il existe exactement q^2 antécédents de z (ce sont les points de $S_{1,0}(z) \cap S_{m+1,n}(x)$).
  On prouve de même les formules suivantes :
- $|S_{m,n+1}(x)| = q^2 \, |S_{m,n}(x)|$ pour $m \geq 0$ et $n \geq 1$;
- $|S_{1,n}(x)| = (q^2+q) \, |S_{0,n}(x)|$ pour $n \geq 1$;
- $|S_{m,1}(x)| = (q^2+q) \, |S_{m,0}(x)|$ pour $m \geq 1$.

$\triangleleft$

Corollaire 2.2 *Soient $x, y \in X$ et $\omega \in \Omega$. Alors, pour $i, j \geq d(x,y)$,*

$$p^x_{i,j}(\omega) \ \in \ \omega_x \cap \omega_y.$$

Démonstration — Par induction :

Si $y \in S_{m+1,n}(x)$, il existe un unique point $z \in S_{m,n}(x) \cap S_{0,1}(y)$. Alors, par induction, avec $m+n = d(x,y)$: $p^x_{m+n,m+n} \in \omega_z$; par conséquent, $p^x_{m+n+1,m+n+1}$ est un point intérieur à ω_z. On en déduit la proposition pour $m+n \geq d(x,y)$. $\triangleleft$

Remarque – Pour $\omega \in \Omega$ et $x, y, z \in X$, on a :

$$\begin{cases} m(x,y;\omega) + m(y,z;\omega) = m(x,z;\omega) \\ n(x,y;\omega) + n(y,z;\omega) = n(x,z;\omega) \end{cases}$$

En outre, $|m(x,y;\omega)|, |n(x,y;\omega)| \leq d(x,y)$.

2.3 Automorphismes de l'immeuble

Un automorphisme quelconque g de X transforme un secteur en un secteur ; par conséquent, il conserve le parallélisme, et induit donc une application g sur le bord Ω de l'immeuble X.

En outre, si $g \in \mathbf{Aut}_{tr}(X)$, g préserve la notion de bord gauche et droit d'un secteur : pour $x \in X$, $\omega \in \Omega$, et $m, n \geq 0$, on a $p^x_{m,n}(\omega) = p^{gx}_{m,n}(g\omega)$. Par conséquent, pour $g \in \mathbf{Aut}_{tr}(X)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m(gx, gy; g\omega) & = & m(x, y; \omega) \\ n(gx, gy; h\omega) & = & n(x, y; \omega) \end{array} \right.$$

Remarque — Si maintenant x est fixé, et g_1, g_2 sont deux automorphismes de G, on a immédiatement les relations de cocycle suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} m(x, g_1 g_2 x; \omega) & = & m(x, g_1 x; \omega) & + & m\big(x, g_2 x; g_1^{-1}\omega\big) \\ n(x, g_1 g_2 x; \omega) & = & n(x, g_1 x; \omega) & + & n\big(x, g_2 x; g_1^{-1}\omega\big) \end{array} \right.$$

2.4 Topologie ; Algèbre $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Définition 2.6 *On munit Ω de la topologie limite projective des ensembles discrets $S_{m,n}(x)$, c'est-à-dire qu'une base de la topologie de Ω est constituée des ensembles $\Omega_x(v)$ où v parcourt tous les sommets de X. Si $v \in S_{m,n}(x)$, alors par définition $\Omega_x(v)$ est le sous-ensemble de Ω défini par l'image réciproque de v par $p_{m,n}$. Ainsi $\Omega_x(v)$ s'identifie aux secteurs de point-base x dont le point en position (m, n) est v.*

Pour prouver que cette topologie ne dépend pas du point x choisi, on utilise le lemme suivant, qui découle immédiatement du corollaire 2.2 :

Lemme 2.2 *Soient $y \in S_{m,n}(x)$, et $z \in S_{i,j}(x) \cap S_{k,l}(y)$, avec $i, j \geq d(x, y) = m + n$. Alors, $\Omega_x(z) \subset \Omega_y(z)$, et pour tout $\omega \in \Omega_x(z)$, $m(x, y; \omega) = k - i$ et $n(x, y; \omega) = l - j$. En outre, $|S_{i,j}(x) \cap S_{k,l}(y)|$ ne dépend pas du choix de $y \in S_{m,n}(x)$.*

Proposition 2.1 *La base d'ouverts $\{\Omega_x(v), v \in X\}$ sur Ω définit une topologie qui ne dépend pas du point x choisi.*

Démonstration — On remarque d'abord que la topologie définie par $\Omega = \varprojlim S_{m,n}(x)$ est invariante si on omet un nombre fini de termes du côté droit de la limite projective.

Il suffit donc de montrer le résultat pour $z \in S_{i,j}(x)$, avec i, j assez grands. Dans ce cas, deux applications du lemme précédent nous montrent : $\Omega_x(z) = \Omega_y(z)$, ce qui prouve le résultat. $\triangleleft$

Il est également fondamental de remarquer que Ω est compact (car fermé dans le produit $\prod S_{m,n}(x)$, qui est compact d'après le théorème de Tykonoff).

Définition 2.7 *On note $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ l'algèbre des fonctions localement constantes $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Le risultat suivant s'obtient par un argument de compacité de Ω :

Propriété 2.1 *Pour tout x, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ s'identifie à l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices des ouverts de base $\Omega_x(v)$, $v \in X$.*

Comme la topologie de Ω ne dépend pas du point-base, pour tout automorphisme $g \in \mathbf{Aut}_{tr}(X)$, et toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, la fonction $\omega \longmapsto f\big(g^{-1}\omega\big)$ est encore localement constante.

2.5 Mesures visuelles

Définition 2.8 (Mesures visuelles) *Soit x un point-base de X. On définit sur Ω la mesure borélienne de probabilité ν_x par : pour tout $v \in S_{m,n}(x)$,*

$$\nu_x(\Omega_x(v)) = \frac{1}{N_{m,n}}.$$

On appellera cette mesure mesure visuelle *d'origine x.*

Démonstration — Cette mesure est bien définie puisque, quitte à raffiner les ouverts (c'est-à-dire à considérer des entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ suffisamment grands), on remarque qu'il y a compatibilité des mesures attribuées à ces ouverts de base avec l'additivité finie. $\triangleleft$

Proposition 2.2 *Si x, y appartiennent à Ω, alors les mesures ν_x et ν_y sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, et :*

$$\frac{d\nu_y}{d\nu_x}(\omega) = q^{-2(m(x,y;\omega)+n(x,y;\omega))}$$

Soit z assez loin de x et y ; alors, si $z \in S_{i,j}(x)$ et $z \in S_{k,l}(y)$:

$$\nu_y(\Omega_x(z)) = \frac{1}{N_{k,l}} = q^{2(i+j-k-l)} \frac{1}{Ni, j},$$

ce qui prouve le résultat.

3 Construction de représentations

3.1 Généralités sur les représentations

On introduit ici quelques notions élémentaires sur les représentations linéaires de groupes.

Définition 3.1 (Représentations) *Soit G un groupe. On appelle* représentation (linéaire) *de G tout morphisme $G \to GL(V)$, où V est un espace vectoriel complexe.*

On appelle représentation unitaire *de G un morphisme $G \to \mathcal{U}(H)$, où H est un espace de Hilbert.*

La donnée d'une représentation V de G est équivalente à la donnée d'une structure de $\mathbb{C}G$-module sur V.

Définition 3.2 (Représentation régulière) *L'algèbre $\mathbb{C}G$ du groupe G, munie de sa structure naturelle de $\mathbb{C}G$-module, est appelée* représentation régulière *de G.*

Définition 3.3 (Morphismes de représentations) *Soit G un groupe, et soient $\pi : G \to \boldsymbol{Aut}(V)$ et $\rho : G \to \boldsymbol{Aut}(W)$ deux représentations de G. On appelle* morphisme de représentations *tout morphisme de $\mathbb{C}G$-modules de V dans W ; équivalemment, un morphisme de représentations $V \to W$ est une application ($\mathbb{C}$-)linéaire $f : V \to W$, telle que pour tout $g \in G$, $f \circ \pi(g) = \rho(g) \circ f$. Un* isomorphisme de représentations unitaires *est un isomorphisme de représentations, qui est en outre une isométrie.*

Définition 3.4 (Vecteur cyclique) *Un vecteur v d'une représentation unitaire H de G est dit* cyclique *si $\overline{\mathbb{C}G \cdot v} = H$.*

Soit v un vecteur de G. On appelle *coefficient de matrice* l'application

$$\left\{ \begin{array}{lcl} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \langle gx, x \rangle \end{array} \right. .$$

Définition 3.5 (Fonction de type positif) *Une fonction $\kappa : G \to \mathbb{C}$ est dite* de type positif *si $\kappa(1) = 1$ et si pour tous nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et tous éléments $g_1, \ldots, g_n$ de G, on a :*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \kappa\big(g_i g_j^{-1}\big) \geq 0. \tag{3}$$

On remarque que, si g est un point du groupe G, la condition (3) avec $\lambda = \mu = 1$ s'écrit $\kappa(g) + \kappa\big(g^{-1}\big) \geq 0$; avec $\lambda = i$ et $\mu = 1$, il vient $i\big(\kappa(g) - \kappa\big(g^{-1}\big)\big) \geq 0$. Ces deux quantités sont en particulier réelles ; κ est donc hermitienne (soit $\kappa\big(g^{-1}\big) = \overline{\kappa(g)}$).

Théorème 3.1 *Soit κ une fonction de type positif sur le groupe G. Il existe alors (à isomorphisme unique près) une unique représentation unitaire $\pi : G \to \mathcal{U}(H)$ munie d'un vecteur unitaire cyclique $v \in H$, telle que la fonction de type positif κ soit le coefficient de matrice en v de la représentation π.*

Existence – Soient κ un tel noyau, et $\mathbb{C}G$ la représentation régulière de G. κ étant un noyau positif, $\langle g, h \rangle = \kappa\big(gh^{-1}\big)$ induit une forme sequilinéaire sur $\mathbb{C}G$, que l'on note encore $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit H le complété du quotient de $\mathbb{C}G$ par le sous-$\mathbb{C}G$-module $\{x \in \mathbb{C}G, \langle x, x \rangle = 0\}$. Alors : 1 est un vecteur cyclique de H, et pour tout $g \in G$, $\kappa(g) = \langle g, 1 \rangle$ donc κ est bien un coefficient de matrice.

Unicité – Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(H)$ une telle représentation, et v le vecteur cyclique associé. On a alors un morphisme φ de représentations de G :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}G & \to & H \\ 1 & \mapsto & v \end{array} .$$

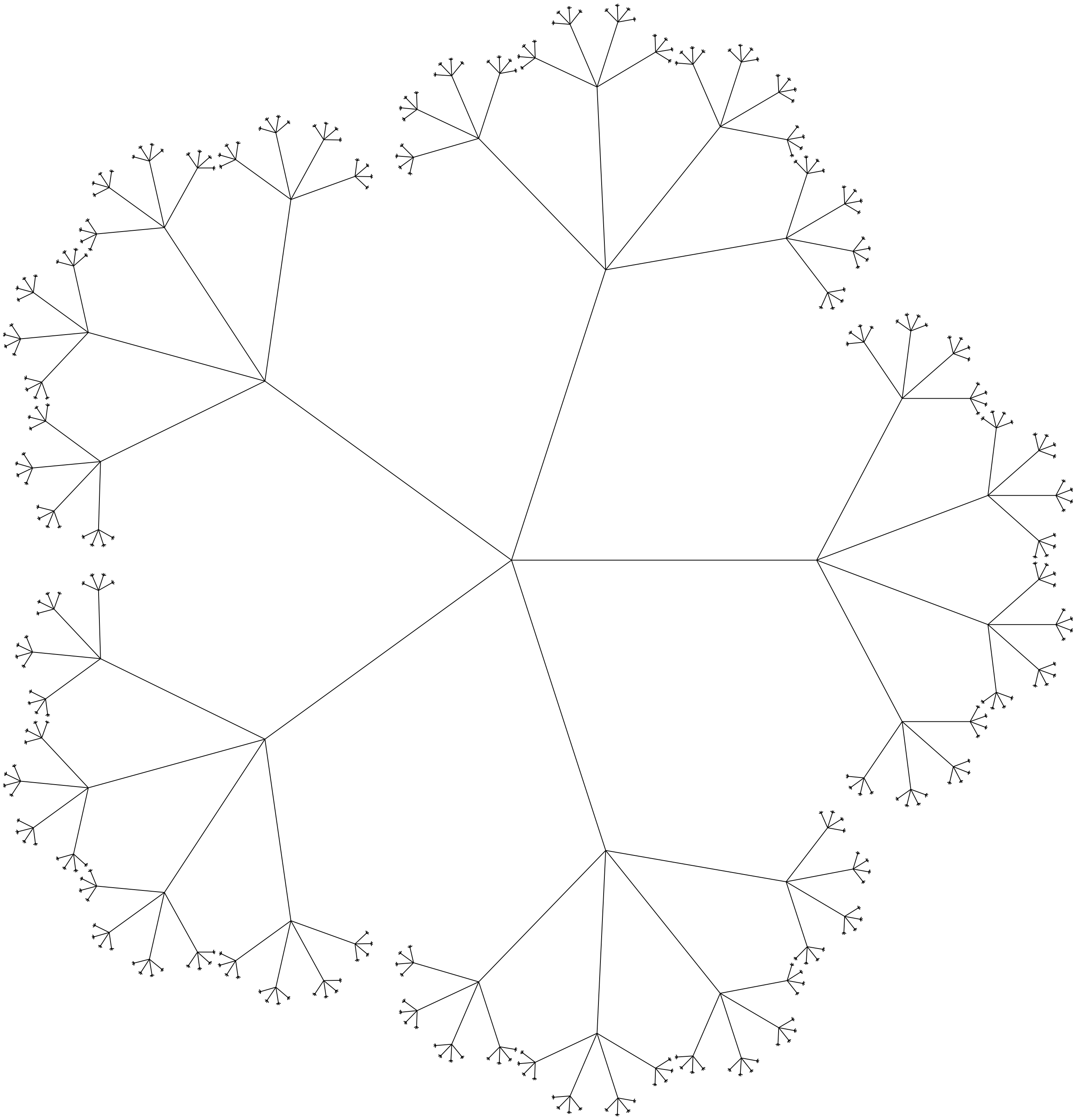
En introduisant la semi-norme définie précédemment sur $\mathbb{C}G$, il vient, pour tous $x, y \in \mathbb{C}G$, $\langle x, y \rangle = \langle xv, yv \rangle_H$. En notant V l'idéal de $\mathbb{C}G$ des vecteurs de norme nulle, on a alors : $xv = 0$ (dans H) si, et seulement si, $x = 0$ (dans $\mathbb{C}G$).

On a donc $H \simeq \overline{\mathbb{C}G/V}$; la représentation H est donc isomorphe à la représentation définie au paragraphe précédent, ce qui prouve l'unicité.

3.2 Arbres homogènes

On construit ici des représentations du groupe des automorphismes d'un immeuble. Pour ce faire, on s'intéresse d'abord au cas d'un arbre.

FIG. 2: Un arbre homogène de degré $q + 1$ avec $q = 4$



3.2.1 Arbres et espaces de densités

Définition 3.6 (Arbre homogène) *On appelle* arbre homogène *un arbre X tel que chaque noeud de l'arbre ait un même nombre (noté $q+1$) de voisins.*

On définit alors, de même que pour un immeuble, le bord $\Omega = \partial X$ de l'arbre X.

Pour tout point x de l'arbre, on note respectivement $\mathcal{B}_m(x)$ et $\mathcal{S}_m(x)$ la boule et la sphère de centre x et de rayon m. Si $m \leq n$, il existe une projection naturelle $\mathcal{S}_n(x) \to \mathcal{S}_m(x)$; on a alors

$$\Omega = \lim_{\leftarrow} \mathcal{S}_n(x).$$

On appelle p_m^x la projection $\Omega \to S_m$.

Si x, y dont deux points de X, on note $d(x,y)$ leur distance.

Soient x et y deux points de l'arbre X, et ω un élément du bord Ω. Il existe alors un entier $m(x,y;\omega)$ tel que, pour i assez grand :

$$p_i^x(\omega) = p_{i+m(x,y;\omega)}^y(\omega).$$

Les entiers $m(x,y;\omega)$ vérifient la relation de cocycle suivante, pour tout triplet (x_1,x_2,x_3) de points de X :

$$m(x_1,x_2;\omega) + m(x_2,x_3;\omega) + m(x_3,x_1;\omega) = 0.$$

On définit, de même que pour un immeuble, la mesure visuelle ν_x à l'aide des projections p_m^x.

Proposition 3.1 *Si x, y sont deux points de l'arbre, alors les mesures visuelles ν_x et ν_y sont mutuellement absolument continues, et :*

$$\left(\frac{\mathrm{d}\nu_y}{\mathrm{d}\nu_x}\right)(\omega) \ = \ q^{-m(x,y;\omega)}.$$

Définition 3.7 (s-densités) *Soit $s \in \mathbb{C}$. On appelle* s-densité localement constante *toute fonction $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$, telle que pour x, y appartenant à X :*

$$f(y,\omega) = f(x,\omega)\left(\frac{\mathrm{d}\nu_x}{\mathrm{d}\nu_y}(\omega)\right)^s = q^{sm(x,y;\omega)}f(x,\omega)$$

et, pour tout x, $f(x,\cdot)$ est localement constante sur Ω. On note E^s l'espace des s-densités localement constantes.

Ainsi, les 0-densités sont les fonctions localement constantes sur Ω.

On notera $\mathrm{d}\nu_x$ la 1-densité définie par : $\mathrm{d}\nu_x(x,\omega) = 1$ pour tout $\omega \in \Omega$. E^s est alors un $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-module libre de rang 1 et de base $\mathrm{d}\nu_x^s$. Si f est une s-densité, on peut l'écrire $f = \varphi\, \mathrm{d}\nu_x^s$, où φ est une fonction localement constante sur Ω. On vérifie la cohérence de cette notation :

- Si $f_1 = \varphi_1 \mathrm{d}\nu_x^{s_1}$ est une s_1-densité et $f_2 = \varphi_2 \mathrm{d}\nu_x^{s_2}$ une s_2-densité, alors $f_1 f_2$ est une (s_1+s_2)-densité, et $f_1 f_2 = \varphi_1\varphi_2 \mathrm{d}\nu_x^{s_1+s_2}$;
- Si $f = \varphi\, \mathrm{d}\nu_x^s$ est une s-densité, alors $\bar{f}$ est une $\bar{s}$-densité, et $\bar{f} = \bar{\varphi}\, \mathrm{d}\nu_x^{\bar{s}}$;
- Si $f = \varphi\, \mathrm{d}\nu_x^s$ est une s-densité à valeurs réelles, alors f^p est une (ps)-densité, et $f^p = \varphi^p \mathrm{d}\nu_x^{ps}$;
- Si $f = \varphi_x \mathrm{d}\nu_x$ est une 1-densité, alors la valeur de l'intégrale $\int_\Omega \varphi_x \mathrm{d}\nu_x$ ne dépend que de la 1-densité f et pas du point-base x choisi ; ceci définit une forme linéaire $\int_\Omega$ sur les 1-densités.

En particulier, si f et g sont des s-densités avec $Re(s) = \frac{1}{2}$, alors $f\bar{g}$ est une 1-densité ; on dispose donc d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E^s, défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g} \tag{4}$$

3.2.2 Représentations sur les espaces de densités

On considère un groupe G d'automorphismes de l'arbre X ; on se donne également un point x de l'arbre.

Proposition 3.2 *Pour s complexe, on a une représentation π^s de G sur E^s, définie par :*

$$(\pi^s(g))(f)(x,\omega) = q^{sm\left(x,g^{-1}x,\omega\right)}f\left(x,g^{-1}\omega\right) = f\left(g^{-1}x,g^{-1}\omega\right),$$

soit encore, en utilisant la notation $f = \varphi\, \mathrm{d}\nu_x^s$:

$$(\pi^s(g))(\varphi\, \mathrm{d}\nu_x^s) = \left(\varphi \circ g^{-1}\right)\mathrm{d}\nu_{gx}^s.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une représentation de G, et que :

Proposition 3.3 – *Pour tous $s, s' \in \mathbb{C}$, $g \in G$, $f \in E^s$, $f' \in E^{s'}$, on a*

$$\pi^s(g)(f).\pi^{s'}(g)(f') = \pi^{s+s'}(g)(ff')$$

– *La forme linéaire $\int_\Omega$ sur E^1 est G-équivariante, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, $f \in E^1$*

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \pi^1(g)(f)$$

Le caractère équivariant de cette intégrale provient du caractère intrinsèque de la définition qui a été donnée.

En particulier, on a le résultat suivant :

Proposition 3.4 *Si $\Re(s) = \frac{1}{2}$, la représentation π^s sur le complété de E^s (pour le produit scalaire (4)) est une représentation unitaire de G. Ces représentations unitaires sont appelées* série principale *de représentations de G.*

On cherche maintenant à obtenir d'autres représentations qui seront non trivialement unitaires.

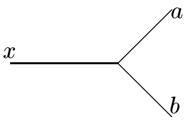
Soit x un point fixé de l'immeuble. On note $F_n(x)$ le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ engendré par les $1_{\Omega_x(y)}$, où y décrit $S_n(x)$; $F_n(x)$ est de dimension finie, et la suite des $F_n(x)$ est croissante. On note $H_n(x)$ l'orthogonal dans $F_n(x)$ de $F_{n-1}(x)$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}\,\mathrm{d}\nu_x$

On a alors : $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \overset{\perp}{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} H_n(x)$, soit

$$E^s = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n(x)\mathrm{d}\nu_x^s.$$

Proposition 3.5 *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $q^{2s} \neq 1$, et x un point de l'arbre. Les s-densités $\mathrm{d}\nu_y^s$, où y est un point de X, engendrent (en tant que $\mathbb{C}$-module) l'espace E^s.*

On sait que E^s est un $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-module libre de rang 1, de base $\mathrm{d}\nu_x^s$. Il suffit donc de prouver que les $\left(\frac{\mathrm{d}\nu_y}{\mathrm{d}\nu_x}\right)^s = q^{-m(x,y;\omega)}$ engendrent $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ en tant que $\mathbb{C}$-module. Soient a, b deux points de X, tels que $d(x,a) = d(x,b) = n+1$ et $d(a,b) = 2$:



On a alors, pour $\omega \in \Omega_x(a)$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\nu_x}\right)^s(\omega) = q^{s(n+1)} \text{ et } \left(\frac{\mathrm{d}\nu_b}{\mathrm{d}\nu_x}\right)^s(\omega) = q^{s(n-1)}$$

d'où :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\nu_x}\right)^s - \left(\frac{\mathrm{d}\nu_b}{\mathrm{d}\nu_x}\right)^s = q^{ns}\left(q^s - q^{-s}\right)\left(1_{\Omega_x(a)} - 1_{\Omega_x(b)}\right) \tag{5}$$

Ces termes engendrent toutes les fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ d'intégrale nulle ; l'intégrale d'une des fonctions $\left(\frac{\mathrm{d}\nu_y}{\mathrm{d}\nu_x}\right)^s$ étant non nulle, on arrive donc à engendrer de cette façon le $\mathbb{C}$-module $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Dans le cas où $Re(s) = \frac{1}{2}$, on en déduit que le vecteur $\mathrm{d}\nu_x^s$ est cyclique pour la représentation π^s. Le coefficient de matrice κ^s de la représentation π^s pour ce vecteur vaut alors :

$$\kappa^s(g) = \int_\Omega \pi^s(g)(\mathrm{d}\nu_x^s)\overline{\mathrm{d}\nu_x^s} = \int_\Omega \mathrm{d}\nu_{gx}^s \mathrm{d}\nu_x^{\overline{s}}.$$

En particulier, on a $\kappa^s = \kappa^{1-s}$, puisque le groupe des automorphismes d'un arbre homogène est suffisamment grand pour agir transitivement sur les couples de points placés à une distance δ fixée, ainsi ces quantités ne peuvent dépendre que de cette distance, et le résultat en découle. On en déduit l'existence d'un isomorphisme de représentations unitaires, pour $Re(s) = \frac{1}{2}$:

$$j_s : \begin{array}{ccc} E^s & \to & E^{1-s} \\ \mathrm{d}\nu_x^s & \mapsto & \mathrm{d}\nu_x^{1-s} \end{array}$$

Soit G_x le stabilisateur de x. La représentation de G sur E^s induit une représentation unitaire de G_x sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (toujours pour le produit scalaire associé à la mesure $\mathrm{d}\nu_x$), dont $H_n(x)$ est une sous-représentation. On déduit aisément de la formule 5 que $H_n(x)$ est une représentation irréductible de G_x.

En outre, j_s commutant avec g, j_s envoie le sous-espace $H_n(x)\mathrm{d}\nu_x^s$ sur $H_n(x)\mathrm{d}\nu_x^{1-s}$, et induit donc un endomorphisme $\mathbb{C}G_x$-linéaire de $H_n(x)$. $H_n(x)$ étant une représentation irréductible de G_x, on en déduit que la restriction de j_s à $H_n(x)$ est un scalaire $\lambda_n(s)$, soit, pour $\varphi \in H_n(x)$, $j_s(\varphi\,\mathrm{d}\nu_x^s) = \lambda_n(s)\varphi\,\mathrm{d}\nu_x^{1-s}$.

En résumé :

$$
\begin{array}{rcccc}
E^s & = & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} & H_n(x) & \mathrm{d}\nu_x^s \\
 & & & \downarrow \lambda_n(s) & \\
E^{1-s} & = & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} & H_n(x) & \mathrm{d}\nu_x^{1-s}
\end{array}
\tag{6}
$$

$j_s(\mathrm{d}\nu_x^s) = \mathrm{d}\nu_x^{1-s}$ montre $\lambda_0 = 1$; pour $n \geq 1$, soient $a, b \in X$ deux points situés comme précédemment, soit $d(x,a) = d(x,b) = n+1$ et $d(a,b) = 2$. Alors :

$$j_s(\mathrm{d}\nu_a^s - \mathrm{d}\nu_b^s) = \mathrm{d}\nu_a^{1-s} - \mathrm{d}\nu_b^{1-s}$$

soit encore :

$$\lambda_n(s) q^{ns}\left(q^s - q^{-s}\right)\left(1_{\Omega_x(a)} - 1_{\Omega_x(b)}\right) = q^{n(1-s)}\left(q^{1-s} - q^{-(1-s)}\right)\left(1_{\Omega_x(a)} - 1_{\Omega_x(b)}\right).$$

On a donc :

$$\lambda_n(s) = q^{n(1-2s)} \frac{q - q^{2s-1}}{q^{2s} - 1} \tag{7}$$

Notons qu'on peut définir $\lambda_n(s)$ pour tout s tel que $q^{2s} \neq 1$, et que si $q^{2(s-1)} \neq 1$, alors $\lambda_n(s) \neq 0$. Si $q^{2s} \neq 1$, on peut définir l'application linéaire $j_s : E^s \to E^{1-s}$ à l'aide de (6).

Proposition 3.6 *j_s est G-équivariant.*

Démonstration— Soit $g \in G$ et $n = d(x, gx)$. Alors $\left(\frac{\mathrm{d}\nu_{gx}}{\mathrm{d}\nu_x}\right)^s \in F_n(x)$; par conséquent,

$$\pi^s(g)(\mathrm{d}\nu_x^s) = \mathrm{d}\nu_{gx}^s = (\varphi_0(s) + \ldots + \varphi_n(s))\mathrm{d}\nu_x^s,$$

où $\varphi_k(s) \in H_k(x)$.

On a donc :

$$(j_s \circ \pi^s(g))(\mathrm{d}\nu_x^s) = \left(\sum_i \lambda_i(s)\varphi_i(s)\right)\mathrm{d}\nu_x^s$$

et :

$$\left(\pi^{1-s}(g) \circ j_s\right)(\mathrm{d}\nu_x^s) = \left(\sum_i \varphi_i(1-s)\right)\mathrm{d}\nu_x^{1-s}$$

Dire que j_s est G-équivariant est alors équivalent à $\varphi_i(1-s) = \lambda_i(s)\varphi_i(s)$ pour tout i. Or, pour $Re(s) = \frac{1}{2}$, cette formule est vraie ; les deux membres étant analytiques en s, on en déduit l'égalité pour tout s tel que $q^{2s} \neq 1$. $\triangleleft$

Proposition 3.7 *Si $s \in]0,1[$, alors pour tout n, $\lambda_n(s) > 0$. On munit E^s du produit scalaire pour lequel*

$$\|f\|^2 = \int_\Omega j_s(f)\bar{f}.$$

Le complété de E^s est alors une représentation unitaire de G.

Ces représentations forment la *série complémentaire* de représentations de G, et si $s \in]0,1[\cup \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$, les représentations E^s et E^{1-s} sont isomorphes comme représentations unitaires (par j_s).

3.3 Le cas des immeubles $\tilde{A}_2$

On se donne un immeuble $\tilde{A}_2$, et on reprend toutes les notations des paragraphes précédents. On note ici $G = \mathbf{Aut}_{tr}(X)$.

On appelle $\mathcal{S}$ le groupe des triplets $s = (s_1, s_2, s_3) \in {\mathbb{C}^\star}^3$ tels que $s_1 s_2 s_3 = 1$. Si $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{S}$, on note $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)$. On note également $\mathcal{U}$ le sous-groupe de $\mathcal{S}$ constitué des éléments $s = (s_1, s_2, s_3)$ tels que $s\bar{s} = 1$, soit $|s_1| = |s_2| = |s_3| = 1$.

Étant donné un élément s de $\mathcal{S}$, et un réel r, on considère l'ensemble E_s^r des fonctions $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$, localement constantes par rapport à la deuxième variable, et telles que, pour tous $x, y \in X$:

$$f(y,\omega) = q^{2r(m(x,y;\omega)+n(x,y;\omega))} s_1^{-(m(x,y;\omega)+n(x,y;\omega))} s_2^{-n(x,y;\omega)} f(x,\omega).$$

On appelle *r-densités* les éléments de E_1^r, et (r,s)-densités les éléments de E_s^r.

Si $s \in \mathcal{S}$ et $x \in X$, on note $\mathrm{d}\nu_x^r \Theta^s$ la (r,s)-densité définie par $\mathrm{d}\nu_x^r \Theta^s(x,\omega) = 1$ pour tout $\omega \in \Omega$; E_s^r est alors un $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-module libre de rang 1, et de base $\mathrm{d}\nu_x^r \Theta^s$.

On peut alors définir, de même que dans le cas des arbres :

- Si $f_1 = \varphi_1 \,\mathrm{d}\nu_x^{r_1} \Theta^{s_1} \in E_{s_1}^{r_1}$ et $f_2 = \varphi_2 \mathrm{d}\nu_x^{r_2} \Theta^{s_2}$, alors $f_1 f_2$ appartient à $E_{s_1 s_2}^{r_1+r_2}$, et $f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 \cdot \mathrm{d}\nu_x^{r_1+r_2} \Theta^{s_1 s_2}$;
- Si $f = \varphi \,\mathrm{d}\nu_x^r \Theta^s \in E_s^r$, alors $\bar{f} \in E_{\bar{s}}^r$, et $\bar{f} = \bar{\varphi}\, \mathrm{d}\nu_x^r \Theta^{\bar{s}}$;
- Si $f = \varphi_x \mathrm{d}\nu_x \in E_1^1$, alors la valeur de l'intégrale $\int_\Omega \varphi_x \mathrm{d}\nu_x$ ne dépend pas du point x choisi. On note $\int_\Omega$ la forme linéaire ainsi définie.

Soit $s \in \mathcal{U}$; alors, pour $f \in E_s^{\frac{1}{2}}$, on a $f\bar{f} \in E_1^1$. On dispose donc du produit scalaire sur $E_s^{\frac{1}{2}}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f\bar{g}. \tag{8}$$

Ce produit scalaire est positif, mais $E_s^{\frac{1}{2}}$ n'est pas complet.

On définit une représentation π_s^r de G sur les espaces E_s^r par :

$$(\pi_s^r(g))(f)(x,\omega) = f\big(g^{-1}x, g^{-1}\omega\big).$$

Si $s \in \mathcal{U}$, alors $\pi_s^{\frac{1}{2}}$ est unitaire pour le produit scalaire (8), c'est ce que l'on appelle la série principale de représentations sphériques de G.

Si $s = (s_1, s_2, s_3)$ on note $s' = (s_2, s_1, s_3)$. On remarque que si $s = \big(e^{\imath\theta}, e^{\imath\theta}, e^{-2\imath\theta}\big)$, on a trivialement un isomorphisme j_s de représentations unitaires entre $\pi_s^{\frac{1}{2}}$ et $\pi_{s'}^{\frac{1}{2}}$.

On admettra la proposition suivante (démontrée dans [CMS]) qui est plus pénible à établir que pour le cas des arbres :

Proposition 3.8 *Si $s = (s_1, s_2, s_3)$ avec $s_1/s_2 \neq q, \frac{1}{q}$, il existe un isomorphisme $j_s : \pi_s^{\frac{1}{2}} -> \pi_{s'}^{\frac{1}{2}}$, dont les valeurs propres sont*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_0(s) & = & 1 \\ \lambda_n(s) & = & \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{n-1} \frac{qs_1 - s_2}{qs_2 - s_1} \quad \textit{pour } n \geq 1 \end{array} \right. .$$

Si $s = \big(re^{i\theta}, \frac{1}{r}e^{i\theta}, e^{-2i\theta}\big)$, avec θ réel et $\frac{1}{\sqrt{q}} < r < \sqrt{q}$, les valeurs propres sont strictement positives : on peut donc définir un produit scalaire sur $E_s^{\frac{1}{2}}$ par $\|f\|^2 = \int_\Omega j_s(f)\overline{f}$, et la représentation $\pi_s^{\frac{1}{2}}$ est évidemment unitaire pour ce produit scalaire, et c'est ce que l'on appelle la série complémentaire de représentations sphériques de G.

Une conséquence immédiate du lemme 2.1 est la propriété suivante :

Proposition 3.9 *Pour tout sommet x de X, pour tout élément $s \in \mathcal{S}$:*

$$\sum_{y \in S_{1,0}(x)} \mathrm{d}\nu_y^{\frac{1}{2}} \Theta^s = q\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3}\right) \mathrm{d}\nu_x^{\frac{1}{2}} \Theta^s$$

4 Les groupes $\tilde{A}_2$

4.1 Présentation d'un tel groupe

Soit P un plan projectif fini ; on note L l'ensemble des droites de P. Soit λ une bijection de P dans L. On suppose qu'il exite un ensemble $\mathcal{T}$ de triplets de points de P, tel que :

- Pour $x, y \in P$,il existe un z tel que $(x, y, z) \in \mathcal{T}$ si, et seulement si, $y \in \lambda(x)$;
- Si $(x, y, z) \in \mathcal{T}$, alors $(y, z, x) \in \mathcal{T}$;
- $x, y \in P$ étant donnés, il existe au plus un z tel que $(x, y, z) \in \mathcal{T}$.

Définition 4.1 (Groupe $\tilde{A}_2$) *Un groupe $\tilde{A}_2$ est un groupe Γ dont une présentation est donnée par :*

$$\Gamma = \langle a_x, x \in P | a_x a_y a_z = 1, (x, y, z) \in \mathcal{T} \rangle, \tag{9}$$

où $\mathcal{T}$ vérifie les trois conditions précédentes.

Soit G un groupe agissant simplement sur les sommets d'un immeuble $\tilde{A}_2$ X par automorphisme *type-rotative.* Équivalemment, G est muni d'une structure d'immeuble $\tilde{A}_2$ compatible avec la loi de groupe, et d'un caractère $\tau : G \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et tel que pour x et y voisins, $\tau(x) \neq \tau(y)$.

Soit P l'ensemble des voisins x du neutre de G tels que $\tau(x) = 1$; alors, pour x décrivant P, x^{-1} décrit l'ensemble L des voisins y de 1 tels que $\tau(y) = -1$. On note $\lambda : P \to L$ cette bijection. Si deux voisins x et y du neutre sont voisins entre eux, alors l'un des deux (par exemple x) appartient à P, l'autre à L.

La relation de voisinage induit alors une structure de plan projectif sur (P, L).

On vérifie alors que le groupe G est un quotient du groupe dont une présentation est (9) ; on admettra qu'il y a en fait égalité, et même équivalence :

Proposition 4.1 *Les groupes agissant simplement transitivement par automorphismes type-rotative sur un immeuble $\tilde{A}_2$sont exactement ceux qui admettent une présentation du type (9).*

4.2 L'algèbre abélienne libre à 2 générateurs

4.2.1 Convolution

On définit une action à gauche de G sur l'espace $\mathbb{C}^X$ des fonctions sur X par $g \cdot f = f \circ g^{-1}$; ceci munit $\mathbb{C}^X$ d'une structure de $\mathbb{C}G$-module à gauche. On notera parfois, pour $g \in \mathbb{C}G$,

$$g \star f = g \cdot f = \sum_{\gamma \in G} g(\gamma) \cdot f \circ \gamma^{-1}$$

4.2.2 Fonctions biradiales

Définition 4.2 *On considère un point x de l'immeuble X. Une fonction f sur X est dite* $(x$-$)$biradiale *si elle est constante sur chaque ensemble $S_{m,n}(x)$.*

On définit, pour m et n entiers, un opérateur $A_{m,n}$ sur l'espace $\mathbb{C}^X$, par :

$$(A_{m,n} f)(x) \;=\; \frac{1}{N_{m,n}} \sum_{y \in S_{m,n}(x)} f(y).$$

En particulier, on note $A^+ = A_{1,0}$ et $A^- = A_{0,1}$.

On admettra le théorème suivant, dont une démonstration est faite dans [CM] :

Proposition 4.2 *L'espace vectoriel engendré par les opérateurs $A_{m,n}$ est une algèbre commutative libre à deux générateurs $\mathcal{A}$, engendrée par A^+ et A^-. (i.e. $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}[A^+, A^-]$).*

Corollaire 4.1 *Soient $w, z \in \mathbb{C}$. Il existe alors un unique caractère $h_{z,w}$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ tel que $h_{z,w}(A^+) = z$ et $h_{z,w}(A^-) = w$.*

On représente les paires (w, z) par les triplets $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3$ tels que $s_1 s_2 s_3 = 1$, en posant :

$$z = \frac{q}{q^2 + q + 1}(s_1 + s_2 + s_3) \text{ et } w = \frac{q}{q^2 + q + 1}\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3}\right)$$

On vérifie alors l'injectivité de $(s_1, s_2, s_3) \mapsto (w, z)$ (modulo une permutation de (s_1, s_2, s_3)).

On pose $p_{m,n}(z, w) = h_{z,w}(A_{m,n})$; $\mathcal{A}$ étant engendrée, comme algèbre, par A^+ et A^-, $p_{m,n}$ est un polynôme.

Pour $y \in S_{m,n}(x)$, on pose $k_{w,z}(x, y) = p_{m,n}(z, w)$.

4.3 Exemple de présentation en triangles

On va se placer dans le plan projectif associé à un corps fini $\mathbb{F}_q$, et pour des raisons qui vont devenir évidentes, on va en fait définir une présentation en triangles dans le plan projectif $\Pi = \mathbb{P}(\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q)$. On note P les points de Π à savoir les $\mathbb{F}_q$-droites vectorielles de $\mathbb{F}_{q^3}$ et L les droites de Π c'est-à-dire les plans vectoriels de $\mathbb{F}_{q^3}$.

Rappel 4.1 *$\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q$ étant une extension galoisienne, donc séparable, la $\mathbb{F}_q$-forme quadratique définie sur $\mathbb{F}_{q^3}$ par q : $(x,y) \longmapsto tr\ (xy)$ est non dégénérée. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{F}_{q^3}$, $tr\ (x)$ est la trace comme $\mathbb{F}_q$-endomorphisme de $\mathbb{F}_{q^3}$ de la multiplication par x.*

Définition 4.3 *La non-dégénérescence de q permet d'établir une correspondance canonique entre les points et les droites de Π. Ainsi on définit une bijection $\left\{\begin{array}{lll} P & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & x^{\perp} = \{y \in \mathbb{F}_{q^3},\, tr\ (xy) = 0\}\end{array}\right.$ en associant à une droite vectorielle de $\mathbb{F}_{q^3}$ son orthogonal pour la forme quadratique q.*

Définition 4.4 *On définit la fonction $\lambda = \left\{\begin{array}{lll} P & \longrightarrow & L \\ \mathbb{F}_q x & \longmapsto & (\mathbb{F}_q x^{-1})^{\perp}\end{array}\right.$*

Définition 4.5 *On peut définir une présentation en triangles $\mathcal{T}$ par rapport à cette correspondance point-droite λ :*

$$\mathcal{T} = \left\{(x, x\xi, x\xi^{q+1}), x \in P, \xi \in P, tr\ \xi = 0\right\}$$

Démonstration — On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une présentation en triangles. Pour tous points x, y, clairement, il existe $z \in P$ tels que $(x,y,z) \in \mathcal{T}$ si et seulement si tr $\frac{y}{x} = 0$ c'est-à-dire $y \in (x^{-1})^{\perp}$, et le point z est uniquement déterminé s'il existe. Maintenant, si $(x, x\xi, x\xi^{q+1}) \in \mathcal{T}$. On a $\left(\xi^{1+q+q^2}\right)^q = \xi^{1+q+q^2}$ car $\xi \in \mathbb{F}_{q^3}$. ξ^{1+q+q^2} est racine de l'équation $T^q = T$, donc $\xi^{1+q+q^2} \in \mathbb{F}_q$. Ainsi, on a l'égalité suivante : $(x\xi, x\xi^{q+1}, x) = (x\xi, (x\xi)\xi^q, (x\xi)(\xi^q)^{q+1}) \in \mathcal{T}$ car tr $\xi^q =$ tr $\xi = 0$ vu que le Frobenius relatif $F_q \in \mathbf{Gal}(\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q)$. ◁

On note ainsi $\Gamma_{\mathcal{T}}$ le groupe associé à cette présentation en triangles, et ce groupe a la propriété remarquable suivante qui est démontrée (par des moyens assez complexes) dans [CMSZ] :

Théorème 4.1 *$\Gamma_{\mathcal{T}}$ est un groupe isomorphe à un sous-groupe de $\boldsymbol{PGL}_3(\mathbb{F}_q((T)))$ qui agisse simplement transitivement sur les sommets de l'immeuble $\tilde{A}_2$ associé au groupe $\boldsymbol{PGL}_3(\mathbb{F}_q((T)))$ défini précédemment.*

5 La propriété (T) de Kazhdan

5.1 Définition de la propriété (T)

Pour définir la propriété (T) de Kazhdan, il convient de rappeler quelques définitions. Soit Γ un groupe discret.

Définition 5.1 (Vecteurs presque invariants) *Soient $\varepsilon > 0$, K un compact de Γ. Une représentation unitaire π de Γ possède des vecteurs (ε, K)-invariants si et seulement s'il existe un vecteur unitaire $v \in \mathcal{H}_\pi$ tel que pour tout $g \in K$, $\|\pi(g)(v) - v\| \leq \varepsilon$. On dit que π possède des vecteurs invariants si et seulement s'il existe un vecteur unitaire $v \in \mathcal{H}_\pi$ tel que pour tout $g \in \Gamma$, $\pi(g)(v) = v$.*

Définition 5.2 (Kazhdan, 1967) *Soit Γ un groupe discret. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *Γ possède la propriété (T) de* Kazhdan *;*
- *Toute représentation unitaire de Γ qui possède des vecteurs (ε, K)-invariants pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact K possède des vecteurs invariants ;*
- *Il existe $\varepsilon > 0$ et un compact K tels que toute représentation unitaire de Γ possédant des vecteurs (ε, K)-invariants possède aussi des vecteurs invariants.*

Remarque 5.1 (Isolement de la représentation triviale) *On peut trouver dans [HVB] de nombreuses autres caractérisations de la propriété (T). Notamment, même si on ne va pas préciser ici la topologie que l'on place sur les représentations de Γ, la propriété (T) de* Kazhdan *signifie qu'il existe un voisinage de la représentation triviale dans lequel tout élément (i.e. toute représentation) possède un vecteur invariant, en d'autres termes, la représentation triviale est isolée parmi les représentations irréductibles de Γ.*

Exemple 5.1 *Les groupes finis possèdent la propriété (T) de* Kazhdan*, et $\mathbb{Z}$ ne possède pas cette propriété.*

Démonstration —
- Soit Γ un groupe fini. Si on a un vecteur x qui est $\left(\frac{1}{2}, \Gamma\right)$ invariant, en faisant la moyenne sur les $g \in \Gamma$ de $g.x$, on obtient un vecteur invariant non nul. Donc Γ vérifie la propriété (T).
- $\Gamma = \mathbb{Z}$. Pour tout u complexe de module 1, on a une représentation unitaire de dimension 1, qui a $1 \in \mathbb{Z}$ associe le scalaire u. Pour tout (ε, K), avec $\varepsilon > 0$, et K sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, en prenant pour u un nombre suffisamment proche de 1 mais différent de 1, on a une représentation sans vecteurs invariants admettant un vecteur (ε, K) invariant.

$\triangleleft$

Pour les considérations qui vont suivre, on rappelle la définition d'une $C^\star$-algèbre :

Définition 5.3 ($C^\star$-algèbre) *Une $C^\star$-algèbre est une algèbre de* Banach *(sur $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}$ muni d'une involution semi-linéaire $(\star)$ anti-multiplicative vérifiant l'égalité $\forall a \in \mathcal{A}$, $\|a^\star a\| = \|a\|^2 = \|a^\star\|^2$.*

Remarque 5.2 *L'exemple fondateur des $C^\star$-algèbre est constitué par les endomorphismes d'un espace de* Hilbert*, l'involution $(\star)$ étant l'adjonction. Plus généralement, les sous-algèbres fermées de telles algèbres stables par $(\star)$ suffisent en fait à décrire les $C^\star$-algèbres que nous allons considérer.*

Maintenant, si Γ est un groupe discret engendré par une partie finie S. On note S^{-1} les inverses des éléments de S, et on pose

$$\mu = \frac{1}{|S \cup S^{-1}|} \sum_{g \in S \cup S^{-1}} g \in \mathbb{C}\Gamma$$

On définit sur $\mathbb{C}\Gamma$ la semi-norme suivante, si $x \in \mathbb{C}\Gamma$, $\|x\|$ désigne la borne supérieure (en fait c'est un maximum comme on la le constater plus tard avec la représentation universelle) de $\|\pi(x)\|_{\mathrm{End}(\mathcal{H}_\pi)}$ où π parcourt toutes les représentations unitaires de Γ. Si on prend le complété séparé de $\mathbb{C}\Gamma$ pour cette semi-norme (c'est-à-dire le complété de $\mathbb{C}\Gamma/I$ où I est l'idéal bilatère de $\mathbb{C}\Gamma$ constitué des vecteurs de semi-norme nulle), on obtient une $C^\star$-algèbre $C^\star(\Gamma)$ que l'on appelle $C^\star$-algèbre pleine de Γ. (L'involution $(\star)$ est bien entendu définie comme l'application semi-linéaire qui à $g \in \Gamma$ associe g^{-1}.)

Plus généralement, il peut être utile de définir la $C^\star$-algèbre associée à une représentation unitaire de Γ.

Définition 5.4 ($C^\star$-algèbre d'une représentation) *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ. On note $C^\star_\pi(\Gamma)$ le complété séparé de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la semi-norme $\|x\| = \|\pi(x)\|_{End(\mathcal{H})}$. De plus, $C^\star_\pi(\Gamma)$ s'identifie à la sous-$C^\star$-algèbre de $End(\mathcal{H})$ engendrée par $\pi(\mathbb{C}\Gamma)$. Enfin, on a un morphisme de $C^\star$-algèbres $C^\star(\Gamma) \longrightarrow C^\star_\pi(\Gamma)$.*

Définition 5.5 (Représentation universelle) *Une représentation cyclique de Γ est une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ telle qu'il existe un vecteur $v \in \mathcal{H}$ tel que $\mathbb{C}\Gamma v$ soit dense dans $\mathcal{H}$. La représentation universelle d'un groupe discret Γ est la représentation notée π_{un} qui est la somme directe de toutes les classes d'isomorphies de représentations cycliques (Remarquez que c'est essentiellement un ensemble !). De plus, on a un isomorphisme évident de $C^\star$-algèbres :*

$$C^\star(\Gamma) \cong C^\star_{\pi_{un}}(\Gamma)$$

Dans ce contexte, on peut formuler autrement la propriété (T) de KAZHDAN. En effet, il a été établi dans [HRV] le théorème suivant :

Théorème 5.1 *Γ possède la propriété (T) de* KAZHDAN *si et seulement si* 1 *est un point isolé du spectre de μ dans $C^\star(\Gamma)$.*

Démonstration— On va démontrer le sens le plus difficile (qui est celui que l'on utilise par la suite pour les groupes $\tilde{A}_2$). Dans la définition de μ, on peut supposer que S est une partie symétrique, c'est-à-dire que $S^{-1} = S$.

On suppose donc que 1 est isolé dans le spectre de μ dans $C^\star(\Gamma)$. On note alors A ce spectre privé de $\{1\}$, et il existe $\eta > 0$ tel que $A \subset [-1, 1-\eta]$.

Démontrons la propriété (T). Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ n'ayant pas de vecteurs invariants. Du fait de l'existence du morphisme canonique $C^\star(\Gamma) \longrightarrow C^\star_\pi(\Gamma)$, le spectre de μ dans $C^\star_\pi(\Gamma)$ est inclus dans celui de μ dans $C^\star(\Gamma)$. Comme $C^\star_\pi(\Gamma)$ s'identifie à une sous-$C^\star$-algèbre de $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ (c'est-à-dire stable par adjonction et fermée), le spectre de l'opérateur $\pi(\mu)$ est inclus dans $A \cup \{1\}$. De plus, S est une partie symétrique de Γ, donc $\pi(\mu)$ est un opérateur autoadjoint de $\mathcal{H}$, on peut donc lui appliquer le calcul fonctionnel continu. Comme la fonction indicatrice de $\{1\}$ est une fonction continue sur le spectre de $\pi(\mu)$, on sait qu'il existe deux sous-espaces de HILBERT $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}'$ orthogonaux et stables par $\pi(\mu)$, de telle sorte que $\pi(\mu)$ induise un opérateur μ_1 sur $\mathcal{H}_1$ et μ' sur $\mathcal{H}'$, et le spectre de μ_1 est inclus dans $\{1\}$, celui de μ' dans A. Comme μ_1 est autoadjoint et de spectre inclus dans $\{1\}$, μ_1 est l'identité de $\mathcal{H}_1$, et il vient aisément que les vecteurs fixés par μ_1 sont Γ-invariants. Par hypothèse $\mathcal{H}_1 = 0$, donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A$ et $\mu = \mu'$. L'opérateur μ est autoadjoint et son spectre est inclus dans $[-1, 1-\eta]$, donc

$$\forall v \in \mathcal{H} \qquad \Re \langle v, \pi(\mu)v \rangle \leq (1-\eta) \langle v, v \rangle$$

Par suite, pour tout vecteur $v \in \mathcal{H}$, il existe un élément $g \in S$ tel que $\Re \langle v, \pi(g)v \rangle \leq (1-\eta) \langle v, v \rangle$ de sorte que $\|\pi(g)v - v\| \, \|v\| \geq \langle v, v - \pi(g)v \rangle \geq \eta \|v\|^2$. Ainsi, il n'existe pas de vecteurs $\left(\frac{\eta}{2}, S\right)$-invariants. Par contraposition, on a bien établi la propriété (T) de KAZHDAN pour Γ. $\lhd$

5.2 Énoncé du théorème principal

On va maintenant entrer dans le vif du sujet qui consiste à établir la propriété (T) de KAZHDAN pour les groupes $\tilde{A}_2$:

Théorème 5.2 *Soit X un immeuble $\tilde{A}_2$ épais, et Γ un sous-groupe de $\boldsymbol{Aut}_{tr}(X)$ qui agisse simplement transitivement sur les sommets de X. On suppose que le plan projectif (P, L) associé à ce groupe est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ pour un certain $q \geq 2$. Alors Γ vérifie la propriété (T) de* KAZHDAN.

5.3 La propriété (T) de KAZHDAN par le calcul du spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$

Dans [CMS], ce théorème est démontré de façon très explicite grâce au calcul du spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$, tout en donnant énormément d'informations sur certaines représentations unitaires de Γ.

On se place dans les hypothèse du théorème qui vient d'être énoncé, et le résultat principal établi par DONALD I. CARTWRIGHT, WOJCIECH MŁOTKOWSKI et TIM STEGER dans [CMS] est le suivant :

Théorème 5.3 *Pour $r > 0$, on note γ_r la courbe paramétrée par $\gamma_r(\theta) = \frac{q}{q^2+q+1}\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)e^{\imath\theta} + e^{-2\imath\theta}\right]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Notons $\Sigma^\star$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ contenant $\{1, \jmath, \bar{\jmath}\}$ et la région délimitée par la courbe $\gamma_{\sqrt{q}}$. Le spectre de $\mu^+ = \dfrac{1}{q^2+q+1} \displaystyle\sum_{x \in P} a_x$ dans $C^\star(\Gamma)$ est précisément $\Sigma^\star$.*

Pour pouvoir utiliser le calcul fonctionnel, on aura besoin de ce lemme :

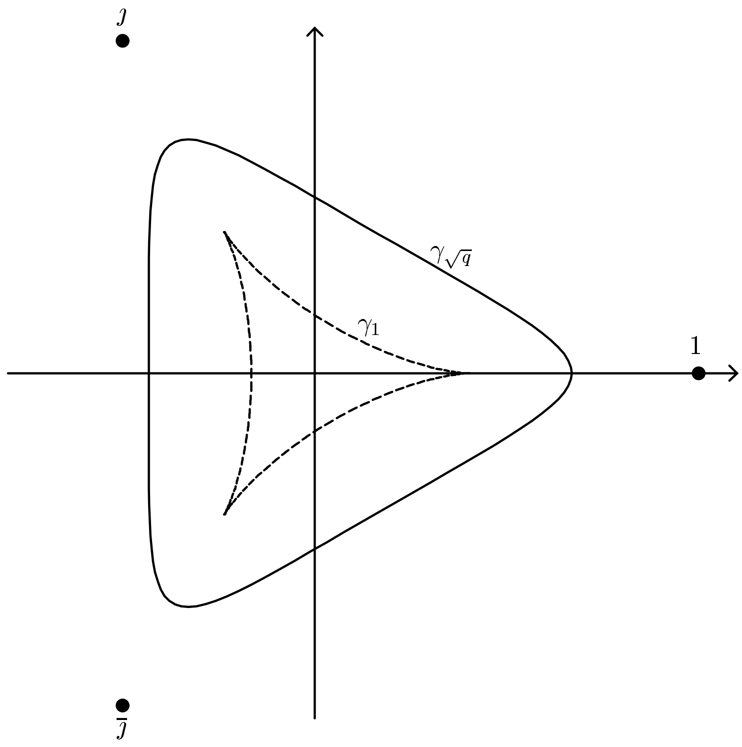
Lemme 5.1 *μ^+ est normal.*

Démonstration— C'est une conséquence immédiate du fait que l'algèbre de convolution des fonctions 1_Γ-biradiales soit *commutative*, mais on peut le voir ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(q^2+q+1\right)^2 \mu^+\mu^- & = & \left(q^2+q+1\right) + \displaystyle\sum_{(x,y) \in P^2; x \neq y} a_x a_y^{-1} \\ \left(q^2+q+1\right)^2 \mu^-\mu^+ & = & \left(q^2+q+1\right) + \displaystyle\sum_{(x,y) \in P^2; x \neq y} a_x^{-1} a_y \end{array} \right.$$

Or les deux sommes $\displaystyle\sum_{(x,y) \in P^2; x \neq y} a_x^{-1} a_y$ et $\displaystyle\sum_{(x,y) \in P^2; x \neq y} a_x a_y^{-1}$ sont égales puisque cela revient à sommer sur l'ensemble $S_{1,1}$.

Fig. 3: Spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$ pour la valeur $q = 13$



Ainsi μ^+ commute avec son adjoint. ◁

Pour calculer le spectre de μ^+, on va utiliser le lemme suivant (qui utilise fondamentalement le fait que Γ soit dénombrable ainsi que le précédent lemme) qui est démontré dans [CMS] :

Lemme 5.2 *Soit $z \in \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *z est dans le spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$*
- *Il existe une représentation π de Γ tel que z soit dans le spectre de μ^+ dans $C^\star_\pi(\Gamma)$*
- *Il existe une représentation π de Γ tel que z soit dans le spectre ponctuel (i.e. valeur propre) de $\pi(\mu^+) \in End(\mathcal{H}_\pi)$*
- *Il existe une fonction de type positif φ sur le groupe Γ telle que $\mu^+ \star \varphi = z\varphi$ (ce qui équivaut à $\varphi \star \mu^+ = z\varphi$)*

5.3.1 $\Sigma^\star$ est inclus dans le spectre

On rappelle les résultat suivants sur les séries principale et complémentaire de représentations sphériques de $\mathbf{Aut}_{tr}(X)$:

Rappel 5.1 (Série principale) *Soit $s = (s_1, s_2, s_3)$ un triplet de nombres complexes tous de module 1 et tels que $s_1 s_2 s_3 = 1$.*

Alors $\pi_s^{\frac{1}{2}}$ est une représentation unitaire de $\boldsymbol{Aut}_{tr}(X)$ telle que

$$\forall x \in X \qquad \pi_s^{\frac{1}{2}}\left(d\nu_x^{\frac{1}{2}}\Theta^s\right) = \overline{z} d\nu_x^{\frac{1}{2}}\Theta^s \text{ avec } z = \frac{q}{q^2+q+1}(s_1+s_2+s_3)$$

Rappel 5.2 (Série complémentaire) *Soit $s = (s_1, s_2, s_3)$ un triplet de nombres complexes de la forme $s = \left(re^{\imath\theta}, r^{-1}e^{\imath\theta}, e^{-2\imath\theta}\right)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{\sqrt{q}} < r < \sqrt{q}$.*

Alors $\pi_s^{\frac{1}{2}}$ est une représentation unitaire de $\boldsymbol{Aut}_{tr}(X)$ telle que

$$\forall x \in X \qquad \pi_s^{\frac{1}{2}}\left(d\nu_x^{\frac{1}{2}}\Theta^s\right) = \overline{z} d\nu_x^{\frac{1}{2}}\Theta^s \text{ avec } z = \frac{q}{q^2+q+1}(s_1+s_2+s_3)$$

Il est clair qu'une représentation unitaire de $\mathbf{Aut}_{tr}(X)$ donne par restriction une représentation unitaire du groupe $\Gamma < \mathbf{Aut}_{tr}(X)$. Or, dans les résultats sur les séries principale et complémentaire de représentations de $\mathbf{Aut}_{tr}(X)$, l'ensemble des $\overline{z} \in \mathbb{C}$ correspondant à la série principale est l'intérieur de la surface délimitée par la courbe γ_1, tandis que la série complémentaire donne la zone comprise entre les deux courbes γ_1 et $\gamma_{\sqrt{q}}$. En utilisant le fait que le spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$ est un compact, on obtient bien que la surface délimitée par la courbe $\gamma_{\sqrt{q}}$ est dans le spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$.

De plus, on peut faire la remarque suivante, si χ est un caractère unitaire de Γ, alors $\chi(\mu^+)$ est dans le spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$. En effet, l'image de $\mu^+ - \chi(\mu^+)$ par le morphisme d'algèbres $C^\star(\Gamma) \longrightarrow C^\star_\chi(\Gamma) \cong \mathbb{C}$ est 0.

Grâce au fait que le groupe Γ possède une présentation triangulée, par la propriété universelle des groupes définis par générateurs et relations, il existe un unique caractère χ (respectivement χ') tel que pour tout $x \in P$, $\chi(a_x) = \jmath$ (respectivement $\chi'(a_x) = \overline{\jmath}$). (Ces caractères peuvent aussi être obtenus en étudiant le morphisme qui a un automorphisme type-rotative associe le décalage des types qu'il opère, on obtient ainsi un morphisme de Γ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ que l'on peut envoyer ensuite sur $\{1, \jmath, \overline{\jmath}\}$ avec une exponentielle...). On a ainsi deux caractères unitaires χ et χ' de Γ tels que $\chi(\mu^+) = \jmath$ et $\chi'(\mu^+) = \overline{\jmath}$. De plus, pour le caractère trivial χ_1, on a $\chi_1(\mu^+) = 1$, de sorte que $\{1, \jmath, \overline{\jmath}\}$ sont dans le spectre.

Résultat 5.1 *$\Sigma^\star$ est contenu dans le spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$.*

5.3.2 Le spectre est contenu dans $\Sigma^\star$

On se donne un nombre complexe z contenu dans le spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$. Il existe donc une fonction φ de type positif sur Γ telle que $\mu^+ \star \varphi = \varphi \star \mu^+ = z\varphi$.

On considère maintenant la matrice $M_\varphi = \left(\varphi(x^{-1}y)\right)_{(x,y)\in\Pi^2}$ qui est positive. Dans [CMS], il est démontré comment se ramener au cas où φ est 1_Γ-biradiale, et ainsi le fait que $\mu^+ \star \varphi = z\varphi$, $\mu^- \star \varphi = \overline{z}\varphi$ et que $\varphi(1_\Gamma) = 1$ permet de calculer explicitement les coefficients de la matrice M vu qu'ils sont intimement liés aux valeurs $p_{m,n}(z, \overline{z})$ d'après les résultats tirés de [CM] qui ont été énoncés plus tôt.

On note $m = q^2 + q + 1$, dans la décomposition $\Pi = P \coprod L$, avec $P = S_{1,0}$ et $L = S_{0,1}$, on peut écrire :

$$\lambda I_{2m} - M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

On note $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ la matrice dont les coefficients sont tous égaux à β excepté les coefficients diagonaux qui sont tous égaux à α. On a $A = D = \mathcal{M}(\lambda - 1, -p_{1,1})$, $C = B^\star$. Et, le coefficient en (u, v) où $u \in S_{1,0}$ et $v \in S_{0,1}$ vaut $-p_{1,0}$ si u appartient à la droite v et $-p_{0,2}$ sinon.

Or, les valeurs $p_{m,n}$ sont connues :

$$\begin{cases} p_{1,0} = z \\ p_{1,1} = \frac{(q^2+q+1)|z|^2-1}{q^2+q} \\ p_{0,2} = \frac{(q^2+q+1)\overline{z}^2-(q+1)z}{q^2} \end{cases}$$

En utilisant les propriétés du plan projectif d'ordre q, il vient que les matrices A et C commutent, et qu'ainsi le déterminant de $\lambda I_{2m} - M$ est égal au déterminant de la matrice $AD - CB$. Ensuite, par le calcul, on peut établir que $AD - CB = \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ avec

$$\begin{cases} \alpha = (\lambda-1)^2 + (q^2+q)p_{1,1}^2 - \left[(q+1)\left|p_{1,0}^2\right| + q^2\left|p_{0,2}\right|^2\right] \\ \beta = -2(\lambda-1)p_{1,1} + (q^2+q-1)p_{1,1}^2 - \left[\left|p_{1,0}\right|^2 + q(\overline{p_{1,0}}p_{0,2} + p_{1,0}\overline{p_{0,2}}) + (q^2-q)\left|p_{0,2}\right|^2\right] \end{cases}$$

En explicitant le déterminant de cette matrice, on obtient que les valeurs propres de M sont positives ou nulles si et seulement si $z \in \Sigma^\star$ c'est-à-dire

$$(q+1)^2(z^3 + \overline{z}^3) - (q^2+q+1)|z|^4 - (q^2+4q+1)|z|^2 + q \geq 0$$

Résultat 5.2 *Le spectre de μ^+ dans $C^\star(\Gamma)$ est contenu dans $\Sigma^\star$.*

5.3.3 Démonstration de la propriété (T) de Kazhdan

Comme μ^+ est normal, on peut lui appliquer le calcul fonctionnel continu, ainsi le spectre de $\mu = \frac{1}{2}\left[\mu^+ + \mu^-\right]$ dans $C^\star(\Gamma)$ est la partie réelle de $\Sigma^\star$, et il est ensuite clair que 1 y est isolé, donc Γ satisfait la propriété (T) de Kazhdan.

5.4 Une preuve cohomologique de la propriété (T) de Kazhdan

On va maintenant donner une autre approche du théorème dont on va énoncer une version légèrement différente, qui, tout en donnant moins d'informations sur les représentations unitaires de Γ, nécessite peu de connaissances sur les immeubles $\tilde{A}_2$.

On peut donner d'autres définitions équivalentes de la propriété (T) de Kazhdan et notamment une définition utilisant la cohomologie des groupes, c'est ainsi que dans [HVB], le théorème suivant est établi :

Théorème 5.4 *Soit Γ un groupe discret, Γ vérife la propriété (T) de* Kazhdan *si et seulement si pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de Γ, le premier module de cohomologie $H^1(\Gamma; \mathcal{H}_\pi) = 0$.*

Dans [Zuk], Andrzej Zuk donnait une preuve particulièrement élégante de la propriété (T) de Kazhdan pour des groupes agissant sur des polyèdres. Sa preuve repose d'une part sur la cohomologie des groupes à coefficients dans une représentation unitaire et d'autre part sur des propriétés du laplacien.

Pour avoir un résultat *simple*, on fait l'hypothése suivante :

Hypothèse 5.1 *Soit $\tilde{X}$ un immeuble $\tilde{A}_2$ épais, Γ un sous-groupe de $\boldsymbol{Aut}\left(\tilde{X}\right)$. On suppose deux choses :*

- *Il n'existe qu'un nombre fini d'orbites de sommets de $\tilde{X}$ pour l'action de Γ.*
- *Pour tout simplexe σ de $\tilde{X}$ et tout $g \in \Gamma - \{1\}$, il n'existe pas $x \in \sigma$ et $y \in g.\sigma$ tels que x et y soient voisins dans $\tilde{X}$.*

Remarque 5.3 *La première partie de l'hypothèse est bien entendu la partie fondamentale, puisque l'on pourrait en fait s'affranchir de la seconde partie de l'hypothèse, mais grace à elle on va pouvoir introduire naturellement un complexe simplicial fini $\tilde{X}/\Gamma$ qui dans un certain sens admet $\tilde{X}$ pour revêtement.*

Et on va pouvoir déduire des travaux d'Andrzej Zuk le théorème suivant :

Théorème 5.5 *Pour toute représentation unitaire π de Γ, $H^1(\Gamma; \mathcal{H}_\pi) = 0$. Ainsi Γ a la propriété (T) de* Kazhdan.

5.4.1 Simplification du calcul cohomologique

Il convient de définir ce que sont les modules de cohomologie ! Soit Γ un groupe. On note $\mathbb{Z}\Gamma$ l'algèbre de Γ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ possède une structure de $\mathbb{Z}\Gamma$-module pour l'action triviale de Γ sur $\mathbb{Z}$. On appelle résolution libre du $\mathbb{Z}\Gamma$-module $\mathbb{Z}$ toute suite exacte de $\mathbb{Z}\Gamma$-modules libres de la forme suivante :

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire de Γ. On peut appliquer le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(-, \mathcal{H}_\pi)$, ce qui donne ce que l'on appelle un complexe de la forme suivante où l'on désigne $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(C_n, \mathcal{H}_\pi)$ par $\mathcal{C}^n$:

$$\cdots \longleftarrow \mathcal{C}^n \xleftarrow{\delta^n} \mathcal{C}^{n-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathcal{C}^1 \xleftarrow{\delta^1} \mathcal{C}^0 \longleftarrow \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_\pi) \longleftarrow 0$$

On a encore $\delta^{n+1}\delta^n = 0$, mais cependant, cette suite n'est pas nécessairement exacte, c'est ainsi que l'on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} Z^n & = & \ker\left(\delta^{n+1} : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}\right) \\ B^n & = & \mathrm{Im}\left(\delta^n : \mathcal{C}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{C}^n\right) \end{array} \right.$$

(On a pris la convention disant que δ^0 est la flèche triviale $0 \longrightarrow \mathcal{C}^0$.) Bien entendu $B^n \subset Z^n$, et justement on note

$$H^n(\Gamma; \mathcal{H}_\pi) = \frac{Z^n}{B^n}$$

Le lemme fondamental de l'algèbre homologique dit notamment que $H^n(\Gamma; \mathcal{H}_\pi)$ ne dépend pas de la résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}\Gamma$-module qui avait été choisie au départ (cf. [Spa], [Bro2]).

Proposition 5.1 *La réalisation géométrique d'un immeuble $\tilde{A}_2$ est un espace topologique contractile.*

Démonstration— On peut fixer un sommet x_0 dans l'immeuble. Pour montrer que X est contractile, il suffit de définir une homotopie sur chacun des appartements de X contenant x_0 (de façon compatible bien sûr.) Or, chaque appartement Σ est visuellement $\mathbb{C}$. Si on a placé x_0 au point $(0, 0)$, on définit l'homotopie $h_\Sigma(\lambda, x) = \lambda x$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{C}$. Comme l'enveloppe convexe de deux sommets d'un immeuble ne dépend pas de l'appartement qui les contient tous les deux, on voit que les homotopies h_Σ sont compatibles, ce qui établit que X est contractile. $\lhd$

Maintenant, on suppose que Γ agit sur un immeuble $\tilde{A}_2$ X. Comme X est contractile, son homologie est celle du point (du fait de l'invariance par homotopie des groupes d'homologie.). On admet que son homologie en tant qu'espace topologique est la même que son homologie comme complexe simplicial (cf.[Spa]), ce qui permet d'assurer l'exactitude de la suite de $\mathbb{Z}$-modules suivante :

$$0 \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{d} C_1(X) \xrightarrow{d} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Ces espaces sont définis ainsi (cf. [Spa]) : pour chaque simplexe σ (de dimension n avec $n \in \{0,1,2\}$) de X on choisit une orientation (c'est-à-dire une fonction de $\{0,\dots,n\}$ vers σ modulo un élément du groupe alterné sur $n+1$ lettres.). Ainsi, C_n désigne le $\mathbb{Z}$-module libre de base l'ensemble des simplexes σ (avec une orientation prédéfinie) de dimension n (c'est-à-dire composé de $n+1$ sommets.) Si $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ est un simplexe, on peut convenir que $[x_{\gamma 0},\dots,x_{\gamma_n}] = \epsilon(\gamma)[x_0,\dots,x_n]$ où $\epsilon(\gamma)$ désigne la signature d'une permutation γ.

L'opérateur de bord est défini comme suit :

$$\begin{cases} d[x_0,x_1,x_2] & = & [x_1,x_2]-[x_0,x_2]+[x_0,x_1] \\ d[x_0,x_1] & = & [x_1]-[x_0] \\ d[x_0] & = & 0 \end{cases}$$

On appelle coefficient d'incidence de deux simplexes orientés s et t, le coefficient (noté $[s:t]$) associé au simplexe orienté s dans l'écriture de dt. (Par exemple, si $s=[x_0]$ et $t=[x_0,x_1]$ alors $[s:t]=-1$.). Par ailleurs, l'opérateur ε est défini par $\varepsilon[x]=1$ pour tout sommet x de X.

Vu que Γ est supposé agir par automorphismes du complexe simplicial X, l'opérateur de bord commute à l'action de Γ, la suite exacte de $\mathbb{Z}$-module obtenue ci-dessus grâce au fait que X est contractile permet de dire qu'il s'agit en fait d'une suite exacte de $\mathbb{Z}\Gamma$-modules.

Dans le prochain paragraphe, on verra comment on montrera que cette résolution est bien composée de $\mathbb{Z}\Gamma$-modules libres de type fini (puisque l'on a tout fait pour bien entendu). Ainsi, le calcul de la cohomologie de Γ à coefficients dans une représentation unitaire sera beaucoup plus simple à calculer par l'intermédiaire de cet immeuble X sur lequel agit Γ.

5.4.2 Un résultat de Andrzej Zuk

Maintenant, il s'agit d'utiliser la construction précédente d'une résolution de $\mathbb{Z}$.

Définition 5.6 *On note X l'ensemble des orbites de sommets de $\tilde{X}$ sous l'action de Γ. On note p la projection $p:\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}/\Gamma = X$. On munit X d'une structure de complexe simplicial en disant qu'un simplexe de X est la projection d'un simplexe de $\tilde{X}$.*

L'hypothèse faite permet d'identifier les classes de simplexes de $\tilde{X}$ modulo l'action de Γ avec les simplexes de X. D'un certain point de vue, $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X. On utilisera ainsi par la suite que le voisinage d'un sommet de X ressemble beaucoup au voisinage d'un sommet de $\tilde{X}$ situé dans la fibre au dessus de ce sommet de X.

On peut aussi remarquer que le stabilisateur de tout simplexe de $\tilde{X}$ sous l'action de Γ est trivial, donc la résolution construite dans la section précédente est bien constituée de $\mathbb{Z}\Gamma$-modules libres (une base étant constituée de simplexes de $\tilde{X}$ formant un système de représentants des simplexes de X), ce qui justifie le calcul cohomologique qui va suivre. Ainsi, il s'agit d'étudier le premier groupe de cohomologie du complexe suivant :

$$0 \longleftarrow C^2_\pi \xleftarrow{d} C^1_\pi \xleftarrow{d} C^0_\pi \longleftarrow 0$$

Ici C^r_π désigne l'ensemble des fonctions f de l'ensemble S^r des simplexes orientés (de $\tilde{X}$) de dimension r à valeurs dans $\mathcal{H}_\pi$ qui sont Γ-équivariantes c'est-à-dire que si σ est un simplexe orienté, alors $f(g.\sigma) = \pi(g)(f(\sigma))$. (Bien entendu, si s et s' sont deux orientations différentes d'un même simplexe, on sous-entend que $f(s) = -f(s')$.). L'opérateur de cobord est naturellement défini par : si $f \in C^r_\pi$, $df \in C^{r+1}_\pi$ avec :

$$df(s) = \sum_{s \supset t \in S^r} [t:s] f(t)$$

Clairement, ce complexe est le même que celui de la section précédente.

On note $\mathcal{S}^r(X)$ l'ensemble des simplexes non orientés de dimension r de X. L'hypothèse disant que $\tilde{X}$ a un nombre fini d'orbites sous l'action de Γ permet de dire que X est un complexe simplicial *fini*, ce qui justifie entre autres la définition suivante :

Définition 5.7 *Pour tout simplexe orienté σ, on note $n(\sigma)$ le nombre de triangles non orientés qui contiennent σ, et on définit sur C^r_π le produit scalaire suivant :*

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^r(X)} \langle f(\sigma), g(\sigma)\rangle \, n(\sigma)$$

Pour ce produit scalaire, l'opérateur (évidemment continu) d admet un adjoint $d^\star$ défini par : si $f \in C^r_\pi$, $d^\star f \in C^{r-1}_\pi$ avec :

$$d^\star f(s) = \sum_{s \subset t \in S^r} [s:t] \frac{n(t)}{n(s)} f(t)$$

Définition 5.8 (Partition de l'unité) *Pour tout sommet v de $\tilde{X}$ (ou éventuellement un élément v de X), on définit un endomorphisme de C^1_π qui à f associe f_v définie par : pour toute arête e de $\tilde{X}$, on a :*

$$f_v(e) = \begin{cases} f(e) & \text{s'il existe } g \in \Gamma \text{ tel que } g.v \in e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 5.9 (Link) *On appelle link d'un sommet v l'ensemble $L(v)$ des voisins de v dans $\tilde{X}$. On munit $L(v)$ d'une structure de complexe simplicial de dimension 1 en définissant une arête de $L(v)$ comme étant une paire $\{s, s'\}$ telle que (v, s, s') soit un triangle de $\tilde{X}$. Si s est un élément du link de v, on note $N(s)$ le nombre de voisins de s dans $L(v)$.*

Les fonctions $f^\star$ de $L(v)$ vers $\mathcal{H}_\pi$ (i.e. les 0-cochaînes de $L(v)$) se correspondent bijectivement avec les 1-cochaînes de la forme f_v par la formule suivante

$$\forall s \in L(v) \qquad f^\star(s) = [v : [s,v]] f_v[s,v] = f_v[s,v]$$

On définit un produit scalaire sur les 0-cochaînes de $L(v)$ ainsi :

$$\langle f^\star, f^\star \rangle = \sum_{s \in L(v)} \langle f^\star(s), f^\star(s) \rangle N(s)$$

Ainsi, on obtient sans difficulté que la correspondance précedente est isométrique : pour toute fonction $f \in C^1_\pi$, $\langle f^\star, f^\star \rangle = \langle f_v, f_v \rangle$

Définition 5.10 (Laplacien sur le link) *Pour toute 0-cochaîne $f^\star$ sur le link $L(v)$, on pose*

$$\forall s \in L(v) \qquad \Delta f^\star(s) = f^\star(s) - \frac{1}{N(s)} \sum_{s' \text{ voisin de } s \text{ dans } L(v)} f^\star(s')$$

Δ est donc un endomorphisme de l'espace de Hilbert *constitué des 0-cochaînes sur $L(v)$.*

Propriété 5.1

$$\forall f \in C^1_\pi \qquad \langle df_v, df_v \rangle = \langle \Delta f^\star, f^\star \rangle$$

En particulier Δ est un opérateur autoadjoint positif.

Démonstration— Il suffit d'écrire $\langle df_v, df_v \rangle = \langle d^\star df_v, f_v \rangle$ et d'expliciter le terme de gauche avant de remarquer que l'on retrouve bien précisément $\langle \Delta f^\star, f^\star \rangle$. ◁

Propriété 5.2

$$\forall f \in C^1_\pi \qquad \langle df, df \rangle = \sum_{v \in X} \left[\langle df_v, df_v \rangle - \frac{1}{2} \langle f_v, f_v \rangle \right]$$

Démonstration— Si t est un triangle de $\tilde{X}$, et $v \in t$, on note e_v une arête orientée de t qui ne contient pas v, et on obtient directement que $df(t) = df_v(t) + [e_v : t] f(e_v)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in X} \langle df_v, df_v \rangle &= \sum_{v \in X} \sum_{t \in \mathcal{S}^2(X); v \in t} \langle df(t) - [e_v : t] f(e_v), df(t) - [e_v : t] f(e_v) \rangle \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S}^2(X)} \sum_{v \in t} [\langle df(t), df(t) \rangle - 2 \langle df(t), [e_v : t] f(e_v) \rangle] + \sum_{v \in X} \sum_{t \in \mathcal{S}^2(X); v \in t} \langle f(e_v), f(e_v) \rangle \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S}^2(X)} [3 \langle df(t), df(t) \rangle - 2 \langle df(t), df(t) \rangle] + \frac{1}{2} \sum_{v \in X} \sum_{e \in \mathcal{S}^1(X); v \in e} \langle f_v(e), f_v(e) \rangle n(e) \\
&= \langle df, df \rangle + \frac{1}{2} \sum_{v \in X} \langle f_v, f_v \rangle
\end{aligned}$$

◁

Proposition 5.2 *Pour tout sommet v de $\tilde{X}$, on note c_v le minimum de la plus petite valeur propre non nulle du laplacien sur le link $L(v)$. Ensuite, on note c le minimum de la quantité $c_v + c_w$ où (v,w) parcourt toutes les arètes de X. Alors,*

$$\forall f \in C^1_\pi \qquad \langle df, df\rangle + \langle d^\star f, d^\star f\rangle \geq (c-1)\langle f, f\rangle$$

Démonstration— Soit v un sommet de X. On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 sur $L(v)$). La fonction $f^\star - \frac{1}{2}d^\star f(v)\mathbf{1}$ est clairement orthogonale aux fonctions constantes sur le link donc :

$$\begin{aligned}
\langle df_v, df_v\rangle &= \langle \Delta f^\star, f^\star\rangle = \left\langle \Delta\left(f^\star - \frac{1}{2}d^\star f(v)\mathbf{1}\right), f^\star - \frac{1}{2}d^\star f(v)\mathbf{1}\right\rangle \\
&\geq c_v \left\langle f^\star - \frac{1}{2}d^\star f(v)\mathbf{1}, f^\star - \frac{1}{2}d^\star f(v)\mathbf{1}\right\rangle \\
&\geq c_v \langle f^\star, f^\star\rangle - \frac{c}{4}\langle d^\star f(v), d^\star f(v)\rangle \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle
\end{aligned}$$

Un calcul vraiment élémentaire montre que $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = 2n(v)$, de sorte que

$$\langle df_v, df_v\rangle - \frac{1}{2}\langle f_v, f_v\rangle + \frac{c_v}{2}\langle d^\star f(v), d^\star f(v)\rangle n(v) \geq \left(c_v - \frac{1}{2}\right)\langle f_v, f_v\rangle$$

Il est très facile de voir que la plus grande valeur propre du laplacien est inférieure ou égale à 2 de sorte que

$$\langle df_v, df_v\rangle - \frac{1}{2}\langle f_v, f_v\rangle + \langle d^\star f(v), d^\star f(v)\rangle \geq \left(c_v - \frac{1}{2}\right)\langle f_v, f_v\rangle$$

On peut sommer sur tous les $v \in X$ et utiliser les résultats précédents :

$$\langle df, df\rangle + \langle d^\star f, d^\star f\rangle \geq \sum_{v\in X}\left(c_v - \frac{1}{2}\right)\langle f_v, f_v\rangle \geq (c-1)\langle f, f\rangle$$

◁

Corollaire 5.1 *Si $c > 1$, alors $H^1(\Gamma; \mathcal{H}_\pi) = 0$*

Démonstration— On remarque d'abord que Z^1_π est un sous-espace fermé de C^1_π, il s'agit donc d'un espace de Hilbert. On peut considérer l'endomorphisme induit par $dd^\star$ à l'espace des 1-cocycles Z^1_π. Pour tout $f \in Z^1_\pi$, on a $\langle dd^\star f, f\rangle \geq (c-1)\langle f, f\rangle$. Or $c - 1 > 0$, il est ensuite connu que cette inégalité implique que $dd^\star$ est un endomorphisme inversible de l'espace de Hilbert Z^1_π, ce qui montre que tout 1-cocycle est un 1-cobord. ◁

5.4.3 Fin de la démonstration

Le résultat de Andrzej Zuk donne une condition suffisante pour l'annulation des groupes de cohomologie à coefficients dans les représentations unitaires de Γ. Or, on a vu que si $\tilde{X}$ est un immeuble $\tilde{A}_2$ épais, le link de tout sommet de $\tilde{X}$ a pour graphe le graphe d'incidence d'un plan projectif fini abstrait d'ordre $q \geq 2$ (et pas nécessairement *a priori* sur un corps fini $\mathbb{F}_q$), et dans ce cas les valeurs propres du laplacien sont très faciles à calculer, et on obtient que pour sommet v de $\tilde{X}$, $c_v = 1 - \frac{\sqrt{q}}{q+1} > \frac{1}{2}$. Ainsi la constante c est strictement plus grande que 1, ainsi on a vérifie la condition voulue ; et finalement on démontre que Γ possède la propriété (T) de Kazhdan.

Remarque 5.4 *Depuis,* Andrzej Zuk *a (encore) simplifié sa méthode de démonstration de la propriété (T) de* Kazhdan *de groupes qui sont donnés par générateurs et relations, et en particulier, il n'a plus vraiment besoin d'utiliser les modules de cohomologie pour obtenir ce résultat.*

Annexe : Valeurs propres du laplacien sur un plan projectif

Calcul 1 *La première valeur propre non nulle du laplacien sur le link d'un sommet d'un immeuble $\tilde{A}_2$ épais est strictement plus grande que $\frac{1}{2}$.*

Démonstration— On note (P, L) le plan projectif des voisins d'un sommet s de X. La matrice du laplacien dans la base (P, L) est de la forme $\Delta = \begin{bmatrix} I_n & -\frac{1}{q+1}B \\ -\frac{1}{q+1}{}^tB & I_n \end{bmatrix}$ où B désigne la matrice d'incidence de ce plan projectif (c'est-à-dire que cette matrice contient des 1 aux cases $(x, \mathcal{D})$ telles que $x \in \mathcal{D}$ et 0 ailleurs.) On obtient facilement que :

$$\det(\lambda - \Delta) = \det\left[(\lambda - 1)^2 I_n - \frac{1}{(q+1)^2}{}^tBB\right]$$

Maintenant B est un plan projectif, donc $n = q^2 + q + 1$ pour $q \geq 2$, et chaque colonne et chaque ligne de B contient exactement $q + 1$ cases contenant 1 et q^2 contenant 0. On obtient que la matrice $\left[(\lambda - 1)^2 I_n - \frac{1}{(q+1)^2}{}^tBB\right]$ est de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ avec $\alpha = (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{q+1}$ et $\beta = -\frac{1}{(q+1)^2}$. Il s'ensuit que le déterminant cherché est $(\alpha - \beta)^{n-1}(\alpha + (n-1)\beta)$. Ainsi le polynôme caractéristique de Δ est

$$X(X-2)\left(X - \left(1 - \frac{\sqrt{q}}{q+1}\right)\right)^{n-1}\left(X - \left(1 + \frac{\sqrt{q}}{q+1}\right)\right)^{n-1}$$

Ainsi 0 est valeur propre simple (d'espace propre les fonctions constantes sur le link), et la plus petite valeur propre du laplacien est $1 - \frac{\sqrt{q}}{q+1}$ qui est strictement plus grande que $\frac{1}{2}$ si $q \geq 2$. $\triangleleft$

Bibliographie

Immeubles

[Tits] JACQUES TITS. *A local approach to buildings* in *The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift. Springer Verlag.* 1981.

[Ron] MARK RONAN. *Lectures on buildings.* Academic Pres. 1989.

[Bro1] KENNETH S. BROWN. *Buildings.* Springer. 1989.

[Cart] DONALD I. CARTWRIGHT. *A brief introduction to buildings* in *Harmonic functions on trees and buildings. Contemporary Mathematics*, 206. 1995.

[Steg] TIM STEGER. *Local fields and buildings* in *Harmonic functions on trees and buildings. Contemporary Mathematics*, 206. 1995.

Propriété (T)

[HVB] PIERRE DE LA HARPE, ALAIN VALETTE, MARC BURGER. *La propriété (T) de* KAZHDAN *pour des groupes localement compacts. Astérisque*, 175. 1989.

[HRV] PIERRE DE LA HARPE, A. GUYAN ROBERTSON, ALAIN VALETTE. *On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group. Israël Journal of Mathematics*, 81. 1993.

Séries de représentations des groupes $\tilde{A}_2$

[CMS] DONALD I. CARTWRIGHT, WOJCIECH MŁOTKOWSKI, TIM STEGER. *Property (T) and $\tilde{A}_2$-groups. Annales de l'Institut* FOURIER, 44. 1993.

[CMSZ] DONALD I. CARTWRIGHT, ANNA MARIA MANTERO, TIM STEGER, ANNA ZAPPA. *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{A}_2$. Geometriae Dedicata*, 47, no.2. 1993.

[CM] DONALD I. CARTWRIGHT, WOJCIECH MŁOTKOWSKI. *Harmonic analysis for groups acting on triangle buildings. Journal of Australian mathematical Society. Series A : Pure Mathematics and Statistics*, 56, no.3. 1994.

Méthodes cohomologiques

[Bro2] KENNETH S. BROWN *Cohomology of groups.* Springer. 1982.

[Spa] EDWIN H. SPANIER *Algebraic Topology.* Springer. 1989.

[Zuk] ANDRZEJ ZUK. *La propriété (T) de* KAZHDAN *pour les groupes agissant sur les polyèdres. Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 323, no.5. 1996.

[Pan] PIERRE PANSU. *Formules de* MATSUSHIMA, *de* GARLAND *et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles. Bulletin de la Société Mathématique de France*, 126, no.1. 1998.

Généralités

[Bour] NICOLAS BOURBAKI. *Intégration, Chapitre 7 : Mesure de* HAAR. Hermann, Paris. 1963.

[Dix] JACQUES DIXMIER. *Les $C^\star$-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, Paris. 1964.

[Berb] STERLING K. BERBERIAN. *Notes on Spectral Theory.* D. Van Nostrand. 1966.

[Ser] JEAN-PIERRE SERRE. *Corps locaux.* Hermann. 1968.