INTRODUCTION À LA K-THÉORIE

par

Joël Riou

Résumé. — On se propose d'introduire la K-théorie algébrique. Cette théorie permet dans une certaine mesure de classifier les fibrés vectoriels sur une variété algébrique ou différentielle. On étudiera plus particulièrement l'exemple des anneaux d'entiers de corps de nombres.

Table des matières

Dans les années 50, Alexander Grothendieck a introduit la K-théorie : si X est une variété algébrique affine (resp. une variété différentielle), on peut considérer le monoïde des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels sur X et noter $\mathsf{K}(X)$ le groupe (abélien) symétrisé de ce monoïde. Si V est un fibré vectoriel sur X, on note $[X]$ la classe[(1)] de cet élément dans $\mathsf{K}(X)$. On peut traduire cette définition en termes purement algébriques : si A est un anneau, alors on peut remplacer « fibrés vectoriels algébriques sur X » par « A-modules projectifs de type fini » et noter $\mathsf{K}(A)$ le groupe de Grothendieck correspondant.

Quelque temps plus tard, Atiyah et Hirzebruch se sont intéressés au point de vue topologique et ont adapté la définition de Grothendieck dans ce cadre. La grande surprise est qu'ils ont définis non seulement un groupe $\mathsf{K}(X)$ (où X est un espace topologique compact) mais toute une suite[(2)] $(\mathsf{K}_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ de groupes de K-théorie prolongeant la définition précédente puisque l'on a $\mathsf{K}(X) = \mathsf{K}_0(X)$.

Jaloux, les géomètres algébristes ont alors tenté de définir des groupes $\mathsf{K}_1(A)$, $\mathsf{K}_2(A)$... Ils arrivaient essentiellement jusqu'à K_2 sans pouvoir aller plus loin avant qu'au début des années 70, Daniel Quillen ne définisse dans une grande généralité des groupes de K-théorie « supérieurs ».

(1) La langue maternelle de Grothendieck étant l'allemand, celui-ci a choisi la lettre K puisqu'en allemand « classe » se dit « Klasse ». Les mauvaises langues disent qu'il l'a choisie car c'est la dernière lettre de son nom, compte tenu du fait qu'une théorie analogue à la K-théorie et que l'on appelle la G-théorie a également été définie par lui...

(2) Il s'avère que ces groupes sont périodiques de période 2 dans le cas des fibrés vectoriels complexes (resp. 8 pour la variante réelle). Les géomètrs algébristes ont tenté de retrouver de tels théorèmes de périodicité (de Bott) en K-théorie algébrique, et il existent effectivement ! Cependant, c'est plus compliqué, mais ce phénomène s'interprête néanmoins très bien dans la théorie homotopique des schémas de Morel-Voevodsky...

Nous allons ainsi tenter d'expliquer la construction de Quillen et aborder le cas où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres[3].

1. K-théorie inférieure

1.1. K_0. — On a vu la définition de $\mathsf{K}_0(A)$ où A est un anneau (supposé pour simplifier commutatif). Nous allons voir que dans le cas où $A = \mathscr{O}_K$, K étant un corps de nombres, $\mathsf{K}_0(\mathscr{O}_K)$ mesure la faculté des idéaux de $\mathscr{O}_K$ à être principaux ou non.

On peut définir le groupe des classes $\mathrm{Cl}(K)$ de K comme étant le groupe des idéaux fractionnaires de K (*i.e.* sous-$\mathscr{O}_K$-modules de type fini et non nuls de K, la structure de groupe étant donnée par le produit des idéaux, prolongé aux idéaux fractionnaires de la manière évidente) modulo les idéaux fractionnaires principaux (*i.e.* engendrés par un élément de $K^\times$).

Lemme 1.1. — *Soit K un corps de nombres. L'application qui à $(n, \mathscr{L})$ associe $(n-1)[\mathscr{O}_K]+[\mathscr{L}]$ induit un isomorphisme de groupes $\mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(K) \to \mathsf{K}_0(\mathscr{O}_K)$.*

Notez qu'il n'est pas évident que cette application soit un morphisme de groupes[4]. On connaît très mal la structure de $\mathrm{Cl}(K)$, même pour les corps quadratiques (*i.e.* ceux qui sont de degré 2 sur $\mathbb{Q}$).

***Théorème 1.2* (Dirichlet).** — *Soit K un corps de nombres. Alors, $\mathrm{Cl}(K)$ est un groupe fini.*

Démonstration. — Comme la classe de tout idéal fractionnaire est égale dans $\mathrm{Cl}(K)$ à la classe d'un idéal (non nul) de $\mathscr{O}_K$, il suffit de montrer que ceux-ci n'ont qu'un nombre fini de classes dans $\mathrm{Cl}(K)$. Nous allons montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ non nul de $\mathscr{O}_K$, il existe un idéal non nul $\mathfrak{b}$ de norme $\mathbf{N}\mathfrak{b} \leq C$ tel que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ soit principal. Rappelons que la norme de $\mathfrak{b}$ est le cardinal du quotient $\mathscr{O}_K/\mathfrak{b}$. On conclut alors aisément en utilisant qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux de $\mathscr{O}_K$ de norme donnée.

On note $\omega_1, \dots, \omega_n$ une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathscr{O}_K$, n étant de degré de K sur $\mathbb{Q}$. Notons κ le maximum des nombres réels $|\sigma(\omega_i)|$ où $1 \leq i \leq n$ et σ parcourt l'ensemble des plongements $\sigma \colon K \to \mathbb{C}$. On peut alors poser $C = (2n\kappa)^n$. Vérifions que cette constante convient.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de $\mathscr{O}_K$. Comme $\mathscr{O}_K/\mathfrak{a}$ est de cardinal $\mathbf{N}\mathfrak{a}$, parmi les éléments s'écrivant $\sum_{i=1}^n c_i\omega_i$ avec $0 \leq c_i \leq (\mathbf{N}\mathfrak{a})^{\frac{1}{n}} + 1$, il en existe[5] deux distincts α et β ayant la même image dans $\mathscr{O}_K/\mathfrak{a}$. Notons $\xi = \alpha - \beta$. On a $(\xi) \subset \mathfrak{a}$, donc il existe un idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathscr{O}_K$ tel que $(\xi) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. On voit que l'on a l'inégalité $\left|N_{K/\mathbb{Q}}\xi\right| \leq \kappa \cdot \mathbf{N}a$, donc[6] $\mathbf{N}\mathfrak{b} \leq C$. □

1.2. K_1. — La définition de K_1 nécessite l'introduction du groupe linéaire infini[7] $\mathbf{GL}_\infty$. Pour tout entier n et tout anneau A, on dispose d'une inclusion $\mathbf{GL}_n(A) \to \mathbf{GL}_{n+1}(A)$ qui à une matrice inversible M associe $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{GL}_\infty(A)$ n'est autre que la limite inductive de ce système.

Définition 1.3. — Soit A un anneau. $\mathsf{K}_1(A)$ est l'abélianisé de $\mathbf{GL}_\infty(A)$. Grâce à l'application $\det \colon \mathbf{GL}_\infty(A) \to A^\times$, on construit une suite exacte (scindée) :

$$0 \to \mathsf{SK}_1(A) \to \mathsf{K}_1(A) \to A^\times \to 0$$

(3) Un corps de nombres K est un corps qui est une extension finie de $\mathbb{Q}$, et l'anneau de ses entiers $\mathscr{O}_K$ est l'ensemble des éléments de K qui sont solutions d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Par exemple, si $K = \mathbb{Q}(\imath)$, $\mathscr{O}_K = \mathbb{Z}[i]$.

(4) Essayez de le faire en exercice si vous connaissez le théorème de factorisation des idéaux fractionnaires en produit d'idéaux premiers.

(5) Ce n'est pas du tout évident à la réflexion : cela résulte d'un théorème de Minkowski sur les réseaux.

(6) J'utilise ici implicitement que si $\xi \in \mathscr{O}_K - \{0\}$, le cardinal de $\mathscr{O}_K/(\xi)$ s'identifie à la norme de K à $\mathbb{Q}$ de ξ, ce qui n'est pas complètement évident.

(7) Pour les géomètres algébristes qui se poseraient la question, on peut montrer que le foncteur $\mathbf{GL}_\infty$ n'est pas un *schéma* en groupes.

Le lemme suivant implique que SK_1 sert à mesurer l'obstruction qu'à une matrice de déterminant 1 à être stablement[(8)] un produit de matrices « élémentaires » :

Lemme 1.4 **(Milnor).** — *Le groupe dérivé de* $\mathbf{GL}_\infty(A)$ *est le groupe engendré par les matrices élémentaires à savoir les matrices* M *de la forme* $\mathrm{Id} + \lambda E_{i,j}$ *avec* $i \neq j$ *et* $\lambda \in A$.

Théorème 1.5 **(Bass, Milnor, Serre).** — *Si* K *est un corps de nombres, alors* $\mathsf{SK}_1(\mathscr{O}_K) = 0$, *autrement dit* $\mathsf{K}_1(\mathscr{O}_K) = \mathscr{O}_K^\times$.

Le théorème des unités de Dirichlet permet de comprendre la structure du groupe $\mathscr{O}_K^\times$:

Théorème 1.6 **(Dirichlet).** — *Soit* K *un corps de nombres. On note* r_1 *et* r_2 *les entiers tels que* $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ *soit* $\mathbb{R}$*-isomorphe à* $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$. *Alors,* $\mathscr{O}_K^\times$ *est un groupe de type fini de rang* $r_1 + r_2 - 1$.

La démonstration consiste à étudier le « plongement » logarithmique de $K^\times$ dans $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$: en effet, pour chaque plongement σ de K dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, on peut considérer $\ln|\sigma(x)|$; en considérant la famille de tous ces logarithmes (et compte tenu du fait que si σ et σ' sont deux plongements complexes conjugués, $|\sigma(x)| = |\sigma'(x)|$), on obtient le morphisme voulu

$$\mathsf{K}^\times \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

et la formule du produit implique que ce morphisme se factorise par un hyperplan de $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$...

2. K-théorie supérieure

Nous allons définir la K-théorie supérieure d'un anneau A en utilisant des constructions topologiques.

2.1. Homologie des groupes. — Soit Γ un groupe discret.

Définition 2.1. — On appelle classifiant de Γ tout espace pointé connexe $\mathbf{B}\,\Gamma$ dont le groupe fondamental soit identifié à Γ et dont le revêtement universel $\mathbf{E}\,\Gamma$ soit contractile. Un tel objet existe et est unique à homotopie près. L'homologie de Γ à valeurs dans un groupe abélien G n'est autre que l'homologie singulière de $\mathbf{B}\,\Gamma$ à valeurs dans G.

On peut construire $\mathbf{B}\,\Gamma$ de plusieurs manières. L'une d'entre elles consiste à choisir une présentation de Γ : si Γ est un groupe libre F_g à g générateurs, $\mathbf{B}\,\Gamma$ est un bouquet de g-cercles ; pour faire le cas général, on tue des éléments dans le groupe fondamental de $\mathbf{B}\,F_g$ en rajoutant des 2-cellules, puis on tue les éléments dans les groupes d'homotopie supérieurs en rajoutant des n-cellules avec $n \geq 3$ pour rendre le revêtement universel contractile.

On dispose d'autres exemples concrets de classifiants. Par exemple, l'espace projectif réel de dimension infinie $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ est un classifiant de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puisque l'espace total du revêtement à deux feuillets $S^\infty \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ est contractile. On verra plus loin le cas de groupes comme $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Remarque 2.2. — En particulier, $\mathbf{H}_1(\Gamma;\mathbb{Z}) = \Gamma_{\mathrm{ab}}$, ce qui montre que si A est un anneau, $\mathsf{K}_1(A) = \mathbf{H}_1(\mathbf{GL}_\infty(A);\mathbb{Z})$. On voit ainsi un premier lien entre l'homologie des groupes et la K-théorie supérieure.

[(8)] L'adverbe « stablement » signifie que l'on s'autorise à augmenter la taille des matrices en utilisant les flèches de transition qui servent à définir $\mathbf{GL}_\infty$.

2.2. La construction +. — Nous allons bientôt définir la K-théorie algébrique d'un anneau, mais préalablement nous avons besoin de la construction + de Quillen.

Définition 2.3. — Soit (X,x) un espace topologique pointé. Se donner une structure de H-espace sur (X,x) consiste à se donner une loi de composition sur X en faisant un magma unitaire à homotopie près. Plus concrètement, cela revient à se donner une application continue pointée $\mu\colon X\times X\to X$ telle que les application continues pointées $X\to X$ qui à y associent respectivement $\mu(x,y)$ et $\mu(y,x)$ soient homotopes à l'identité.

Par exemple, un groupe topologique est un H-espace. Un des intérêts de la notion de H-espace réside dans le théorème suivant :

Théorème 2.4. — *Soit (X,x) un espace pointé connexe. Pour tout entier $n\geq 1$, on dispose de l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_n(X)\otimes\mathbb{Q}\to\mathbf{H}_n(X;\mathbb{Q})$. Dans le cas où (X,x) est un H-espace, ces morphismes sont injectifs et on peut caractériser l'image en termes purement algébriques*[9] *pourvu que l'on connaisse le morphisme canonique $\mu^\star\colon\mathbf{H}_\star(X;\mathbb{Q})\to\mathbf{H}_\star(X;\mathbb{Q})\otimes\mathbf{H}_\star(X;\mathbb{Q})$ déduit de l'application diagonale $\Delta\colon X\to X\times X$.*

Revenons-en à la construction + qui d'une certaine manière consiste à transformer un espace vérifiant certaines hypothèses en un groupe à homotopie près (en particulier un H-espace) : il s'agit d'une complétion en groupe « topologique »[10].

***Théorème 2.5* (Quillen).** — *Soit A un anneau. Il existe une application continue pointée*

$$\varphi\colon\ \boldsymbol{B}\mathbf{GL}_\infty(A)\to\boldsymbol{B}\mathbf{GL}_\infty(A)^+$$

telle que φ induise un isomorphisme en homologie singulière et que $\boldsymbol{B}\mathbf{GL}_\infty(A)^+$ soit muni d'une structure de H-espace. Un tel espace $\boldsymbol{B}\mathbf{GL}_\infty(A)^+$ est unique à homotopie près.

Définition 2.6. — Soit A un anneau. On définit les groupes de K-théorie algébrique $(\mathsf{K}_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ de A de la manière suivante[11] : $\mathsf{K}_0(A)$ est le groupe sus-défini et pour tout $n\geq 1$,

$$\mathsf{K}_n(A)=\pi_n(\mathbf{B}\,\mathbf{GL}_\infty(A)^+)$$

3. Le théorème de Borel

***Théorème 3.1* (Borel, Dirichlet, Raghuanathan, Quillen).** — *Soit K un corps de nombres. On note r_1 et r_2 le nombre de places*[12] *respectivement réelles et complexes de K.*

1. *Pour tout entier $n\geq 0$, $\mathsf{K}_n(\mathscr{O}_K)$ est un groupe abélien de type fini;*
2. *Pour tout entier $n\geq 0$, on peut construire des isomorphismes (appelés régulateurs) $\mathsf{K}_n(\mathscr{O}_K)\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^{d_n}$ où $d_0=1$, $d_1=r_1+r_2-1$, $d_{2k}=0$ si $k\geq 1$, $d_{4k+1}=r_1+r_2$ si $k\geq 1$ et enfin $d_{4k+3}=r_2$ si $k\geq 0$.*

Si on néglige complètement les phénomènes de torsion, on voit qu'il s'agit essentiellement de calculer l'homologie à coefficients réels de $\mathbf{SL}_\infty(\mathscr{O}_K)$. Pour cela, on peut utiliser le théorème de De Rham et interpréter la cohomologie à coefficients réels comme des classes de formes différentielles sur une variété différentielle convenable.

---

[9] L'image de $\pi_n(X)\otimes\mathbb{Q}$ est l'ensemble des éléments $x\in\mathbf{H}_n(X;\mathbb{Q})$ tels que $\mu^\star(x)=x\otimes 1+1\otimes x$; on dit alors que x est primitif.

[10] Ce fut l'obstacle majeur à la fondation de la K-théorie algébrique supérieure. En effet, pour définir la K-théorie topologique, les espaces classifiants utilisés (*i.e.* $\mathbf{B}\,\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C})$, c'est-à-dire la grassmannienne infinie) sont déjà des H-espaces. (Attention au fait qu'en K-théorie topologique, on considère $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ comme groupe topologique avec la topologie usuelle tandis qu'en K-théorie algébrique, $\mathbf{GL}_n(A)$ est toujours un groupe discret.)

[11] Il existe aussi des groupes de K-théorie négative... Ceux-ci sont cependant nuls pour les anneaux réguliers (par exemple l'anneau des fonctions sur une variété algébrique affine et *lisse* sur un corps.).

[12] Une place d'un corps de nombres est une classe d'équivalence de valeurs absolues. Parmi celles-ci, certaines sont archimédiennes d'autres non. Le complété de K pour une place archimédienne est isomorphe soit $\mathbb{R}$ soit à $\mathbb{C}$. De plus, on a un isomorphisme $K\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{R}=\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}$ de $\mathbb{R}$-algèbres.

3.1. Classifiants des groupes $\mathbf{GL}_n(\mathscr{O}_K)$. — Rappelons qu'une variété algébrique (affine) X sur un corps k est l'ensemble des points d'un espace affine $\mathbb{A}^d$ vérifiant des équations polynômiales à coefficients dans k. L'ensemble des points $X(A)$ de X à valeurs dans une k-algèbre A est l'ensemble des éléments de A^d vérifiant les équations qui définissent X.

Un k-groupe algébrique (sous-entendu affine) G n'est autre qu'une k-variété algébrique munie d'une structure de groupe de sorte que la multiplication et l'inversion soient données par des fonctions polynômiales. On a l'exemple de $G = \mathbf{GL}_n$ qui est fondamental puisque l'on peut montrer que tout k-groupe algébrique est un sous-groupe fermé (pour la topologie de Zariski) de $\mathbf{GL}_n$ pour n assez grand.

Notons G_n le groupe algébrique $\mathscr{R}_{K/\mathbb{Q}}\mathbf{SL}_n$ sur $\mathbb{Q}$ qui est défini par le fait que l'on a un isomorphisme $G_n(A) = \mathbf{SL}_n(A \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} K)$ fonctoriel en la $\mathbb{Q}$-algèbre A.

Définition 3.2. — Notons que $G_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie réel (connexe) dont on peut noter X_n l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux. $G_n(\mathbb{R})$ agit naturellement à gauche sur X_n par conjugaison. Cette action est transitive et si $K \in X_n$, le stabilisateur de K est K, ainsi X_n s'identifie à $G_n(\mathbb{R})/K$. En particulier, on a une structure de variété différentielle sur X_n.

Remarque 3.3. — Les sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$) sont des groupes de matrices orthogonales (resp. unitaires) pour des produits scalaires euclidiens (resp. hermitiens) adaptés sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). On voit ainsi que l'espace (symétrique) des sous-groupes compacts de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$) s'identifie à l'ensemble des classes (à homothétie près) de ces produits scalaires. En particulier, ces espaces symétriques sont contractiles.

Proposition 3.4. —
$$\mathbf{H}_q(\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K);\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}_q(\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)\backslash X_n;\mathbb{Q})$$

Si on remplaçait $\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)$ par un sous-groupe d'indice fini Γ sans torsion (il en existe), alors la proposition serait vraie avec des coefficients entiers puisque l'action de Γ sur X_n serait libre, la projection $X_n \to \Gamma\backslash X_n$ un revêtement et X_n contractile, faisant de $\Gamma\backslash X_n$ un honnête classifiant de Γ. Le cas où Γ a de la torsion en résulte mais les coefficients rationnels sont nécessaires.

3.2. Théorie de Hodge. — On dispose ainsi d'une méthode « explicite » pour calculer la cohomologie du groupe $\mathbf{GL}_\infty(\mathscr{O}_K)$ (et donc la K-théorie algébrique de $\mathscr{O}_K$ en négligeant la torsion) en passant par les classifiants précedemment construits. Faisons comme si $\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)\backslash X_n$ était une variété différentielle[13].

On peut utiliser le théorème de De Rham pour tout ramener à des questions de formes différentielles sur X_n invariantes par l'action du groupe $\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)$. Maintenant, l'idée de Borel est d'utiliser la théorie de Hodge pour interprêter les groupes de cohomologie de De Rham en termes de formes harmoniques.

Si on se donne une variété riemannienne orientée X de dimension n, on dispose de la différentielle extérieure $d\colon \Omega^p \to \Omega^{p+1}$. De plus, on dispose d'un isomorphisme tautologique $\star\colon \Omega^p \to \Omega^{n-p}$ qui permet de définir $\delta\colon \Omega^p \to \Omega^{p-1}$ grâce à la formule $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star$. Si X est compacte, on peut définir un produit scalaire sur l'espace des p-formes différentielles sur X :
$$(\alpha,\beta) = \int_X \alpha \wedge \star\beta$$
Une généralisation de la formule d'intégration par parties dit alors que $(d\alpha,\beta) = (\alpha,\delta\beta)$.

Le laplacien est défini par $\Delta = d\delta + \delta d$. Une forme différentielle est harmonique si son laplacien est nul. Le théorème fondamental de la théorie de Hodge implique le suivant :

Théorème 3.5. — *Soit X une variété riemannienne orientée X compacte. Soit p un nombre entier. Notons $\mathscr{H}^p(X)$ l'espace des p-formes différentielles harmoniques sur X, alors la flèche évidente est un isomorphisme :*
$$\mathscr{H}^p(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^p_{dR}(X)$$

[13] On se ramène à ce cas-là en prenant un sous-groupe distingué d'incide fini Γ comme précédemment.

On voudrait notamment appliquer ce théorème aux variétés X_n qui peuvent être canoniquement munies de structures riemanniennes. Cependant, X_n n'est pas compacte. Ainsi, Borel considère des formes harmoniques vérifiant des conditions L^2, par exemple pour pouvoir utiliser la « formule d'intégration par parties » (plus précisément, des formes différentielles sur X_n invariantes par $\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)$ et à croissance logarithmique le long du bord de la compactification de Borel-Serre $\overline{X_n}$ de X_n.). Il montre au passage que la cohomologie à coefficients réels de $\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)$ s'identifie à l'espace des formes différentielles harmoniques L^2 sur $\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)\backslash X_n$.

Le véritable tour de force technique consiste à montrer qu'une forme différentielle harmonique ω sur X_n et Γ-invariante est en fait $G(\mathbb{R})$-invariante. Si on y regarde de plus près, on se rend compte qu'il en résulte que la cohomologie de $\mathbf{SL}_n(\mathscr{O}_K)$ ne dépend que du posititionnement relatif infinitésimal de $G_n(\mathbb{R})$ par rapport à un de ses sous-groupes compacts maximaux. En d'autres termes, on se ramène à calculer des groupes de cohomologie relative d'algèbres de Lie qui s'avèrent être calculables très explicitement, ce qui achève l'aperçu de la preuve.

Cependant, les résultats qui viennent d'être énoncés sont faux en général. En effet, ils ne sont vrais qu'en bas degré cohomologique, la borne ayant pour ordre de grandeur $\frac{n}{4}$. Ainsi, compte tenu du fait que l'on s'intéresse en priorité à la cohomologie de $\mathbf{GL}_\infty(\mathscr{O}_K)$, ce n'est pas gênant.

Bibliographie

[B] **Armand Borel**. Stable real cohomology of arithmetic groups. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (4ème série), **7** (1974), pages 235-272.

[dR] **Georges de Rham**. Variétés différentiables, formes, courants. Formes harmoniques. *Actualités scientifiques et industrielles*, **1222** (1973). Publications de l'institut mathématique de l'université de « Nancago ». *Hermann.*

[H] **Sigurdur Helgason**. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. *Pure and applied mathematics*, **80** (1978). *Academic Press.*

[L] **Serge Lang**. Algebraic Number Theory. *Second edition. Graduate Texts in Mathematics*, **110** (1994).

[K] Higher K-theories. Volume I. *Lecture Notes in Mathematics*, **341** (1973). *Springer.*

---

30 octobre 2002

JOËL RIOU, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *Url :* http://www.eleves.ens.fr:8080/home/jriou/
• *Url :* http://www.math.jussieu.fr/~riou/
• *E-mail :* riou@math.jussieu.fr