CALCUL DIFFÉRENTIEL EN CARACTÉRISTIQUE 0
THÉORÈMES DE GROTHENDIECK

par

Joël Riou

Table des matières

Cet exposé a pour but de motiver la définition du site cristallin grâce à l'étude du site infinitésimal dont il est le raffinement en caractéristique non nulle.

Pour cela, nous allons développer les notions de calcul différentiel en géométrie algébrique qui sont nécessaires à la compréhension du théorème de comparaison de Grothendieck entre la S-cohomologie de de Rham d'un S-schéma lisse X et la cohomologie du site infinitésimal de X/S à coefficients dans le faisceau des fonctions.

1. La cohomologie de de Rham algébrique

1.1. Définition générale. — Dans la suite, on supposera implicitement que les schémas sont noethériens.

Définition 1.1. — Soit $f\colon X \to S$ un morphisme de schémas. On note $\Omega^1_{X/S}$ le $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent des 1-formes différentielles sur X relativement à S.

Rappelons brièvement la construction du faisceau des formes différentielles. Si $S = \operatorname{Spec} A$ et $X = \operatorname{Spec} B$, on note J le noyau de la multiplication $\mu\colon B \otimes_A B \to B$. Il est évident que sur le quotient J/J^2, les deux actions canoniques de B coïncident. On note alors $\Omega^1_{B/A}$ le B-module

J/J^2 et on définit une application A-linéaire $\mathrm{d}\colon B \to \Omega^1_{B/A}$ en associant $b\otimes 1 - 1\otimes b$ à $b \in B$. On vérifie aussitôt que d est la A-dérivation universelle[(1)] de source B.

Dans le cadre plus général d'un morphisme de schémas quelconque $\pi\colon X \to S$, on peut noter $\mathscr{J}$ le faisceau d'Idéaux $\ker(\mu\colon \mathscr{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)} \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X)$ de $\mathscr{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)} \mathscr{O}_X$ et poser $\Omega^1_{X/S} = \mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ qui est un $\mathscr{O}_X$-Module dont on peut vérifier qu'il est quasi-cohérent et dont la définition généralise celle du cas précédent où X et S étaient supposés affines.

Définition 1.2. — Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\Omega^n_{X/S}$ la n-ième puissance extérieure du $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\Omega^1_{X/S}$. En particulier, $\Omega^0_{X/S} = \mathscr{O}_X$.

Comme dans le cas des variétés différentiables[(2)], on peut définir un complexe de faisceaux de *groupes abéliens* $\Omega^\bullet_{X/S}$ sur X, dont l'opérateur bord est appelé différentielle extérieure et vérifie la règle des signes $\mathrm{d}(b\wedge c) = \mathrm{d}b \wedge c + (-1)^{\deg b} b \wedge \mathrm{d}c$.

Définition 1.3. — Soit S un schéma noethérien et X un S-schéma de type fini. On définit la cohomologie de de Rham par la formule

$$\mathbb{H}_{dR}(X/S) = \mathbf{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}; \Omega^\bullet_{X/S}) \in \mathbf{D}^b(\Gamma(S;\mathscr{O}_S))$$

Plus précisément, si on note $\pi\colon X \to S$ le morphisme structural, on peut considérer l'objet $\mathscr{H}_{dR}(X/S)$ de $\mathbf{D}^b(S;\mathscr{O}_S)$ défini par la formule $\mathscr{H}_{dR}(X/S) = \mathbf{R}\pi_\star\Omega^\bullet_{X/S}$, on a alors $\mathbb{H}_{dR}(X/S) = \mathbf{R}\Gamma(S_{\mathrm{Zar}}; \mathscr{H}_{dR}(X/S))$.

Remarque 1.4. — Si X est un S-schéma affine, alors $\mathscr{H}_{dR}(X/S) = \pi_\star\Omega^\bullet_{X/S}$. En effet, les $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents sont acycliques pour le foncteur image directe $\pi_\star$ si π est un morphisme affine, ce qui découle du fait que la cohomologie des schémas affines à valeurs dans un faisceau quasi-cohérent est triviale, fait que l'on utilisera implicitement dans la suite. En particulier, pour calculer $\mathbb{H}_{dR}(X/S)$ si X et S sont affines, il suffit d'appliquer le foncteur sections globales au complexe $\Omega^\bullet_{X/S}$.

***Proposition 1.5* (Formule de Künneth)**. — *Soient X et Y deux S-schémas lisses et de type fini. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^b(S;\mathscr{O}_S)$*

$$\mathscr{H}_{dR}(X\times_S Y/S) \xleftarrow{\sim} \mathscr{H}_{dR}(X/S) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{H}_{dR}(Y/S)$$

En particulier, si $S = \operatorname{Spec} k$ où k est un corps, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{H}^n_{dR}(X\times_k Y/k) = \bigoplus_{p+q=n} \mathbb{H}^p_{dR}(X/k)\otimes_k \mathbb{H}^q_{dR}(Y/k)$$

Démonstration. — Si on croit à l'existence d'une flèche canonique[(3)], grâce aux suites exactes de Mayer-Vietoris, on se ramène aisément au cas où X, Y et S sont affines. Mais alors, c'est évident car il suffit de constater que $\Omega^\bullet_{X\times_S Y/S} = \Omega^\bullet_{X/S}\otimes_{\Gamma(S;\mathscr{O}_S)} \Omega^\bullet_{Y/S}$ et que ces complexes sont fabriqués à partir de $\Gamma(S;\mathscr{O}_S)$-Modules plats en vertu de l'hypothèse de lissité. □

On notera que si S est le spectre premier d'un corps, les hypothèses de lissité (que de toute façon on peut se contenter de demander à un seul des schémas X et Y) sont de trop dans la proposition précédente. La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice au lecteur :

---

(1) Ceci signifie que pour tout B-module M, toute A-dérivation $B \to M$ se factorise de manière unique sous la forme $B \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_{B/A} \xrightarrow{f} M$ où f est une application B-linéaire.

(2) Nous reviendrons plus précisément sur la construction de ce complexe dans le cadre plus général des connexions intégrables sur des fibrés vectoriels.

(3) Ce n'est pas du tout trivial : soit on utilise la cohomologie de Čech associée à des recouvrements par des ouverts affines convenables (en supposant les schémas séparés), soit, dans le cas général, on utilise la subtile construction générale de Deligne dans [**SGA 4 XVII 5.4**] d'un morphisme $\mathbf{R}f_\star(\mathscr{M}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathbf{R}f_\star(\mathscr{N}) \to \mathbf{R}f_\star(\mathscr{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^\star\mathscr{A}} \mathscr{N})$, où $f\colon X \to S$ est un morphisme de topos ayant suffisamment de points, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur S, $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux complexes de faisceaux de $f^\star\mathscr{A}$-Modules sur X vérifiant des hypothèses convenables.

***Proposition 1.6* (Changement de base).** — *Soit X un S-schéma de type fini. On se donne un morphisme de schémas $q\colon T \to S$. Alors, on a un isomorphisme canonique si X est lisse sur S ou que T est plat sur S :*

$$\mathbf{L}q^\star(\mathscr{H}_{dR}(X/S)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_{dR}(X \times_S T/T)$$

1.2. Cas $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. — Soit X un schéma de type fini, lisse et séparé sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. On dispose d'un morphisme évident de sites $\alpha\colon X(\mathbb{C}) \to X_{\mathrm{Zar}}$. Comme $X(\mathbb{C})$ est une variété holomorphe, on dispose du complexe de de Rham holomorphe $\Omega^\bullet_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$ sur $X(\mathbb{C})$. On a alors évidemment une inclusion de complexes de faisceaux

$$i\colon \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}} \to \alpha_\star \Omega^\bullet_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$$

En utilisant la transformation naturelle $\alpha_\star \to \mathbf{R}\alpha_\star$ et en appliquant $\mathbf{R}\Gamma$, on obtient un morphisme dans la catégorie $\mathbf{D}(\mathbb{C})$:

$$\mathbb{H}_{dR}(X/\mathbb{C}) \to \mathbf{R}\Gamma(X(\mathbb{C}); \Omega^\bullet_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}})$$

D'après le lemme de Poincaré holomorphe, on a un quasi-isomorphisme $\underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \Omega^\bullet_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$, et par conséquent on a un morphisme de comparaison pour tout schéma de type fini, lisse et séparé X sur $\mathbb{C}$:

$$\beta\colon \mathbb{H}_{dR}(X/\mathbb{C}) \to \mathbf{H}(X(\mathbb{C}); \mathbb{C})$$

où $\mathbf{H}(X(\mathbb{C}); \mathbb{C})$ désigne la cohomologie singulière de $X(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

***Théorème 1.7* (Alexander Grothendieck).** — *Pour tout schéma de type fini, lisse et séparé X sur $\mathbb{C}$, l'homomorphisme $\beta\colon \mathbb{H}_{dR}(X/\mathbb{C}) \to \mathbf{H}(X(\mathbb{C}); \mathbb{C})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Dans le cas où X est projectif, c'est un corollaire immédiat (modulo une suite spectrale) du théorème (GAGA) de comparaison de Serre entre la cohomologie des faisceaux cohérents sur X_{Zar} et $X(\mathbb{C})$. Dans le cas général, cela utilise notamment la résolution[(4)] des singularités... □

1.3. Cas $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$. — Comme l'a remarqué Grothendieck, le théorème suivant permet de définir les « périodes » d'une variété lisse sur $\mathbb{Q}$:

Théorème 1.8. — *Soit X un schéma de type fini, lisse et séparé sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$*, alors on a un isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{H}^n_{dR}(X/\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^n(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

Démonstration. — Grâce au changement de base, le membre de gauche s'identifie au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{H}^n_{dR}(X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$, qui s'identifie à $\mathbf{H}^n(X(\mathbb{C}); \mathbb{C})$ d'après le théorème de Grothendieck. Ce dernier espace est canoniquement isomorphe à $\mathbf{H}^n(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ en vertu du théorème de finitude suivant : l'homologie singulière des points complexes d'un schéma de type fini, lisse et séparé sur $\mathbb{C}$ est formée de groupes de type fini, nuls en degré suffisamment grand. □

[(4)] Une manière de faire consiste à voir que l'on a un morphisme canonique $\mathbb{H}^{\mathrm{alg}}_{dR} \to \mathbb{H}^{\mathrm{an}}_{dR}$ dans la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(\mathbb{C})$ de Morel-Voevodsky, où $\mathbb{H}^{\mathrm{alg}}_{dR}$ et $\mathbb{H}^{\mathrm{an}}_{dR}$ sont des $\mathbb{P}^1$-spectres représentant respectivement la cohomologie de de Rham algébrique et la cohomologie de de Rham analytique. On notera que le spectre $\mathbb{H}^{\mathrm{alg}}_{dR}$ n'est bien défini que sur un schéma de base de caractéristique 0, car la théorie cohomologique représentée par un $\mathbb{P}^1$-spectre est invariante par homotopie. Il s'agit de montrer que ce morphisme de spectres est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire une $\mathbb{A}^1$-équivalence stable. D'après la résolution des singularités (version faible), on sait que $\mathcal{SH}(\mathbb{C})$ admet comme ensemble de générateurs (à décalage près avec les cercles simpliciaux et de Tate) les spectres X_+ avec X projective lisse sur $\mathbb{C}$, d'où le résultat grâce à (GAGA). On peut en déduire que sur un corps k de caractéristique 0, la cohomologie de de Rham algébrique d'un schéma de type fini et lisse est formée de k-vectoriels de dimension finie...

2. Connexions intégrables sur des fibrés vectoriels

Dans cette partie, nous allons établir l'équivalence entre diverses définitions des connexions intégrables sur des fibrés vectoriels en géométrie algébrique, ce qui prépare la démonstration d'un théorème de Grothendieck visant à donner une définition algébrique de la cohomologie de de Rham sans faire intervenir explicitement les formes différentielles.

2.1. Définition du site infinitésimal et du site stratifiant. —

Définition 2.1. — On dit d'une immersion fermée $X \to Y$ qu'elle est nilpotente si le faisceau quasi-cohérent d'Idéaux $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_Y$ qui la définit est nilpotent[(5)], et on notera $X \rightsquigarrow Y$ de tels morphismes.

En particulier, au niveau des espaces topologiques sous-jacents, une immersion fermée nilpotente est un homéomorphisme.

Remarque 2.2. — Soit $X \rightsquigarrow Y$ une immersion fermée nilpotente. Alors[(6)], X est affine si et seulement si Y est affine.

Définition 2.3. — Soit S un schéma et X un S-schéma de type fini. Les couples $(U, \varphi\colon U \rightsquigarrow T)$, où U est un ouvert de X, T un S-schéma et $U \rightsquigarrow T$ une S-immersion fermée nilpotente, notés $[U \rightsquigarrow T]$ forment les objets d'une catégorie $(X/S)_{\mathrm{inf}}$ de telle sorte que

$$\mathrm{Hom}_{(X/S)_{\mathrm{inf}}}([U \rightsquigarrow T], [U' \rightsquigarrow T'])$$

soit vide si U n'est pas contenu dans U' et égal sinon à l'ensemble des S-morphismes $f\colon T \to T'$ rendant le carré suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "f"] \\ U' \arrow[r] & T' \end{tikzcd}$$

On munira toujours la catégorie $(X/S)_{\mathrm{inf}}$ de la topologie de Zariski, c'est-à-dire la topologie associée à la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes d'un objet $[U \rightsquigarrow T]$ sont les familles évidentes $\{[U_i \rightsquigarrow T_i] \to [U \rightsquigarrow T]\}_{i \in I}$ où $(T_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de T et $(U_i)_{i\in I}$ l'image inverse de ce recouvrement par $U \rightsquigarrow T$, qui est un recouvrement ouvert de U.

Nous allons définir un autre site qui a l'avantage de permettre un calcul plus aisé de la cohomologie :

Définition 2.4. — Soit S un schéma et X un S-schéma de type fini. On note $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ la sous-catégorie pleine de $(X/S)_{\mathrm{inf}}$ formée des objets $\left[U \overset{f}{\rightsquigarrow} T\right]$ tels que pour tout point $t \in T$, il existe un voisinage ouvert V de t dans T et un morphisme de S-schémas $V \to X$ tel que le morphisme composé $f^{-1}(V) \overset{f}{\rightsquigarrow} V \to X$ soit l'immersion ouverte canonique de $f^{-1}(V)$ dans X. On munit $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ de la topologie de Zariski, définie de la même manière que la topologie de $(X/S)_{\mathrm{inf}}$.

Définition 2.5. — Si S est un schéma et X un S-schéma de type fini, pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $(X/S)_{\mathrm{inf}}$ (resp. $(X/S)_{\mathrm{strat}}$) et tout objet $[U \rightsquigarrow T]$ de $(X/S)_{\mathrm{inf}}$ (resp. $(X/S)_{\mathrm{strat}}$), on note $\mathscr{F}_{[U \rightsquigarrow T]}$ le faisceau sur le petit site Zariski T_{Zar} induit par $\mathscr{F}$.

Lemme 2.6. — *Soit S un schéma et X un S-schéma de type fini. Si X est lisse sur S, alors $(X/S)_{\mathrm{strat}} = (X/S)_{\mathrm{inf}}$.*

---

(5) On dira d'un faisceau quasi-cohérent d'Idéaux $\mathscr{I}$ du faisceau structural d'un schéma Y qu'il est nilpotent (resp. localement nilpotent) s'il existe un entier N tel que $\mathscr{I}^N = 0$ (resp. s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de Y tel que pour tout $i \in I$, $\mathscr{I}_{|U_i}$ soit nilpotent).

(6) Je ne sais pas le démontrer autrement qu'en utilisant le critère cohomologique de Serre.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la définition des morphismes formellement lisses. En particulier, avec les notations de la définition du site stratifiant, tout voisinage ouvert *affine* V de t conviendra. $\square$

Définition 2.7. — Soit S un schéma et X un S-schéma de type fini. On note $(\mathscr{O}_X)_{\text{inf}}$ (resp. $(\mathscr{O}_X)_{\text{strat}}$) le faisceau d'anneaux sur $(X/S)_{\text{inf}}$ (resp. $(X/S)_{\text{strat}}$) dont l'anneau des sections sur un objet $[U \rightsquigarrow T]$ est $\Gamma(T; \mathscr{O}_T)$, les morphismes de transitions étant les morphismes évidents.

L'objectif de cette partie est d'introduire quelques objets qui permettront de donner un sens à une formulation plus générale du théorème suivant de Grothendieck que nous démontrerons dans la troisième partie :

***Théorème 2.8* (Alexander Grothendieck).** — *Soit S un schéma et X un S-schéma lisse et séparé. Si S est un $\mathbb{Q}$-schéma, alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{H}_{dR}(X/S) = \mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\text{inf}}; (\mathscr{O}_X)_{\text{inf}})$$

2.2. Modules spéciaux et Modules stratifiés. — Dans ce numéro, on se donne un schéma S et un S-schéma de type fini et séparé X.

Définition 2.9. — Un Module spécial sur X/S est la donnée d'un $(\mathscr{O}_X)_{\text{strat}}$-Module $\mathscr{F}$ sur $(X/S)_{\text{strat}}$ tel que pour tout morphisme $f\colon [U \rightsquigarrow T] \to [U' \rightsquigarrow T']$, si on note encore par abus $f\colon T \to T'$ le morphisme de schémas sous-jacent, alors le morphisme canonique de $\mathscr{O}_T$-Modules $f^\star \mathscr{F}_{[U' \rightsquigarrow T']} \to \mathscr{F}_{[U \rightsquigarrow T]}$, adjoint du $\mathscr{O}_{T'}$-morphisme évident $\mathscr{F}_{[U' \rightsquigarrow T']} \to f_\star \mathscr{F}_{[U \rightsquigarrow T]}$, est un isomorphisme.

On dira d'un Module spécial $\mathscr{F}$ sur X/S qu'il est quasi-cohérent si pour tout objet $[U \rightsquigarrow T]$ de $(X/S)_{\text{strat}}$, le $\mathscr{O}_T$-Module $\mathscr{F}_{[U \rightsquigarrow T]}$ est quasi-cohérent.

Avant d'évoquer les $\mathscr{O}_X$-Modules stratifiés, il convient de définir les voisinages infinitésimaux qui interviendront dans leur définition.

Définition 2.10. — Soit $Y \to Z$ une immersion fermée de schémas, définie par un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{I}$ d'Idéaux de $\mathscr{O}_Z$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-ième voisinage infinitésimal de Y dans Z le sous-schéma fermé de Z défini par le faisceau quasi-cohérent d'Idéaux $\mathscr{I}^{n+1}$ de $\mathscr{O}_Z$.

Définition 2.11. — Pour tous entiers $\nu, i \geq 0$, on note $\Delta^\nu_{X/S}(i)$ le i-ème voisinage infinitésimal de l'immersion fermée diagonale $X \to X_S^{\nu+1}$ où $X_S^{\nu+1}$ désigne le produit fibré[7] de $\nu + 1$ copies de X au-dessus de S.

Pour tout entier $\nu \geq 0$, les schémas $(\Delta^\nu_{X/S}(i))_i$ forment naturellement un système inductif indexé par $\mathbb{N}$. De plus, la correspondance $\nu \longmapsto (\Delta^\nu_{X/S}(i))_i$ définit un objet simplicial dans la catégorie de tels systèmes inductifs, les faces étant induites par des projections partielles et les dégénérescences par des morphismes diagonaux.

Définition 2.12. — Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module et $n \in \mathbb{N}$. On appelle S-stratification d'ordre n de $\mathscr{F}$ la donnée d'un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(n)}$-Modules

$$\varphi\colon p_1(n)^\star \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} p_0(n)^\star \mathscr{F}$$

vérifiant la relation de cocycle

$$p_{20}(n)^\star(\varphi) = p_{10}(n)^\star(\varphi) \circ p_{21}(n)^\star(\varphi)$$

[7] On adopte la convention « lévogyre » de numérotation suivante : un « élément » d'un tel produit fibré sera noté $(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_0)$.

où les morphismes considérés sont les projections partielles[8] apparaissant sur le diagramme suivant :

$$X \overset{p_0(n)}{\underset{p_1(n)}{\leftleftarrows}} \Delta^1_{X/S}(n) \overset{p_{20}(n)}{\underset{p_{10}(n)}{\overset{p_{21}(n)}{\leftleftarrows}}} \Delta^2_{X/S}(n)$$

Toute S-stratification d'ordre n d'un $\mathscr{O}_X$-Module induit une stratification de tout ordre inférieur ou égal à n. On définit ainsi une S-stratification comme étant un système compatible de S-stratifications d'ordre n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.13. — On vérifie aussitôt que sur un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, il existe une unique S-stratification d'ordre 0. En effet, le morphisme φ définissant cette S-stratification d'ordre 0 est un isomorphisme $\varphi\colon \mathscr{F} \tilde{\to} \mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_X$-Modules et la relation de cocycle dit précisément que $\varphi \circ \varphi = \varphi$, donc $\varphi = \mathrm{Id}$.

Soit $\mathscr{F}$ un Module spécial sur X/S. On définit une S-stratification d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur le $\mathscr{O}_X$-Module $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_{\left[X \overset{\mathrm{Id}}{\rightsquigarrow} X\right]}$ grâce à la composition suivante :

$$\varphi\colon p_1(n)^\star \widetilde{\mathscr{F}} \tilde{\to} \mathscr{F}_{\left[X \overset{\Delta}{\rightsquigarrow} \Delta^1_{X/S}(n)\right]} \tilde{\leftarrow} p_0(n)^\star \widetilde{\mathscr{F}}$$

La relation de cocyle est tautologiquement vérifiée.

Lemme 2.14. — *Soit S un schéma et X un S-schéma de type fini et séparé. Le foncteur qui à un Module spécial $\mathscr{F}$ sur X/S associe le $\mathscr{O}_X$-Module S-stratifié $(\widetilde{\mathscr{F}}, \varphi)$ induit une équivalence de catégories de la catégorie des Modules spéciaux sur X/S vers la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules S-stratifiés. De plus, par cette équivalence, les Modules spéciaux quasi-cohérents se correspondent aux $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents S-stratifiés.*

Démonstration. — Il s'agit de construire un foncteur $(\mathscr{F}, \varphi) \rightsquigarrow \mathscr{F}_{\mathrm{strat}}$ associant à tout $\mathscr{O}_X$-Module S-stratifié un $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Module sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ ayant la vertu d'être spécial.

Avant de construire ce foncteur quasi-inverse, nous allons étudier certaines propriétés remarquables des $\mathscr{O}_X$-Modules S-stratifiés relativement aux immersions fermées nilpotentes. Soit $(\mathscr{F}, \varphi)$ un $\mathscr{O}_X$-Module S-stratifié. On se donne un S-morphisme $Y \overset{k}{\to} X$, une S-immersion fermée nilpotente $j\colon Y \rightsquigarrow Z$ et deux morphismes $f_1, f_0\colon Z \to X$ tels que $f_1 \circ j = f_0 \circ j = k$. Alors, on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_Z$-Modules $f_1^\star \mathscr{F} \tilde{\to} f_0^\star \mathscr{F}$.

En effet, considérons le morphisme $f = (f_1, f_0)\colon Z \to X \times_S X$ et l'image schématique (cf. [**EGA I 9.5.3**]) $\operatorname{im} f$ de ce morphisme. Par définition, c'est le plus petit sous-schéma fermé de $X \times_S X$ par lequel f se factorise. Comme $j\colon Y \rightsquigarrow Z$ est un homéomorphisme, l'image ensembliste de f dans $X \times_S X$ est la même que celle de $(k,k)\colon Y \to X \times_S X$, or celle-ci est visiblement contenue dans l'image de la diagonale $\Delta\colon X \to X \times_S X$. D'après [**EGA I 9.5.4**], les hypothèses noethériennes font que le fermé de $X \times_S X$ sous-jacent à $\operatorname{im} f$ est l'adhérence de l'image ensembliste de f dans $X \times_S X$, or celle-ci est contenue dans l'image de la diagonale. Les hypothèses noethériennes impliquent donc que f se factorise par un voisinage infinitésimal $\Delta^1_{X/S}(i)$ de la diagonale dans $X \times_S X$ pour i assez grand. On conclut alors comme on s'y attend : on note $Z \overset{\tilde{f}}{\to} \Delta^1_{X/S}(i) \to X \times_S X$ une telle factorisation de f. La S-stratification d'ordre i nous donne un isomorphisme $\varphi\colon p_1(i)^\star \mathscr{F} \tilde{\to} p_0(i)^\star \mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(i)}$-Modules auquel on applique $\tilde{f}^\star$ pour obtenir l'isomorphisme voulu, qui ne dépend pas de l'entier i choisi puisqu'une S-stratification est un système compatible de S-stratifications d'ordres arbitraires.

Soit $(\mathscr{F}, \varphi)$ un $\mathscr{O}_X$-Module S-stratifié. On définit un préfaisceau de $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules $\mathscr{G}$ sur la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}$ de $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ formée des objets $[U \rightsquigarrow T]$ tels qu'il existe une S-rétraction *globale* $T \to U$ de $U \rightsquigarrow T$ de la manière suivante. Pour tout objet $[U \rightsquigarrow T]$ de $\mathscr{C}$ et toute S-rétraction $g\colon T \to U$ de $U \rightsquigarrow T$, on pose $\mathscr{G}_g[U \rightsquigarrow T] = \Gamma(T; g^\star \mathscr{F}_{|U})$. D'après ce qui précède, si

[8] En notation simpliciale, $p_0(n) = d_1$, $p_1(n) = d_0$, $p_{20}(n) = d_1$, $p_{21}(n) = d_0$, $p_{10}(n) = d_2$.

on choisit une autre rétraction $g'\colon T \to U$, on aura un isomorphisme canonique $\mathscr{G}_g[U \rightsquigarrow T] \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_{g'}[U \rightsquigarrow T]$. Plus précisément, si on note $\mathscr{G}r_{[U \rightsquigarrow T]}$ la catégorie dont les objets sont les rétractions de $U \rightsquigarrow T$ et dont les ensembles d'homomorphismes sont des singletons(9), d'après la relation de cocycle (et le fait que si on prend $g = g'$, l'isomorphisme $\mathscr{G}_g[U \rightsquigarrow T] \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_g[U \rightsquigarrow T]$ est l'identité), on obtient un foncteur $\mathscr{G}_{-}[U \rightsquigarrow T]$ de la catégorie $\mathscr{G}r_{[U \rightsquigarrow T]}$ vers la catégorie des $\Gamma(T;\mathscr{O}_T)$-modules, dont on peut noter paisiblement $\mathscr{G}[U \rightsquigarrow T]$ la limite inductive. Maintenant, si $f\colon [U \rightsquigarrow T] \to [U' \rightsquigarrow T']$ est un morphisme dans $\mathscr{C}$, si on se donne une rétraction $g\colon T' \to U'$, alors la composée $T \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} U'$ se factorise évidemment par U et définit ainsi une rétraction $\tilde{g}\colon T \to U$ de $U \rightsquigarrow T$. On a une application évidente $\mathscr{G}_g[U' \rightsquigarrow T'] \to \mathscr{G}_{\tilde{g}}[U \rightsquigarrow T]$ qui définit une application $\mathscr{G}[U' \rightsquigarrow T'] \to \mathscr{G}[U \rightsquigarrow T]$ dont on peut vérifier qu'elle est indépendante de g. On a ainsi défini un préfaisceau $\mathscr{G}$ de $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules sur la catégorie $\mathscr{C}$.

Par définition, $\mathscr{G}$ est un faisceau pour la topologie de Zariski sur $\mathscr{C}$. Comme les immersions fermées nilpotentes que définissent les objets de $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ admettent des rétractions locales, on peut en déduire un prolongement de $\mathscr{G}$ de façon essentiellement unique en un faisceau de $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$, que l'on note $\mathscr{F}_{\mathrm{strat}}$. Le fait que $\mathscr{F}_{\mathrm{strat}}$ soit spécial est trivial, que $\mathscr{F}_{\mathrm{strat}}$ soit quasi-cohérent si et seulement si $\mathscr{F}$ l'est l'est aussi, et enfin le fait que le foncteur que l'on vient de définir soit un quasi-inverse du foncteur associant un $\mathscr{O}_X$-Module S-stratifié à un module spécial sur X/S est clair. □

2.3. Modules stratifiés et connexions intégrables. — Dans ce numéro, on se donne un $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$-schéma S, X un S-schéma de type fini, séparé et *lisse*, et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-Module.

Définition 2.15. — Une S-connexion sur $\mathscr{M}$ est un morphisme de faisceaux de *groupes abéliens* $\nabla\colon \mathscr{M} \to \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ tel que l'on ait la relation

$$\nabla(f \cdot m) = \mathrm{d}f \otimes m + f \cdot \nabla m$$

pour toutes sections f et m respectivement des faisceaux $\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{M}$ sur un ouvert U de X.

On remarquera que si ∇ est une S-connexion sur $\mathscr{M}$, alors ∇ est $\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)$-linéaire où $\pi\colon X \to S$ désigne le morphisme structural.

Définition 2.16. — Soit ∇ une S-connexion sur $\mathscr{M}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\nabla\colon \Omega^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M} \to \Omega^{n+1}_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$$

l'unique morphisme de faisceaux de groupes abéliens tel que pour toutes sections $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathscr{O}_X$ et m de $\mathscr{M}$ sur un ouvert U de X, on ait l'égalité suivante :

$$\nabla(\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n \otimes m) = (-1)^n \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n \wedge \nabla m$$

On dit que $\mathscr{M}$ est une S-connexion intégrable si $\nabla \circ \nabla\colon \mathscr{M} \to \Omega^2_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ est le morphisme nul.

Lemme 2.17. — *Si ∇ est une S-connexion intégrable sur $\mathscr{M}$, alors $(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}, \nabla)$ est un complexe de faisceaux de groupes abéliens sur X_{Zar}.*

Démonstration. — L'assertion est de nature locale. On peut donc supposer que X et S sont affines et de manière plus essentielle que $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module trivial dont une base est formée par des éléments $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_d$ où $x_1, \ldots, x_d$ sont des sections globales de $\mathscr{O}_X$. On peut alors définir des S-champs de vecteurs (c'est-à-dire des $\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)$-dérivations de $\mathscr{O}_X$) $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *via* la formule

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

(9)Autrement dit, $\mathscr{G}r_{[U \rightsquigarrow T]}$ est le groupoïde connexe et simplement connexe d'ensemble sous-jacent l'ensemble des S-rétractions de $U \rightsquigarrow T$.

pour toute section f de $\mathscr{O}_X$ sur un ouvert. On définit des morphismes de faisceaux de groupes abéliens $\beta_i\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ par la formule

$$\nabla(m) = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}x_i \otimes \beta_i(m)$$

À ce stade, il est clair que se donner une connexion ∇ sur $\mathscr{M}$ équivaut à la donnée des $\beta_i\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ pourvu qu'ils vérifient $\beta_i(bm) = \frac{\partial b}{\partial x_i} m + b\beta_i(m)$ pour toutes sections b et m des faisceaux $\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{M}$ respectivement sur un ouvert de X.

Évaluons $\nabla \circ \nabla(m)$ pour toute section m de $\mathscr{M}$ sur un ouvert de X :

$$\nabla(\nabla(m)) = \nabla(\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}x_i \otimes \beta_i(m)) = -\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \otimes \beta_j \circ \beta_i(m)$$

On en déduit aisément (sans utiliser l'hypothèse de caractéristique 0) que $\nabla \circ \nabla = 0\colon \mathscr{M} \to \Omega^2_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ si et seulement si les endomorphismes $(\beta_i)_i$ du faisceau $\mathscr{M}$ commutent. Montrons qu'alors $\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ est un complexe, en montrant l'annulation de $\nabla \circ \nabla$ sur des générateurs locaux de $\Omega^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla(\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n \otimes m)) &= (-1)^n \sum_{i=1}^{d} \nabla(\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n \wedge \mathrm{d}x_i \otimes \beta_i(m)) \\ &= -\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \otimes \beta_j \circ \beta_i(m) = 0\end{aligned}$$

□

Remarque 2.18. — En reprenant les notations de cette démonstration, on peut montrer que les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$ commutent, ce qui est connu en topologie différentielle sous le nom de théorème de Schwarz ! On peut mener l'analogie plus loin. Si ∇ est une connexion sur $\mathscr{M}$, alors on peut définir un morphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_X$-Modules $\rho\colon\ \mathbf{Der}_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)}(\mathscr{O}_X) \to \mathbf{End}_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)}(\mathscr{M})$, qui lorsque l'on fait l'identification

$$\mathbf{Der}_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)}(\mathscr{O}_X) = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, \mathscr{O}_X)\ ,$$

associe à un $\mathscr{O}_U$-morphisme $f\colon \Omega^1_{U/S} \to \mathscr{O}_U$ le morphisme composé

$$\mathscr{M}_{|U} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_{U/S} \otimes_{\mathscr{O}_U} \mathscr{M}_{|U} \xrightarrow{f\otimes\mathscr{M}_{|U}} \mathscr{M}_{|U}$$

et ce, pour tout ouvert U de X. Le morphisme ρ vérifie la formule suivante

$$\rho(Y)(f \cdot m) = Y(f)m + f \cdot \rho(Y)(f)$$

pour toutes sections Y, f et m des faisceaux respectifs $\mathbf{Der}_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)}$, $\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{M}$ sur un ouvert de X. On peut vérifier aisément que la donnée de la connexion ∇ équivaut à la donnée d'un tel homomorphisme ρ et que ∇ est une connexion intégrable si et seulement si ρ est un morphisme de $\mathscr{O}_X$-Algèbres de Lie.

Définition 2.19. — Soit $\mathscr{V}$ un faisceau de $\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)$-Modules. On pose $\mathscr{V}^t = \mathscr{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)} \mathscr{V}$, et on définit un morphisme de faisceau de groupes abéliens $\nabla\colon \mathscr{V}^t \to \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{V}^t$ par la formule

$$\nabla(f \otimes x) = \mathrm{d}f \otimes (1 \otimes x)$$

On remarque alors que $(\mathscr{V}^t, \nabla)$ est un $\mathscr{O}_X$-Module muni d'une connexion intégrable et que $\mathscr{V}^t$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini si $\mathscr{V}$ l'est sur $\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)$.

Définition 2.20. — Si $(\mathscr{M}, \nabla)$ est un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent, on note $\mathscr{M}^\nabla$ le faisceau des sections horizontales de $\mathscr{M}$, c'est-à-dire le faisceau des sections f de $\mathscr{M}$ telles que $\nabla f = 0$. $\mathscr{M}^\nabla$ est un faisceau de $\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)$-Modules.

Théorème 2.21 **(Nicholas M. Katz, [Katz,** Proposition (8.8), page 206]**)**
Soit X un schéma lisse sur un corps k de caractéristique 0. *On se donne un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{M}$ muni d'une connexion* intégrable ∇. *Alors, $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre.*

Remarque 2.22. — Si $(\mathscr{M}, \nabla)$ est un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent muni d'une connexion intégrable, alors on peut considérer le morphisme évident $\iota\colon (\mathscr{M}^{\nabla})^t \to \mathscr{M}$. On prendre garde au fait que ce morphisme n'est en général pas un isomorphisme même si S est le spectre premier d'un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Ainsi, une connexion intégrable ne se trivialise pas localement pour la topologie de Zariski. En particulier, si on se place par exemple sous les hypothèses du théorème précédent, la dimension de $\mathscr{M}^{\nabla}$ sur $\pi^{-1}(\mathscr{O}_S)$ peut très bien être strictement inférieure[10] au rang de $\mathscr{M}$. En effet, les sections de $\mathscr{M}^{\nabla}$ sont (localement) les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Cependant, la démonstration du théorème précédent de Katz consiste précisément à montrer que, quand on passe au complété d'un anneau local d'un point (fermé) de X, la dimension de l'espace des solutions est la bonne.

On se propose maintenant de montrer le lemme suivant qui utilise fondamentalement l'hypothèse de caractéristique 0 et la lissité :

Lemme 2.23. — *On suppose que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini. Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des S-stratifications sur $\mathscr{M}$ et l'ensemble des S-connexions intégrables sur $\mathscr{M}$. Plus précisément :*
- *la donnée d'une S-stratification d'ordre* 1 *sur $\mathscr{M}$ équivaut à la donnée d'une S-connexion ∇ sur $\mathscr{M}$;*
- *une S-stratification d'ordre* 1 *sur $\mathscr{M}$ se relève en une S-stratification d'ordre* 2 *(nécessairement unique) si et seulement si la connexion correspondante ∇ est intégrable ;*
- *pour tout entier $n \geq 2$, toute S-stratification d'ordre n sur $\mathscr{M}$ se relève en une unique S-stratification d'ordre $n+1$ et par conséquent en une S-stratification tout court.*

Grâce au lemme 2.14, ce lemme admet le corollaire suivant :

Corollaire 2.24. — *Soit S un* $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})$*-schéma, X un S-schéma de type fini, lisse et séparé. Les catégories des Modules spéciaux sur X/S localement libres de rang fini, des $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres de rang fini S-stratifiés, et des $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres de rang fini munis d'une S-connexion intégrable sont naturellement équivalentes.*

Pour démontrer le lemme 2.23, nous allons avoir besoin d'une description locale explicite des voisinages infinitésimaux de X.

Proposition 2.25. — *Soit B une A-algèbre lisse et $x_1, \ldots, x_d$ des éléments de B tels que la famille $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_d)$ soit une base du B-module $\Omega^1_{B/A}$. Pour tous entiers ν, k, i tels que $\nu \geq 0$, $1 \leq k \leq \nu$, $1 \leq i \leq d$, on pose*

$$\omega_{i,k} = 1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes 1 - 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes x_i \in B^{\otimes \nu+1}$$

où les x_i sont placés en positions respectives k et 0.

Pour tout $\nu \geq 0$, on filtre la B-algèbre de polynômes $B[(T_{i,k})_{1\leq k\leq\nu, 1\leq i\leq d}]$ par les puissances de l'idéal $\tilde{J}_\nu$ engendré par les $T_{i,k}$ et on définit un morphisme de B-algèbres filtrées $B[T_{i,k}] \to B^{\otimes\nu+1}$ en envoyant $T_{i,k}$ sur $\omega_{i,k}$, la structure de B-algèbre sur $B^{\otimes\nu+1}$ étant induite par la 0*-ième composante, et $B^{\otimes\nu+1}$ est filtrée par les puissances de l'idéal $J_\nu = \ker(\Delta\colon B^{\otimes\nu+1} \to B)$.*

Alors, le morphisme induit $B[T_{i,k}]/\tilde{J}_\nu^{n+1} \to B^{\otimes\nu+1}/J_\nu^{n+1}$ est un isomorphisme de B-algèbres filtrées pour tous $\nu \geq 0$ et $n \geq 0$.

[10] Par exemple, si $X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[T]$ et $S = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$, la donnée d'une connexion ∇ (nécessairement intégrable) sur le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$ équivaut à la donnée d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[T]$ *via* la correspondance $\nabla_P(f) = (f' + fP)\mathrm{d}T$ pour toute section f de $\mathscr{L}$. On vérifie aussitôt que si P est un polynôme non nul, $\mathscr{M}^{\nabla}$ est le faisceau nul, car il s'agit de résoudre l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = -P$ qui n'a évidemment pas de solutions sous forme de fractions rationnelles. Le lecteur qui se poserait une question aussi saugrenue pourra se convaincre que ce problème ne peut pas se résoudre en cherchant des solutions localement pour la topologie étale sur X.

Démonstration. — On utilise le fait [**EGA IV 17.12.1**] que si $X \to Y$ est une S-immersion fermée entre S-schémas lisses, alors si on note $\mathscr{I}$ l'Idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_Y$ définissant X, alors la $\mathscr{O}_X$-Algèbre graduée quasi-cohérente $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}$ est la $\mathscr{O}_X$-Algèbre symétrique sur $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$.

On va appliquer ce résultat à l'immersion fermée diagonale $X \to Y$ où $Y = X_S^{\nu+1}$. Considérons les faisceaux structuraux de X et de $\Delta^\nu_{X/S}(n)$ comme des faisceaux de $\mathscr{O}_Y$-Modules (tués respectivement par $\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}^{n+1}$). *Via* la projection sur le 0-ième facteur, on peut munir $\mathscr{O}_Y/\mathscr{I}^{n+1} = \mathscr{O}_{\Delta^\nu_{X/S}(n)}$ d'une structure de $\mathscr{O}_X$-Algèbre. On peut alors considérer le morphisme de $\mathscr{O}_X$-Algèbres évident $\mathscr{O}_X[(T_{i,k})] \to \mathscr{O}_X/\mathscr{I}^{n+1}$ envoyant $T_{i,k}$ sur $\omega_{i,k}$ pour tous i,k tels que $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq k \leq \nu$. Pour déduire la proposition du fait rappelé ci-dessus, il reste à voir que les éléments $(\omega_{i,k})$ forment une B-base de $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$, et cela résulte du lemme suivant qui est intuitivement clair. □

Lemme 2.26. — *Soit X un S-schéma séparé, alors si on note $\mathscr{J}_\nu$ le faisceau quasi-cohérent d'Idéaux sur $X_S^{\nu+1}$ induit par l'immersion fermée diagonale $X \to X_S^{\nu+1}$, alors il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X$-Modules $\mathscr{J}_\nu/\mathscr{J}_\nu^2 \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{X/S})^\nu$.*

Démonstration. — On se ramène facilement au cas où X et S sont affines d'anneaux respectifs B et A. On considère l'application A-linéaire suivante :

$$D\colon \left\{ \begin{array}{ccc} B^{\otimes \nu+1} & \longrightarrow & (\Omega^1_{B/A})^{\nu+1} \\ f_\nu \otimes \cdots \otimes f_0 & \longmapsto & (f_\nu \cdots \widehat{f_i} \cdots f_0 \mathrm{d} f_i)_i \end{array} \right.$$

« qui » à une fonction $f\colon (x_\nu,\dots,x_0) \mapsto f(x_\nu,\dots,x_0)$ sur $X_S^{\nu+1}$ associe la famille des 1-formes différentielles sur X obtenue en différentiant f suivant chacune des variables $(x_\nu,\dots,x_0)$ aux points situés sur la diagonale de $X_S^{\nu+1}$. On considère $B^{\nu+1}$ comme une B-algèbre *via* la 0-ième projection $X_S^{\nu+1} \to X$ de sorte que l'idéal J_ν de $B^{\otimes \nu+1}$ soit engendré comme B-module par les éléments de la forme $b_\nu \otimes \cdots b_1 \otimes 1 - 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b_\nu \cdots b_1$. On remarque alors que la somme des $\nu+1$-composantes de la restriction de D à J_ν est nulle. On considère ainsi l'application $\tilde{D}\colon J_\nu \to (\Omega^1_{B/A})^\nu$ obtenue en composant la restriction de D à J_ν et la projection de $(\Omega^1_{B/A})^{\nu+1}$ sur $(\Omega^1_{B/A})^\nu$ obtenue en oubliant le 0-ième facteur. On vérifie facilement que $\tilde{D}(J_\nu^2) = 0$, et on note encore $\tilde{D}\colon J_\nu/J_\nu^2 \to (\Omega^1_{B/A})^\nu$ le B-morphisme qui s'en déduit, dont on laisse cordialement au lecteur la tâche de faire l'exercice consistant à montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, la difficulté résidant évidemment dans la preuve de l'injectivité. □

Définition 2.27. — Sous les hypothèses et les notations de la proposition 2.25, on appelle multi-indice une suite d'entiers $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$. Le degré $|\alpha|$ d'un multi-indice α est $\sum_{i=1}^d \alpha_i$, on note $I_{\leq n}$ l'ensemble des multi-indices de degré inférieur ou égal à n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $\alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$. Si $i \in \{1,\dots,d\}$, on notera simplement i le multi-indice $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ où le 1 est placé en position i. Pour tout multi-indice α, on note $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_\alpha}$ l'application A-linéaire $B \to B$ définie par composition $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \prod_{i=1}^d (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\circ \alpha_i}$. De même, on note $\omega_{\alpha,k} = \prod_{i=1}^d \omega_{i,k}^{\alpha_i}$ pour tout multi-indice α.

Lemme 2.28. — *Soit A un anneau, B une A-algèbre et M un B-module. On se donne une famille $(\partial_1,\dots,\partial_n)$ de A-dérivations $B \to B$ et une famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ d'applications A-linéaires $M \to M$ telles que pour tous $b \in B$, $m \in M$ et $i \in \{1,\dots,n\}$, on ait la relation*

$$\varphi_i(bm) = \partial_i(b)m + b\varphi_i(m)$$

Si on note $\partial_I = \partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_{\#I}}$ si $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_{\#I}\}$ est une partie de $\{1,\dots,n\}$, que l'on donne le sens analogue à φ_I, et que l'on note I^c le complémentaire de I dans $\{1,\dots,n\}$, alors on a l'égalité suivante pour tous $b \in B$ et $m \in M$:

$$\varphi_{\{1,\dots,n\}}(bm) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \partial_I(b)\varphi_{I^c}(m)$$

Démonstration. — La preuve est évidente. On notera que si les familles ∂ et φ coïncident sur certaines familles d'indices consécutifs, alors plusieurs familles de termes se regroupent dans la formule faisant apparaître des coefficients multinômiaux. $\square$

Lemme 2.29. — *Sous les notations et les hypothèses de la proposition 2.25, A étant de plus supposée être une $\mathbb{Q}$-algèbre, alors pour tous $b \in B$ et $n \geq 0$, on a l'égalité suivante dans l'anneau $(B \otimes_A B)/J^{n+1}$:*

$$b \otimes 1 = \sum_{\alpha \in I_{\leq n}} (1 \otimes (\frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} b}{\partial x_\alpha}))\omega_{\alpha,1}$$

Démonstration. — On définit deux applications $f, g\colon B \otimes_A B \to B \otimes B/J^{n+1}$ B-linéaires à droite par les formules suivantes :

$$\begin{cases} f(b \otimes c) = b \otimes c \\ g(b \otimes c) = \displaystyle\sum_{\alpha \in I_{\leq n}} (1 \otimes \frac{c}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} b}{\partial x_\alpha})\omega_{\alpha,1} \end{cases}$$

On peut vérifier que f et g sont deux morphismes d'anneaux (pour f c'est évident, pour g cela résulte essentiellement du lemme 2.28.). Un calcul immédiat montre que f et g envoient J dans J/J^{n+1}, par conséquent f et g s'annulent sur J^{n+1} et se factorisent donc en deux endomorphismes du B-module à droite $B \otimes_A B/J^{n+1}$, dont il s'agit de vérifier qu'ils coïncident. Comme on sait que la famille $(\omega_{\alpha,1})_{\alpha \in I_{\leq n}}$ est une B-base à droite de $B \otimes B/J^{n+1}$, il suffit de montrer que f et g coïncident sur les élements de cette base. Comme f et g sont des morphismes d'anneaux, il suffit de le faire pour les éléments de la forme $\omega_{i,1}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$, ce qui est trivial. $\square$

Démonstration du lemme 2.23. — Commençons par établir que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini, alors la donnée d'une S-stratification d'ordre 1 équivaut à la donnée d'une S-connexion sur $\mathscr{M}$. Soit $\nabla\colon \mathscr{M} \to \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ une S-connexion. On veut définir un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(1)}$-Modules $\varphi\colon p_1(1)^\star \mathscr{M} \xrightarrow{\sim} p_0(1)^\star \mathscr{M}$. On définit ce morphisme localement : en supposant $X = \operatorname{Spec} B$, $S = \operatorname{Spec} A$, cela revient à se donner un $(B \otimes_A B)/J^2$-isomorphisme

$$\varphi\colon (B \otimes B)/J^2 \underset{p_1,B}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} (B \otimes B)/J^2 \underset{p_0,B}{\otimes} M$$

où $\mathscr{M}$ correspond au B-module M. Dans la suite, on ne précisera pas les flèches de transitions dans les produits tensoriels pourvu que celles-ci vérifient une certaine condition d'« associativité ». Pour cela, il suffit de définir un morphisme de B-modules $\varphi\colon M \to (B \otimes B)/J^2 \underset{B}{\otimes} M$ où la structure de B-module sur le but est induite par multiplication sur le facteur d'extrême gauche dans le produit tensoriel.

On pose $\varphi(m) = 1 \otimes 1 \otimes m + i\nabla(m)$ où $i\colon \Omega^1_{B/A} \to (B \otimes_A B)/J^2$ est l'inclusion canonique envoyant $\mathrm{d}b$ sur $b \otimes 1 - 1 \otimes b$. La B-linéarité de φ résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \varphi(bm) - (b \otimes 1)\varphi(m) &= 1 \otimes 1 \otimes bm + \nabla(bm) - b \otimes 1 \otimes m - b\nabla(m) \\ &= \nabla(bm) + 1 \otimes b \otimes m - b \otimes 1 \otimes m - b\nabla(m) \\ &= \nabla(bm) - (\mathrm{d}b) \otimes m - b\nabla(m) = 0 \end{aligned}$$

Le fait que le morphisme $\varphi\colon p_1(1)^\star \mathscr{M} \to p_0(1)^\star \mathscr{M}$ ainsi défini soit un isomorphisme résulte simplement du fait que $\mathscr{J}_1$ est un Idéal nilpotent sur $\Delta^1_{X/S}(1)$, que $\mathscr{M}$ soit localement libre de rang fini et que φ vaille l'identité de $\mathscr{M}$ modulo $\mathscr{J}_1$, puisqu'en effet si C est un anneau et $f\colon N \to N'$ un morphisme entre deux C-modules localement libres de même rang fini, alors f est un isomorphisme si et seulement si $f_{\mathrm{red}}\colon C_{\mathrm{red}} \otimes_C N \to C_{\mathrm{red}} \otimes_C N'$ l'est. Le même argument sera valable dans la construction plus générale avec $n \geq 1$ quelconque, et ne sera pas répété.

On a ainsi associé une S-stratification d'ordre 1 à une S-connexion puisque la relation de cocycle est évidemment vérifiée. Il est clair que cette correspondance réalise la première affirmation du lemme.

Montrons qu'une S-stratification d'ordre $n \geq 1$ sur un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini $\mathscr{M}$ se prolonge au plus d'une manière en une S-stratification d'ordre $n + 1$. L'assertion étant de nature locale, on peut supposer que $X = \operatorname{Spec} B$, $S = \operatorname{Spec} A$ et que l'on est dans la situation de la proposition 2.25 dont on utilise les notations. Il existe alors une unique famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I_{\leq n}}$ d'endomorphismes A-linéaires de M telle que

$$\forall m \in M \qquad \varphi(1 \otimes 1 \otimes m) = \sum_{\alpha \in I_{\leq n}} \omega_{\alpha,1} \otimes \varphi_\alpha(m)$$

On sait déjà que $\varphi_{(0,\dots,0)} = \mathrm{Id}_M$. On vérifie aisément que la relation de cocycle s'écrit :

$$\sum_{\alpha \in I_{\leq n}} \omega_{\alpha,2} \otimes \varphi_\alpha(m) = \sum_{\beta \in I_{\leq n}} \sum_{\gamma \in I_{\leq n}} \left(\prod_{i=1}^{d} (\omega_{i,2} - \omega_{i,1})^{\alpha_i} \omega_{i,1}^{\beta_i}\right) \otimes (\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta)(m)$$

On se donne un multi-indice γ de degré $n \geq 2$. On étudie la projection de la relation de cocycle sur la composante associée à $\omega_{\gamma',2}\omega_{i_0,1}$ où $\gamma = \gamma' + i_0$ avec $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\gamma_{i_0} \geq 1$. On obtient alors $\gamma_{i_0}\varphi_\gamma = \varphi_{i_0} \circ \varphi_{\gamma'}$. On en déduit alors clairement qu'il existe au plus une manière de prolonger une S-stratification d'ordre $n-1$ en une S-stratification d'ordre n si $n \geq 2$, et ce grâce à l'hypothèse de caractéristique 0. En choisissant différentes valeurs de i_0 dans l'argument précédent, on obtient que pour prolonger une S-stratification d'ordre 1 en une S-stratification d'ordre $n \geq 2$, il est nécessaire de supposer que les opérateurs $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ commutent, c'est-à-dire que la S-connexion associée soit intégrable. Montrons que cette condition est également suffisante.

Pour tout multi-indice α de degré $\leq n$ avec $n \geq 2$, on pose

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \prod_{i=1}^{d} \varphi_i^{\circ \alpha_i} \qquad \varphi(m) = \sum_{\alpha \in I_{\leq n}} \omega_{\alpha,1} \otimes \varphi_\alpha(m)$$

La vérification de la relation de cocycle se ramène à une formule du multinôme et le fait que l'application φ soit B-linéaire résulte essentiellement des lemmes 2.29 et 2.28. $\square$

3. La cohomologie de de Rham « sans » formes différentielles

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant dont le théorème 2.8 est un cas particulier :

Théorème 3.1 **(Alexander Grothendieck).** — *Soit S un $\mathbb{Q}$-schéma et X un S-schéma lisse et séparé. On se donne un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{M}$ localement libre de rang fini muni d'une connexion intégrable ∇. Il existe alors un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}; \Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}) = \mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\mathrm{strat}}; \mathscr{M}_{\mathrm{strat}})$$

3.1. La cohomologie du site stratifiant. — L'objectif de ce numéro est de donner un moyen concret de calculer la cohomologie de certains faisceaux sur le site stratifiant. On se donne un schéma S et un S-schéma de type fini X et séparé.

Définition 3.2. — On définit un foncteur $\sigma^\star \colon X_{\mathrm{Zar}} \to \mathscr{F}ais((X/S)_{\mathrm{strat}})$ en associant à un ouvert U de X le faisceau $\sigma^\star(U)$ dont l'ensemble des sections sur un objet $[V \rightsquigarrow T]$ de $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ est vide si V n'est pas contenu dans U et un singleton sinon. On en déduit un morphisme de topos

$$(\sigma^\star, \sigma_\star) \colon \mathscr{F}ais((X/S)_{\mathrm{strat}}) \to \mathscr{F}ais(X_{\mathrm{Zar}})$$

Définition 3.3. — On note $\tilde{X}$ le faisceau sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ représenté par $\left[X \overset{\mathrm{Id}}{\to} X\right]$, $\bullet$ l'objet final de $\mathscr{F}ais((X/S)_{\mathrm{strat}})$. Pour tout entier $\nu \geq 0$, on note $\tilde{X}^\nu$ le produit de ν copies de $\tilde{X}$ dans $\mathscr{F}ais((X/S)_{\mathrm{strat}})$.

Lemme 3.4. — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$. Alors, pour tout objet $[U \rightsquigarrow T]$ de $(X/S)_{\mathrm{strat}}$, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}_{(X/S)_{\mathrm{strat}}}([U \rightsquigarrow T], \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma(U_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{F}_{[U \rightsquigarrow T]})$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si $\mathscr{F}$ est injectif, alors $\mathscr{F}_{[U \rightsquigarrow T]}$ est flasque. $\square$

Lemme 3.5. — 1. *Le morphisme de faisceau $\tilde{X} \to \bullet$ sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ est un épimorphisme ;*

2. *Pour tout entier $\nu \geq 0$, on a un isomorphisme canonique de faisceaux*

$$\operatorname*{colim}_i \left[X \rightsquigarrow \Delta^{\nu}_{X/S}(i)\right] \xrightarrow{\sim} \tilde{X}^{\nu+1}$$

Démonstration. — Le premier point résulte aussitôt des définitions : pour tout objet $\left[U \overset{g}{\rightsquigarrow} T\right]$ de $(X/S)_{\mathrm{strat}}$, g admet des S-rétractions locales. Soit $\left[U \overset{g}{\rightsquigarrow} T\right]$ un objet de $(X/S)_{\mathrm{strat}}$. L'ensemble $(\tilde{X}^{\nu+1})[U \rightsquigarrow T]$ s'identifie à l'ensemble des $(\nu+1)$-uplets $(f_\nu, \dots, f_0)$ où pour tout $i \in \{0, \dots, \nu\}$, f_i est une S-rétraction $T \to U$ de $U \rightsquigarrow T$, c'est-à-dire que $(\tilde{X}^{\nu+1})[U \rightsquigarrow T]$ s'identifie à l'ensemble des morphismes $f \colon T \to U^{\nu+1}_S$ tels que la composée $U \overset{g}{\rightsquigarrow} T \xrightarrow{f} U^{\nu+1}_S$ soit l'immersion fermée diagonale. De même que dans la démonstration du lemme 2.14, $g \colon T \to U^{\nu+1}_S$ se factorise (de manière unique) par le sous-schéma fermé $\Delta^{\nu}_{U/S}(i)$ de $U^{\nu+1}_S$ pour i assez grand, ce qui achève la démonstration du second point. ☐

Définition 3.6. — Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$, on note $C^\star(\mathscr{F})$ le complexe de faisceaux sur X_{Zar} tel que $C^n(\mathscr{F}) = 0$ si $n < 0$ et que

$$C^n(\mathscr{F}) = \sigma_\star \mathbf{Hom}_{(X/S)_{\mathrm{strat}}}(\tilde{X}^{n+1}, \mathscr{F}) = \lim_i \mathscr{F}_{\left[X \rightsquigarrow \Delta^n_{X/S}(i)\right]}$$

si $n \geq 0$, les opérateurs de cobord étant les sommes alternées des morphismes induits par les projections partielles[11]. Autrement dit, $C^\star(\mathscr{F})$ est le complexe de Moore associé au faisceau cosimplicial sur X_{Zar} obtenu en appliquant $\sigma_\star \mathbf{Hom}_{(X/S)_{\mathrm{strat}}}(-, \mathscr{F})$ au faisceau simplicial $(\nu \mapsto \tilde{X}^{\nu+1})_\nu$ sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$.

Proposition 3.7. — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système projectif de faisceaux $(\mathscr{F}_{\left[X \rightsquigarrow \Delta^n_{X/S}(i)\right]})_i$ sur X_{Zar} est acyclique pour $\lim_i$. Alors, on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^+(X_{\mathrm{Zar}})$:*

$$C^\star(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{R}\sigma_\star)(\mathscr{F})$$

Démonstration. — Dans le cas où $\mathscr{F}$ est un faisceau injectif, cela résulte simplement de la première partie du lemme 3.5 qui implique que le morphisme de faisceaux simpliciaux $\tilde{X}^{\bullet+1} \to \bullet$ est une équivalence faible, où $\tilde{X}^{\bullet+1}$ désigne le faisceau d'ensembles simpliciaux de Čech associé à l'épimorphisme $\tilde{X} \to \bullet$. N'oublions surtout pas de mentionner que si $\mathscr{F}$ est injectif, le système projectif de faisceaux $(\mathscr{F}_{\left[X \rightsquigarrow \Delta^n_{X/S}(i)\right]})_i$ sur X_{Zar} est acyclique pour $\lim_i$.

Dans le cas général, on choisit une résolution injective $\mathscr{F} \to \mathscr{I}^\bullet$ de $\mathscr{F}$ et on utilise le fait que $C^\star(\mathscr{F}) \to \mathbf{tot}(C^\star(\mathscr{I}^\bullet))$ est un quasi-isomorphisme car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n(\mathscr{F}) \to C^n(\mathscr{I}^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme en vertu de l'hypothèse d'acyclicité. ☐

Lemme 3.8. — *Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système projectif de faisceaux quasi-cohérents sur un schéma X. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_{i+1} \to \mathscr{F}_i$ est un épimorphisme. Alors, le morphisme $\lim_i \mathscr{F}_i \to \mathbf{R}\lim_i \mathscr{F}_i$ est un isomorphisme dans $\mathbf{D}^+(X_{\mathrm{Zar}})$. De plus, pour tout ouvert affine U de X, $\mathbf{R}\Gamma(U_{\mathrm{Zar}}, \lim_i \mathscr{F}_i) = \lim_i \mathscr{F}_i(U)$.*

Démonstration. — Pour établir la première assertion, il suffit de montrer que $\Gamma(U_{\mathrm{Zar}}, \lim_i \mathscr{F}_i) \to \mathbf{R}\Gamma(U_{\mathrm{Zar}}, \mathbf{R}\lim_i \mathscr{F}_i)$ est un isomorphisme où U parcourt une base d'ouverts affines de X. Le complexe $\mathbf{R}\Gamma(U_{\mathrm{Zar}}; \mathbf{R}\lim_i \mathscr{F}_i)$ s'identifie à $\mathbf{R}\lim_i(\mathbf{R}\Gamma(U_{\mathrm{Zar}}; \mathscr{F}_i))$ qui s'identifie à $\lim_i \mathscr{F}_i(U)$ car les faisceaux $\mathscr{F}_i$ sont acycliques pour $\Gamma(U, -)$ et que $\mathscr{F}_{n+1}(U) \to \mathscr{F}_n(U)$ est surjectif pour tout $n \in \mathbb{N}$. La dernière assertion résulte de la démonstration de la première. ☐

---

[11] On a fait l'abus de notations consistant à identifier $\mathscr{F}_{[U \rightsquigarrow T]}$ à un faisceau sur U_{Zar} au lieu de T_{Zar}, U et T étant canoniquement homéomorphes.

Corollaire 3.9. — *Si X et S sont des schémas affines, alors pour tout Module spécial $\mathscr{M}$ sur X/S, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\mathrm{strat}}, \mathscr{M}) \xleftarrow{\sim} \Gamma(X, C^\star(\mathscr{M}))$$

3.2. Linéarisation des complexes d'opérateurs différentiels. — Nous allons maintenant montrer que l'on peut exprimer l'hypercohomologie d'un complexe d'opérateurs différentiels sur X_{Zar} comme l'hypercohomologie d'un complexe sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ formé de faisceaux que l'on pourrait appeler pro-Modules spéciaux. Nous étudierons aussi plus particulièrement le cas du complexe d'opérateurs différentiels formé par le complexe de de Rham, ce qui permettra de démontrer le théorème de Grothendieck.

La démonstration du lemme suivant est laissée en exercice au lecteur, qui n'aura aucune difficulté à le faire.

Lemme 3.10. — *Soit A un anneau et B une A-algèbre. On note J le noyau de la multiplication $\mu\colon B \otimes B \to B$, le produit tensoriel étant pris implicitement sur A.*

1. *Pour tous entiers $i, j \geq 0$, le morphisme d'anneaux*
$$B \otimes B \to (B \otimes B)/J^{j+1} \underset{p_0,B,p_1}{\otimes} (B \otimes B)/J^{i+1}$$
qui à $b \otimes b'$ associe $(b \otimes 1) \otimes (1 \otimes b')$ se factorise en un morphisme de A-algèbres
$$(B \otimes B)/J^{i+j+1} \to (B \otimes B)/J^{j+1} \underset{p_0,B,p_1}{\otimes} (B \otimes B)/J^{i+1}$$
2. *Soient $i, n, j \geq 0$ des entiers tels que $i \geq n + j$. Alors, le morphisme d'anneaux*
$$(B \otimes B) \underset{p_1,B,p_1}{\otimes} (B \otimes B) \to (B \otimes B) \underset{p_0,B,p_1}{\otimes} (B \otimes B))$$
qui à $a \otimes b \otimes c \otimes d$ associe $ac \otimes b \otimes 1 \otimes d$ induit un morphisme de A-algèbres
$$\varphi\colon (B \otimes B)/J^{n+1} \underset{p_1,B,p_1}{\otimes} (B \otimes B)/J^{i+1} \to (B \otimes B)/J^{n+1} \underset{p_0,B,p_1}{\otimes} (B \otimes B)/J^{j+1}$$

Définition 3.11. — Soit S un schéma et X un S-schéma séparé. Soient $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{O}_X$-Modules et $n \in \mathbb{N}$. On dit d'un morphisme de faisceaux de groupes abéliens $D\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ que c'est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$ s'il existe un morphisme (nécessairement unique) de $\mathscr{O}_X$-Modules $\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(n)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M} \xrightarrow{\tilde{D}} \mathscr{N}$, où $\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(n)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M}$ est muni de la structure de $\mathscr{O}_X$-Module induite par $p_1\colon \Delta^1_{X/S}(n) \to X$, tel que $D = \tilde{D} \circ \delta$ où $\delta\colon \mathscr{M} \to \mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(n)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M}$ est le morphisme de faisceaux de groupes abéliens $m \mapsto 1 \otimes m$. Un opérateur différentiel est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$ pour un certain n.

On note $\mathscr{D}(X/S)$ la catégorie additive[12] dont les objets sont les $\mathscr{O}_X$-Modules et les morphismes les opérateurs différentiels. Un complexe dans $\mathscr{D}(X/S)$ sera simplement appelé complexe d'opérateurs différentiels. On dira qu'un complexe d'opérateurs différentiels est quasi-cohérent si les $\mathscr{O}_X$-Modules qui le constituent sont quasi-cohérents.

Remarque 3.12. — On suppose que X est lisse sur S. Si $(\mathscr{M}, \nabla)$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre muni d'une connexion intégrable ∇, alors $(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}, \nabla)$ est un complexe d'opérateurs différentiels (d'ordre 1).

On va s'efforcer de définir un foncteur de la catégorie $\mathsf{comp}(\mathscr{D}(X/S))$ des complexes d'opérateurs différentiels sur X/S vers la catégorie $\mathsf{comp}((X/S)_{\mathrm{strat}}, (\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}})$ des complexes de $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules permettant, sous certaines hypothèses d'interpréter l'hypercohomologie des complexes d'opérateurs différentiels en termes de l'hypercohomologie de faisceaux de Modules sur le site stratifiant. Il s'agira d'une sorte de linéarisation des opérateurs différentiels.

[12] La catégorie $\mathscr{D}(X/S)$ n'est pas abélienne en général. Le fait que le composé d'un opérateur différentiel d'ordre $\leq i$ et d'un opérateur différentiel d'ordre $\leq j$ soit un opérateur différentiel d'ordre $\leq i + j$ résulte de la première partie du lemme 3.10.

Définition 3.13. — Soit S un schéma et X un S-schéma de type fini et séparé. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-Module. On note $Q\mathscr{M}$ le système projectif de $\mathscr{O}_X$-Modules $(\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(i)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M})_i$ où la structure de $\mathscr{O}_X$-Module sur $\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(i)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M}$ est induite par $p_1\colon \Delta^1_{X/S}(i) \to X$. Les applications définies dans la seconde partie du lemme 3.10 induisent un pro-isomorphisme

$$\varphi\colon p_1(n)^\star(Q\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} p_0(n)^\star(Q\mathscr{M})$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, constituant ainsi une « pro-S-stratification » sur $Q\mathscr{M}$. On note $(Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}}$ l'honnête $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Module sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ associé à ce pro-Module S-stratifié de la manière analogue à celle du lemme 2.14 (en passant à la limite projective *après* application de foncteurs images réciproques convenables).

La proposition suivante est essentiellement triviale, modulo des vérifications élémentaires.

Proposition 3.14. — *Soit S un schéma et X un S-schéma de type fini et séparé. On peut définir un foncteur additif $(Q-)_{\mathrm{strat}}$ de la catégorie $\mathscr{D}(X/S)$ vers la catégorie des $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ en associant à un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{M}$ le $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Module $(Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}}$ et à un opérateur différentiel $D\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ le morphisme évident si D est un morphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules et le morphisme induit par le pro-morphisme*

$$(\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(i+n)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M} \to \mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(i)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X,p_1}{\otimes} \mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(n)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M})_i$$

envoyant $(b\otimes b')\otimes m$ sur $(b\otimes 1)\otimes(1\otimes b')\otimes m$ si D est l'opérateur différentiel d'ordre n canonique $\mathscr{M} \to \mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(n)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{M}$. Cette construction est possible car les pro-morphismes de $\mathscr{O}_X$-pro-Modules ainsi construits commutent aux pro-S-stratifications sur les $\mathscr{O}_X$-pro-Modules obtenus en appliquant le foncteur Q à de tels $\mathscr{O}_X$-Modules.

Lemme 3.15 **(Lemme de Poincaré formel pour une connexion intégrable)**
Soit S un $\mathbb{Q}$-schéma et X un S-schéma de type fini, lisse et séparé. Soit $(\mathscr{E},\nabla)$ un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini muni d'une S-connexion intégrable. Alors, le morphisme évident

$$\varepsilon\colon \mathscr{E}_{\mathrm{strat}} \to (Q(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}, \nabla))_{\mathrm{strat}}$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux de $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules sur $(X/S)_{\mathrm{strat}}$.

Démonstration. — Pour définir ε, il suffit de construire un morphisme de faisceaux de $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules $\varepsilon\colon \mathscr{E}_{\mathrm{strat}} \to (Q\mathscr{E})_{\mathrm{strat}}$. On obtient ce morphisme à partir du pro-morphisme de pro-Modules S-stratifiés

$$(\varphi)\colon \mathscr{E} \to (\mathscr{O}_{\Delta^1_{X/S}(i)} \underset{p_0,\mathscr{O}_X}{\otimes} \mathscr{E})_i$$

induit par les morphismes définissant la S-stratification de $\mathscr{E}$. Le fait que (φ) soit un morphisme de $\mathscr{O}_X$-pro-Modules compatible à la S-stratification résulte aussitôt de la relation de cocycle vérifiée par φ.

On montre ensuite que le morphisme de complexes de faisceaux que l'on vient de construire $\varepsilon\colon \mathscr{E}_{\mathrm{strat}} \to (Q(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}))_{\mathrm{strat}}$ est un quasi-isomorphisme en montrant qu'il induit un quasi-isomorphisme de complexes de groupes abéliens quand on passe aux sections sur un objet $[U \rightsquigarrow T]$ de $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ tel que T soit affine sur un ouvert affine de S que l'on peut supposer affine de toute façon et tel que $\Omega^1_{U/S}$ soit libre de base $(dx_1,\dots,dx_d)$ où $x_1,\dots,x_d$ sont des sections globales du faisceau structural de U. Notons $g\colon T \to U$ une rétraction de $U \rightsquigarrow T$, par définition $(Q(\Omega^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}))_{\mathrm{strat}}[U \rightsquigarrow T]$ s'obtient en prenant la limite projective de l'image inverse par g du système projectif de $\mathscr{O}_X(U)$-modules $Q(\Omega^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E})_{\mathrm{strat}}\Big[U \overset{\mathrm{Id}}{\rightsquigarrow} U\Big]$; comme g est un morphisme fini[13], que $(Q(\Omega^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}))\Big[U \overset{\mathrm{Id}}{\rightsquigarrow} U\Big]$ est un système projectif de $\mathscr{O}_X(U)$-modules plats vérifiant la

[13] En effet, c'est un morphisme de type fini qui est aussi un homéomorphisme universel et d'après le Main Theorem de Zariski, un morphisme est fini si et seulement s'il est propre et quasi-fini. Bien entendu, on pourrait donner un argument élémentaire n'utilisant pas le Main Theorem.

condition de Mittag-Leffler et que la limite projective de ce système est elle-même un $\mathscr{O}_X(U)$-module plat[(14)], l'image inverse $g^\star$ et la limite projective vont commuter, ce qui permet de se ramener péniblement au cas où $[U \rightsquigarrow T]$ est en fait $\left[U \overset{\mathrm{Id}}{\rightsquigarrow} U\right]$.

On peut ainsi supposer que X et S sont des schémas affines vérifiant les hypothèses de la proposition 2.25 dont on suit les notations, et il suffit de montrer que $\Gamma(\tilde{X}, \mathscr{E}_{\mathrm{strat}}) \to \Gamma(\tilde{X}, (Q(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}))_{\mathrm{strat}})$ est un quasi-isomorphisme de $\mathscr{O}_X(X)$-modules. On note $(K^\bullet, \delta)$ le complexe total du « bicomplexe » $\Gamma(\tilde{X}, \mathscr{E}_{\mathrm{strat}}) \to \Gamma(\tilde{X}, (Q(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}))_{\mathrm{strat}})$ où $\Gamma(\tilde{X}, \mathscr{E}_{\mathrm{strat}})$ est placé en degré -1. On note E le B-module localement libre $\Gamma(X, \mathscr{E})$. Pour montrer que $K^\bullet$ est quasi-isomorphe à 0, nous montrerons que l'on peut appliquer le lemme suivant :

***Lemme 3.16* (Perturbation).** — *Soit $(K^\bullet, \delta)$ un complexe de groupes abéliens. On se donne pour tout $q \in \mathbb{Z}$, une décomposition $K^q = \prod_{p\in\mathbb{Z}} C^{p,q}$. On suppose que $\delta(\prod_{p\geq p'} C^{p,\bullet}) \subset \prod_{p\geq p'} C^{p,\bullet}$ pour tout $p' \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\delta = \sum_{n=0}^\infty \delta_n$ avec δ_n une famille de morphismes de groupes abéliens $(C^{p,q} \to C^{p+n,q+1})_{p,q}$. On suppose que $C^{p,\bullet} = 0$ pour $p \leq p_0$ pour un certain $p_0 \in \mathbb{Z}$ et que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe une homotopie h_0^p du complexe $(C^{p,\bullet}, \delta_0)$, c'est-à-dire que h_0^p est une famille de morphismes $h_0^p\colon (C^{p,q} \to C^{p,q-1})_q$ telle que $\delta_0 h_0^p + h_0^p \delta_0 = \mathrm{Id}_{C^{p,\bullet}}$. Alors, le complexe de groupes abéliens $K^\bullet$ est homotope à zéro*[(15)].

Démonstration. — On définit par récurrence des endomorphismes du groupe abélien bigradué $C^{\bullet,\bullet}$ par la formule

$$h_n = -\sum_{i=0}^{n-1} h_0 \delta_{n-i} h_i \colon C^{\bullet,\bullet} \to C^{\bullet+n,\bullet-1}$$

pour tout $n \geq 1$, et on pose $h = \sum_{n=0}^\infty h_n$ qui a un sens par hypothèse. On peut vérifier que $\delta h + h\delta = \mathrm{Id}$. Concrètement, on vérifie aisément par récurrence sur p que h induit une homotopie contractante du complexe $K^\bullet/K^\bullet_{\geq p+1}$ où $K^q_{\geq p+1} = \prod_{p'\geq p+1} C^{p',q}$. □

On a un isomorphisme $\lim\limits_n (B \otimes_A B)/J^{n+1} = B[[\omega_1, \dots, \omega_d]]$ de B-modules pour l'action à droite de B sur $B \otimes B$. Notons V le B-module libre de base $(\omega_1, \dots, \omega_d)$, on a ainsi une décomposition $B[[\omega_1, \dots, \omega_d]] = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{S}^n V$ où $\mathbf{S}^n V$ désigne la composante homogène de degré n de la B-algèbre symétrique de V. On peut alors poser

$$C^{p,q} = \mathbf{S}^{p-q} V \otimes_B \Lambda^q V \otimes_B E$$

pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geq 0$, $C^{0,-1} = E$ et $C^{p,q} = 0$ pour les autres valeurs de (p, q). On a alors $K^q = \prod_{p\in\mathbb{Z}} C^{p,q}$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

Un examen attentif de la situation permet de vérifier que δ se décompose bien en $\delta = \sum_{n=0}^\infty \delta_n$ et que $C^{p,q} = 0$ si $p < 0$. D'après le lemme de perturbation, il suffit de montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, le complexe $(C^{p,\bullet}, \delta_0)$ est contractile, ce que l'on déduit du lemme général suivant après tensorisation avec E.

***Lemme 3.17* (Lemme de Poincaré sur un espace affine).** — *Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre, V un B-module. Pour tout entier $p \geq 0$, on considère le complexe $(\mathbf{dR}_p(V), \delta)$ tel que $\mathbf{dR}_p(V)^q = \mathbf{S}^{p-q}(V) \otimes_B \Lambda^q(V)$ si $p \geq q$ et $\mathbf{dR}_p(V)^q = 0$ sinon, avec*

$$\delta(f_1 \cdots f_{p-q} \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_q) = \sum_{k=1}^{p-q} f_1 \cdots \widehat{f_k} \cdots f_{p-q} \otimes f_k \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_q$$

Alors, pour tout $p \neq 0$, le complexe de B-modules $\mathbf{dR}_p(V)$ est canoniquement homotope à zéro.

---

(14) En effet, $\Gamma(U, \Omega^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E})$ est un $\mathscr{O}_X(U)$-module projectif de type fini, $\lim\limits_i \Gamma(U, \mathscr{O}_{\Delta^1_{U/S}(i)})$ est isomorphe à un produit infini de $\mathscr{O}_X(U)$-modules libres de type fini (pour l'action induite par p_0) et on sait que sur un anneau noethérien un produit infini de modules plats est plat.

(15) Si on voulait tricher, on prononcerait l'expression « suite spectrale d'un complexe filtré » sans coup férir. Néanmoins, on peut utiliser le formalisme de l'algèbre homologique pour montrer que $K^\bullet$ est acyclique : grâce à une telle suite spectrale on montre que le complexe $K^\bullet/K^\bullet_{\geq p+1}$ est acyclique pour tout p ; par conséquent, $\mathbf{R}\lim\limits_p (K^\bullet/K^\bullet_{\geq p+1})$ est nul, ce qui permet de conclure en utilisant la condition de Mittag-Leffler.

Démonstration. — On définit une homotopie $h\colon \mathbf{dR}_p(V)^{q+1} \to \mathbf{dR}_p(V)^q$ par la formule suivante

$$h(f_1 \cdots f_{p-q-1} \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_{q+1}) = \sum_{j=1}^{q+1} \frac{(-1)^{j-1}}{p} g_j f_1 \cdots f_{p-q-1} \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{g_j} \wedge \cdots \wedge g_{q+1}$$

On vérifie aussitôt que $hd + dh = \mathrm{Id}$ si $p \geq 1$. On notera que cette construction coïncide avec l'homotopie utilisée habituellement pour démontrer le lemme de Poincaré usuel sur les ouverts étoilés de $\mathbb{R}^n$. □

On remarquera que le lemme de perturbation nous a permis d'une certaine manière de nous ramener au cas où $(E, \nabla) = (B, \mathrm{d})$. □

Proposition 3.18. — *Soit S un schéma et X un schéma de type fini et séparé. Soit $\mathscr{M}^\bullet$ un complexe (borné) d'opérateurs différentiels quasi-cohérent sur X. Alors, on a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\mathrm{strat}}, (Q\mathscr{M}^\bullet)_{\mathrm{strat}}) = \mathbf{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}, \mathbf{tot}(C^\star(Q\mathscr{M}^\bullet)_{\mathrm{strat}})) = \mathbf{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}; \mathscr{M}^\bullet)$$

Démonstration. — Comme la construction que nous allons faire sera fonctorielle par rapport aux opérateurs différentiels, on peut supposer que $\mathscr{M}^\bullet$ est concentré en degré 0, et on note simplement $\mathscr{M}^\bullet = \mathscr{M}$. D'après la proposition 3.7 et un argument semblable à celui du lemme 3.8, on obtient que $\mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\mathrm{strat}}, (Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}}) = \mathbf{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}, C^\star\mathscr{M})$. Il reste donc à construire un quasi-isomorphisme $\mathscr{M} \to C^\star((Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}})$ de faisceaux sur X_{Zar}, fonctoriel par rapport aux opérateurs différentiels.

On rappelle que l'on dispose d'un système projectif de faisceaux d'anneaux cosimpliciaux $\mathscr{P}^\bullet = (\nu \longmapsto \mathscr{O}_{\Delta^\nu_{X/S}(i)})_i$ sur X_{Zar}. On note $\mathscr{Q}^\bullet$ le système projectif de $\mathscr{O}_X$-Algèbres quasi-cohérentes cosimpliciales $(\nu \longmapsto \mathscr{O}_{\Delta^\nu_{X/S}(i)})_i$ obtenu à partir de $\mathscr{P}^\bullet$ par la formule $\mathscr{Q}^\nu = \mathscr{P}^{\nu+1}$, les structures de $\mathscr{O}_X$-Modules étant induites par les 0-ièmes projections. Plus précisément, quand on interprête un objet cosimplicial d'une catégorie $\mathscr{C}$ comme un foncteur de la catégorie $\mathscr{O}rd$ des ensembles totalement ordonnés finis à valeurs dans $\mathscr{C}$, $\mathscr{Q}^\bullet$ s'obtient en composant le foncteur de $\mathscr{P}^\bullet$ avec le foncteur $\mathscr{O}rd \to \mathscr{O}rd$ qui à un ensemble totalement ordonné fini I associe $\{0\} \sqcup I$ où 0 est le plus petit élément de $\{0\} \sqcup I$.

On vérifie facilement que $C^\star((Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}})$ s'identifie au complexe de Moore de la limite projective du système $\mathscr{Q}^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$. On définit un morphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules $\mathscr{M} \to \lim_i (\mathscr{Q}^0 \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M})_i$ par la formule $m \longmapsto (1 \otimes 1) \otimes m$. On définit une homotopie $h_n\colon C^{n+1}((Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}}) \to C^n((Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}})$ par la formule

$$h_n(b_{n+2} \otimes \cdots \otimes b_0 \otimes m) = b_{n+2} \otimes \cdots \otimes b_2 \otimes b_1 b_0 \otimes m$$

On vérifie aussitôt que les h_n permettent de montrer que le morphisme $\mathscr{M} \to C^\star((Q\mathscr{M})_{\mathrm{strat}})$ est un quasi-isomorphisme. □

Démonstration du théorème 3.1. — D'après la proposition précédente, on a un isomorphisme

$$\mathbf{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}, \Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}) = \mathbf{R}\Gamma((X/S)_{\mathrm{strat}}, (Q(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}, \nabla))_{\mathrm{strat}})$$

Le lemme de Poincaré formel permet alors de conclure, puisqu'il fournit un quasi-isomorphisme de complexes de $(\mathscr{O}_X)_{\mathrm{strat}}$-Modules $\varepsilon\colon \mathscr{M}_{\mathrm{strat}} \to (Q(\Omega^\bullet_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}, \nabla))_{\mathrm{strat}}$. □

Bibliographie

[Groth] **Alexander Grothendieck**. Crystals and the de Rham cohomology of schemes *in Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, (1968), pages 306-358. *North-Holland.*

[Katz] **Nicholas M. Katz**. Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **39** (1970), pages 175-232.

Les 23 et 30 avril 2002

Joël Riou, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *Url :* `http://www.eleves.ens.fr/home/jriou/`
• *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~riou/`
• *E-mail :* `riou@math.jussieu.fr`