ALGÈBRES DE LIE DES GROUPES ALGÉBRIQUES

JOËL RIOU
JÉRÔME PLÛT

Résumé. Nous allons définir les algèbres de Lie des groupes algébriques affines en définissant des notions locales sur les variétés algébriques. On tentera de montrer l'égalité entre la dimension d'un groupe et la dimension de son algèbre de Lie. Puis, on étudiera des notions comme le fibré tangent d'un groupe algébrique, sa représentation adjointe, tout ceci étant un préliminaire au prochain exposé où il sera notamment question de *quotients*.

Plan

1. Espaces tangents

Notation 1. *Soit V une variété algébrique sur un corps algébriquement clos k. Pour tout ouvert U de V, on désignera par $\mathcal{O}(U)$ la k-algèbre des fonctions régulières sur U. Pour tout $x \in V$, $\mathcal{O}_x$ sera la k-algèbre des germes en x de fonctions régulières (i.e. $\mathcal{O}_x$ est la limite* filtrante $\varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}(U)$*), son anneau local sera noté $\mathfrak{m}_x$. On fera aussi l'identification $\mathcal{O}_x = k \oplus \mathfrak{m}_x$.*

Définition 1. *Pour tout $x \in V$, on note $\mathcal{D}_x$ l'espace vectoriel des dérivations de $\mathcal{O}_x$ vers k, à savoir les éléments $\delta \in Hom_k(\mathcal{O}_x, k)$ tels que*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{O}_x \qquad \delta(fg) = f(x)\delta(g) + g(x)\delta(f)$$

Définition 2. *L'espace tangent à V en x (noté $T_x(V)$) est par définition $\mathcal{D}_x$, qui est canoniquement isomorphe à $Hom_k\big(m_x/m_x^2, k\big)$.*

Démonstration. Une dérivation s'annule sur m_x^2 car si $f, g \in \mathfrak{m}_x$, $\delta(fg) = f(x)\delta(f) + g(x)\delta(g) = 0$. De plus, une dérivation s'annule sur k, car $\delta(1.1) = 1.\delta(1) + 1.\delta(1)$. Par restriction, on obtient ainsi un élément de $\mathrm{Hom}_k\big(m_x/m_x^2, k\big)$. Il reste à voir que si $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(m_x, k)$ s'annule sur m_x^2 alors l'élément $\delta = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}_k(k \oplus \mathfrak{m}_x, k)$ est une dérivation : soient $\alpha, \beta \in k$, $f, g \in m_x$, $\varphi((\alpha + f)(\beta + g)) = \alpha\varphi(g) + \beta\varphi(f) + \varphi(fg) = \alpha\varphi(g) + \beta\varphi(f)$. ☐

2. Différentielles

Notation 2. *Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme de variétés. Soit $x \in U$. Le morphisme de variétés algébriques induit un morphisme de k-algèbres $\varphi_x^\star : \mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ qui envoie bien entendu $m_{\varphi(x)}$ vers m_x. On a donc un morphisme de k-espaces vectoriels $\tilde{\varphi}_x^\star : m_{\varphi(x)}/m_{\varphi(x)}^2 \longrightarrow m_x/m_x^2$.*

Définition 3. *La différentielle de φ en x est la transposée de $\tilde{\varphi}_x^\star$, on la note $d\varphi_x \in Hom_k\big(T_x(V), T_{\varphi(x)}(W)\big)$.*

Remarque 1. *La différenciation est fonctorielle : la différentielle de Id_V en $x \in V$ est $Id_{T_x(V)}$, et si $\varphi : V \longrightarrow W$ et $\psi : W \longrightarrow X$ sont des morphismes de variétés et $x \in V$ alors $d(\psi \circ \varphi)_x = d\psi_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x$. De plus, ce foncteur commute aux sommes directes finies. (Pour voir cela, il s'agit essentiellement de se souvenir que dans la variété produit $V \times W$, les germes de fonctions régulières en (x, y) s'identifient au localisé de $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_k \mathcal{O}_{Y,y}$ par l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x \otimes_k \mathcal{O}_{Y,y} + \mathcal{O}_{X,x} \otimes_k \mathfrak{m}_y$.)*

3. Compatibilité avec la définition usuelle dans A^n

On se donne une variété X isomorphe à un ouvert principal d'un espace vectoriel V. X est définie par une équation polynômiale $f(X_1, \dots, X_n) \neq 0$.

Exercice 1. *La variété quasi-affine X est isomorphe à la variété algébrique affine définie dans k^{n+1} par l'ensemble algébrique $\big\{(x_1, \dots, x_n, y) \in k^{n+1}, f(x_1, \dots, x_n)y = 1\big\}$. Et l'anneau des polynômes $k[X]$ est isomorphe à $k\Big[x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f}\Big]$.*

Les dérivations de $\mathcal{O}_0$ correspondent bijectivement aux dérivations de l'anneau $k\Big[x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f}\Big]$ en 0, et même à celles de $k[x_1, \dots, x_n]$ grâce à une construction analogue à celle qui sera expliquée (dans le cas des algèbres de Lie) dans le prochain paragraphe. Or les dérivations de $k[x_1, \dots, x_n]$ sont uniquement déterminées par leur valeur sur $V^\star$, en on a ainsi une correspondance

$$\mathrm{T}_x(X) \cong \mathrm{Hom}_k(V^\star, k) = V^{\star\star} \cong V$$

(Bien entendu, si $X = V$, on a aussi $\mathrm{T}_x(X) \cong V$.)

On peut expliciter l'isomorphisme de V vers $\mathrm{T}_x(V)$, à $v \in V$, on associe $\delta_v \in \mathrm{T}_x(V)$ définie par $\delta_v(f) = \frac{d(f(x+Tv))}{dT}(0)$ pour tout $f \in \mathcal{O}_x$. (Pour voir cela, il suffit de vérifier que cela coïncide sur les éléments $f \in V^\star$.)

Ainsi, sur des variétés isomorphes à un ouvert principal de V ou à V, l'espace tangent s'identifie à V, et il est clair que dans ce contexte la différentielle d'un morphisme de variétés $\varphi : X \longrightarrow Y$ s'identifie à la différentiation usuelle de polynômes. Plus précisément, si Y est un espace vectoriel W, on a la formule suivante (qu'il suffit de vérifier dans le cas où $W = k$) :

$$\forall v \in V \qquad d\varphi_x(v) = \frac{d(\varphi(x + Tv))}{dT}(0)$$

Exemple 1. *La différentielle du déterminant en l'élément neutre est la trace.*

Démonstration. On calcule $\det(1 + TX_{ij}) = 1 + \delta_{ij}T$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. On en déduit que $d\det_1(X_{ij}) = \delta_{ij}$ ce qui donne bien $d\det_1 = \mathrm{tr}$. ☐

Exemple 2. *La différentielle d'une application linéaire est elle-même en tout point.*

4. L'algèbre de Lie

Notation 3. *Soit G une groupe algébrique affine (d'élément neutre e). On note $\mathcal{A} = k[G]$ la k-algèbre des fonctions polynômiales sur G. On note $\lambda : G \longrightarrow Aut(\mathcal{A})$ l'action de G sur $\mathcal{A}$ par translation à gauche (i.e. $\lambda_g(f)(h) = f\big(g^{-1}h\big)$).*

Définition 4. *On désigne par $Der(\mathcal{A})$ le k-espace vectoriel des dérivations de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire les éléments $\delta \in End_k(\mathcal{A})$ tels que*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{A} \qquad \delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$$

Définition 5. *On note $Lie(G)$ (ou $\mathfrak{g}$) le sous-espace vectoriel de $Der(\mathcal{A})$ constitué des dérivations qui commutent avec l'action de G, c'est-à-dire que*

$$Lie(G) = \{\delta \in Der(\mathcal{A}), \forall g \in G, \lambda_g \delta = \delta \lambda_g\}$$

Théorème 1. *Il y a un isomorphisme canonique entre $Lie(G)$ et $T_e(V)$.*

Démonstration. Construisons les deux morphismes réciproques.

Soit $x \in \mathrm{T}_e(V)$. On définit $\eta(x) \in \mathrm{End}_k(\mathcal{A})$ par

$$\forall f \in \mathcal{A} \qquad \forall y \in G \qquad \eta(x)(f)(g) = x\big(\lambda_{g^{-1}} f\big)$$

On vérifie aisément que $\eta(x)$ est une dérivation sur $\mathcal{A}$ invariante par translation à gauche. On a ainsi construit $\eta \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{T}_e(V), \mathrm{Lie}(G))$. (On note $\eta(x)(\cdot) = \cdot \star x$.)

Soit $\alpha \in \mathrm{Lie}(G)$. Il s'agit de définir une dérivation $\epsilon : \mathcal{O}_e \longrightarrow k$ telle que pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\epsilon(f) = \alpha(f)(e)$. Si elle existe, une telle dérivation sera unique, vu la relation $\epsilon\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\epsilon(f)g(e) - f(e)\epsilon(g)}{g(e)^2}$.

On note $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{A}$ associé à e. On sait que $\mathcal{O}_e$ s'identifie à l'anneau localisé $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$.

Pour tout $f \in \mathcal{A}$, on pose $\delta(f) = \alpha(f)(e)$.

On définit la fonction $\epsilon : \mathcal{A} \times (\mathcal{A} - \mathfrak{M}) \longrightarrow k$ par $\epsilon\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\delta(f)g(e) - f(e)\delta(g)}{g(e)^2}$.

Montrons que cela définit bien une fonction de $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$. Soient $f, f' \in \mathcal{A}$, $g, g' \in \mathcal{A} - \mathfrak{M}$.

$$\begin{aligned}
(gg')(e)^2\left[\epsilon\left(\frac{f}{g}\right) - \epsilon\left(\frac{f'}{g'}\right)\right] &= g'(e)^2[\delta(f)g(e) - \delta(g)f(e)] + g(e)^2[\delta(g')f'(e) - g'(e)\delta(f')] \\
&= gg'(e)[\delta(f)g'(e) + \delta(g')f(e) - \delta(g)f'(e) - \delta(f')g(e)] \\
&= gg'(e)[\delta(fg') - \delta(f'g)] = 0
\end{aligned}$$

A partir de cela, la linéarité de ϵ s'obtient sans calculs supplémentaires (il suffit de fixer un dénominateur commun).

Il reste à voir que c'est une dérivation :

$$\begin{aligned}
gg'(e)^2\epsilon\left(\frac{f}{g}\frac{f'}{g'}\right) &= gg'(e)[\delta(f')f(e) + \delta(f)f'(e)] - ff'(e)[\delta(g')g(e) + \delta(g)g'(e)] \\
&= f'g'(e)[\delta(f)g(e) - \delta(g)f(e)] + fg(e)[\delta(f')g'(e) - \delta(g')f'(e)] \\
\epsilon\left(\frac{f}{g}\frac{f'}{g'}\right) &= \frac{f'}{g'}(e)\epsilon\left(\frac{f}{g}\right) + \frac{f}{g}(e)\epsilon\left(\frac{f'}{g'}\right)
\end{aligned}$$

On note $\theta \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Lie}(G), \mathrm{T}_e(V))$ l'application qui à α associe ϵ.

Il est vraiment immédiat que θ et η sont des isomorphismes réciproques. □

Définition 6. *L'algèbre de* Lie *du groupe algébrique affine G est $Lie(G)$ avec le crochet $[x,y] = xy - yx$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les dérivations sont stables par crochet, et que l'invariance par translation à gauche est aussi conservée. Il est ensuite connu que l'on aura

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \qquad [x,x] = 0$$

□

Remarque 2. *La composante neutre étant ouverte (cf. la proposition 1. du paragraphe 2.1 de l'exposé de* Gaëtan Chenevier*), les germes de fonctions en e sont les mêmes dans G et dans G^0 et, ainsi, d'après la définition des espaces tangents en e, on peut faire l'identification $Lie(G) = Lie(G^0)$.*

Exemple 3. *Le groupe additif $\mathbb{G}_a$ admet pour anneau de polynômes $k[T]$. Une dérivation en 0 est entièrement déterminée par sa valeur sur T. L'algèbre de* Lie *$Lie(\mathbb{G}_a)$ est de dimension 1 donc commutative.*

Exemple 4. *Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ admet pour anneau de polynômes $k[X,Y]/(XY-1) \cong k[T,T^{-1}]$ qui est l'anneau des polynômes de* Laurent*. L'algèbre de* Lie *$Lie(\mathbb{G}_m)$ est de dimension 1, la dérivation usuelle des polynômes de* Laurent *étant (à constante multiplicative près) la seule dérivation invariante par $\mathbb{G}_m$.*

5. Morphismes de groupes algébriques et morphismes des algèbres de Lie

Notation 4. *Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes algébriques. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de* Lie *des groupes G et G'.*

Théorème 2. *La différentielle $d\varphi_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de* Lie.

Démonstration. On va montrer que la différentielle de φ conserve le crochet de Lie. Soient $x, y \in \mathfrak{g}$. On pose $x' = d\varphi_e(x), y' = d\varphi_e(y)$. Soit $f' \in k[G']$. $f = \varphi^\star f'$. On a $[x', y'](f') = (f' \star y' \star x')(e) - (f' \star x' \star y')(e) = x'(f' \star y') - y'(f' \star x')$. $d\varphi_e([x,y])(f') = (f \star y \star x)(e) - (f \star x \star y)(e) = x(f \star y) - y(f \star x)$. Pour voir l'égalité, il suffit de prouver que l'on a $x(f \star y) = x'(f' \star y')$. Or $x'(f' \star y') = x(\varphi_e^\star(f' \star y'))$, donc finalement on a juste à montrer que $\varphi_e^\star(f' \star y') = f \star y$. On évalue ces fonctions en $g \in G$. $(f \star y)(g) = ((\varphi_e^\star f') \star y)(g) = y\big(\lambda_{g^{-1}}(\varphi_e^\star f')\big)$. De l'autre côté $\varphi_e^\star(f' \star y')(g) = (f' \star y')(\varphi(g)) = (f' \star d\varphi_e(y))(\varphi(g)) = d\varphi_e(y)\Big(\lambda_{\varphi(g)^{-1}} f'\Big) = y\Big(\varphi_e^\star\Big(\lambda_{\varphi(x)^{-1}} f'\Big)\Big)$. Il reste à voir que $\lambda_{g^{-1}}(\varphi_e \star f') = \varphi_e^\star\Big(\lambda_{\varphi(g)^{-1}} f'\Big)$. Soit $h \in G$. $\lambda_{g^{-1}}(\varphi_e \star f')(h) = (\varphi_e \star f')(gh) = f'(\varphi(gh)) = f'(\varphi(g)\varphi(h)) = \Big(\lambda_{\varphi(g)^{-1}} f'\Big)(\varphi(h)) = \varphi_e^\star\Big(\lambda_{\varphi(g)^{-1}} f'\Big)(h)$. □

6. Sous-groupes, sous-algèbres de Lie, et idéaux

Notation 5. *Soient G un groupe algébrique, et H un sous-groupe fermé de G. On note I l'idéal de $k[G]$ associé à H. Si on note $\eta : H \longrightarrow G$ le morphisme d'inclusion, on a $\eta^\star : k[G] \longrightarrow k[H] \cong k[G]/I$. On note respectivement $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de* Lie *des groupes algébriques G et H.*

On va caractériser l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ grâce à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et à l'idéal I.

Propriété 1. *$d\eta_e : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ définit un isomorphisme $\mathfrak{h} \cong \{\delta \in \mathfrak{g}, \delta(I) \subset I\}$.*

Démonstration. Il suffit de revenir aux définitions. L'espace tangent $\mathrm{T}_e(H)$ s'identifie aux éléments de $\mathrm{T}_e(G)$ qui s'annulent sur l'idéal I. □

7. Dimension

Soit G un groupe algébrique affine. On rappelle que l'on a défini la dimension d'un groupe algébrique G par sa dimension en tant que variété algébrique.

Proposition 1.

$$\dim G = \dim_k Lie(G)$$

Lemme 1. *Soit x un point sur une variété algébrique V. Le nombre minimal de générateurs du $\mathcal{O}_x$-module $\mathfrak{m}_x$ est égal à $\dim T_x(V)$.*

Démonstration. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}_x$ des générateurs de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. On note N le $\mathcal{O}_x$-module engendré par $f_1, \ldots, f_n$. On a $\mathfrak{m}_x = N + \mathfrak{m}_x^2$, puis $\mathfrak{m}_x(\mathfrak{m}_x/N) = (\mathfrak{m}_x/N)$. D'après le lemme de Nakayama, $\mathfrak{m}_x = N$. □

Définition 7. *$x \in V$ est dit régulier si et seulement si la dimension de* Krull *de l'anneau $\mathcal{O}_x$ est égale au nombre minimal de générateurs du $\mathcal{O}_x$-module $\mathfrak{m}_x$, c'est-à-dire si $\mathcal{O}_x$ est un anneau local régulier.*

On admet le théorème suivant :

Théorème 3. *L'ensemble des points réguliers d'une variété algébrique est un ouvert dense.*

Démonstration de la proposition. Pour démontrer ce résultat, on peut remarquer que l'on peut supposer que le groupe G est connexe. Il existe ainsi un élément du groupe G qui soit un point régulier. Or, les translations à gauches donnent des automorphismes de variétés algébriques. Ainsi, tous les points du groupe sont réguliers. En tant que variété algébrique, un groupe algébrique est donc lisse.

D'après le lemme, la dimension de Krull de $\mathcal{O}_x$ est la même que la dimension de $\mathrm{T}_x(V)$ qui est égale à la dimension de $\mathrm{Lie}(G)$.

Le *Nullstellensatz* de Hilbert donne une correspondance entre les fermés irréductibles de X et les idéaux premiers de $k[G]$. On a donc l'égalité entre $\dim G$ et la dimension de l'anneau $k[G]$. Or, la dimension de $k[G]$ est égale à celle de $\mathcal{O}_x$ pour tout $x \in G$. En effet, les idéaux premiers de $k[G]$ inclus dans un idéal maximal associé à $g \in G$ se correspondent bijectivement avec les idéaux premiers de $\mathcal{O}_g$. Ainsi $\dim G = \dim_k \mathrm{Lie}(G)$. □

8. Algèbre de Hopf et algèbre de Lie

8.1. **Les algèbres de Hopf.** On note $\mathcal{A} = k[G]$ l'algèbre de Hopf du groupe algébrique affine G. On rappelle que l'on peut identifier $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$ avec les fonctions polynômiales sur $G \times G$. Étant donnée la multiplication $G \times G \longrightarrow G$, on peut définir la comultiplication $\mu^\star : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$ qui a f associe $f(\mu(x,y))$. Le neutre est une flèche $e^\star : \mathcal{A} \longrightarrow k$ (c'est l'évaluation en e). Pour définir la coinversion $i^\star$, on fait $i^\star f(x) = f(i(x))$ (i étant l'inversion qui est polynômiale.). Une algèbre de Hopf est donc un *cogroupe* dans la catégorie des k-algèbres (le coproduit n'est autre que le produit tensoriel de k-algèbres), tandis qu'un groupe algébrique affine n'est autre qu'un groupe dans la catégorie des variétés algébriques affines. On a donc quelques diagrammes commutatifs qui traduisent l'associativité, l'élément neutre et l'inversion (1 désigne la flèche identité) :

8.1.1. *Associativité.*

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[l, "\mu^\star\otimes 1"'] \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[u, "1\otimes\mu^\star"] & \mathcal{A} \arrow[l, "\mu^\star"] \arrow[u, "\mu^\star"'] \end{tikzcd}$$

8.1.2. *Élément neutre.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "e\times 1"] \arrow[d, "1\times e"] \arrow[dr, "1"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[l, "e^\star\otimes 1"'] \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[u, "1\otimes e^\star"] & \mathcal{A} \arrow[l, "\mu^\star"] \arrow[u, "\mu^\star"'] \arrow[ul, "1"] \end{tikzcd}$$

8.1.3. *Inversion.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i\times 1"] \arrow[d, "1\times i"] \arrow[dr, "e"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[l, "i^\star\otimes 1"'] \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[u, "1\otimes i^\star"] & \mathcal{A} \arrow[l, "\mu^\star"] \arrow[u, "\mu^\star"'] \arrow[ul, "e^\star"] \end{tikzcd}$$

8.1.4. *Morphismes.* Dans ce contexte, il est équivalent de se donner un morphisme de groupes algébriques $\varphi : G \longrightarrow H$ ou un comorphisme d'algèbres de Hopf $\varphi^\star : k[H] \longrightarrow k[G]$ qui font commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu_G"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ H \times H \arrow[r, "\mu_H"] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k[G]\otimes_k k[G] & k[G] \arrow[l, "\mu_G^\star"'] \\ k[H]\otimes_k k[H] \arrow[u, "\varphi^\star\otimes\varphi^\star"] & k[H] \arrow[l, "\mu_H^\star"'] \arrow[u, "\varphi^\star"'] \end{tikzcd}$$

8.2. **L'algèbre de Lie.** On a construit l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G comme une sous-algèbre de Lie de l'algèbre associative $\mathrm{End}_k(\mathcal{A})$. En fait, on peut voir les éléments de l'algèbre de Lie comme des eléments de $\mathrm{Hom}_k(\mathcal{A}, k)$ (en les composant par $e^\star$. Donc, si $x, y \in \mathrm{T}_e(G)$, on peut définir $x \otimes y \in \mathrm{Hom}_k(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, k)$ par la formule $x \otimes y(f \otimes g) = x(f)y(g)$. On peut ensuite définir le produit associatif $x.y = (x \otimes y)\mu^\star \in \mathrm{Hom}_k(\mathcal{A}, k)$. Le crochet de Lie de $\mathrm{Lie}(G)$ s'identifie alors à $[x,y] = x.y - y.x$. On définit un isomorphisme η de $\mathrm{Hom}_k(A,k)$ vers le commutant dans $\mathrm{End}_k(A)$ des translations à gauche qui à x associe $f \longrightarrow \big(g \longrightarrow x(\lambda_{g^{-1}} f)\big)$. Pour montrer que le crochet de l'algèbre de Lie du groupe G provient du produit . (et montrer au passage qu'il est associatif), il suffit de vérifier que η permet de faire passer le produit . dans $\mathrm{Hom}_k(A,k)$ au produit d'applications linéaires dans $\mathrm{End}_k(A)$.

Démonstration. Il faut vérifier que $\eta(x.y) = \eta(x)\eta(y)$. On note comme précédemment $\eta(x)(f) = f \star x$. Soit $f \in k[G]$. On peut écrire $\mu^\star f = \sum f_i \otimes g_i$. $(f \star x)(g) = x\big(\lambda_{g^{-1}} f\big)$. Calculons $\lambda_{g^{-1}} f(h) = f(gh) = \mu^\star f(g,h) = \sum_i f_i(g) g_i(h)$. Ainsi $x\big(\lambda_{g^{-1}} f\big) = \sum_i f_i(g) x(g_i)$.

$$
\begin{aligned}
\eta(x)\eta(y)(f)(e) &= (f \star y \star x)(e) \\
&= \left(\left(\sum_i y(g_i) f_i\right) \star x\right)(e) \\
&= \sum_i y(g_i)(f_i \star x)(e) \\
&= \sum_i x(f_i) y(g_i) \\
&= (x \otimes y)\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right) \\
&= (x \otimes y)\mu^\star f = \eta(x.y)(f)(e)
\end{aligned}
$$

□

9. Algèbres de Lie de $\mathrm{GL}_n(k)$ et $\mathrm{SL}_n(k)$

9.1. **$\mathbf{GL}_n(k)$.** Grâce à l'algèbre de Hopf, on peut calculer très facilement l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(k)$ de $\mathrm{GL}_n(k)$. Tout d'abord, d'après une remarque faite au début de l'exposé on sait que l'on peut identifier $\mathfrak{gl}_n(k)$ à l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(k)$. On note T_{ij} la base canonique du dual de $\mathfrak{gl}_n(k)$. Ainsi, pour $x \in \mathfrak{gl}_n(k)$, on note $(x_{ij}) = (T_{ij}(x))$ ses coordonnées. Calculons maintenant le produit associatif $x.y$ de deux élément de l'algèbre de Lie. $\mu^\star(T_{ij}) = \sum_h T_{ih} \otimes T_{hj}$, d'après la définition du produit dans le groupe $\mathrm{GL}_n(k)$. Ainsi $x.y(T_{ij}) = (x \otimes y)(\mu^\star(T_{ij})) = \sum_h (x \otimes y)(T_{ih} \otimes T_{hj}) = \sum_h x(T_{ih}) y(T_{hj}) = \sum_h x_{ih} y_{hj}$. On reconnaît dans cette formule, le coefficient en T_{ij} de la matrice produit xy. Le crochet de Lie dans $\mathfrak{gl}_n(k)$ est donc

$$[x, y] = xy - yx$$

9.2. **$\mathbf{SL}_n(k)$.** D'après le premier exposé, on sait que $\mathrm{SL}_n(k)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(k)$ de dimension $n^2 - 1$. Par ailleurs, la fonction det est constante sur $\mathrm{SL}_n(k)$, donc sa différentielle est nulle en e, or la différentielle de det est la trace. $\mathfrak{sl}_n(k)$ annule donc la trace, pour des raisons de dimensions, on a $\mathfrak{sl}_n(k) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{tr}\ x = 0\}$.

Exercice 2. *Calculer l'algèbre de* Lie *du groupe orthogonal $\mathbb{O}_n(k)$.*

10. Fibré tangent

Notation 6. *On appelle G un groupe algébrique affine, A=$k[G]$ la k-algèbre des polynômes sur G, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G Si g est un élément de G, on note e_g la fonction évaluation en g :*

$$e_g : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & k \\ f & \mapsto & f(g) \end{array} \right.$$

10.1. **Le groupe $G(B)$.**

Définition 8. *Soit B une k-algèbre. On note $G(B)$ l'ensemble des morphismes de k-algèbre de A vers B. On munit $G(B)$ d'une loi de composition : pour f, g appartenant à $G(B)$, on définit fg par*

$$fg = m \circ (f \otimes g) \circ \mu^\star$$

où m dénote la multiplication dans B, soit :

$$A \xrightarrow{\mu^\star} A \otimes A \xrightarrow{f \otimes g} B \otimes B \xrightarrow{m} B$$

Proposition 2. *$G(B)$, muni de cette loi de composition, est un groupe.*

Démonstration. La structure de groupe de $G(B)$ provient directement de la structure d'algèbre de Hopf de A. Le neutre de $G(B)$ est l'évaluation e_e en l'élément neutre. Etant donnée f appartenant à $G(B)$, son inverse est $f \circ i^\star$, où $i^\star$ est la coinversion dans A. □

Exemple 5. *Dans le cas où $B = k$,la loi de groupe sur $G(B) = Hom_k(G, k)$ est la même que la loi de groupe sur G.*

10.2. **Le fibré tangent.**

Définition 9. *La* k-algèbre des nombres duaux *est la* k*-algèbre* $k[\delta]/(\delta^2)$.

On remarque que $k[\delta]/(\delta^2)$ se surjecte sur k par $\delta \mapsto 0$.

Définition 10. *Le* fibré tangent TG *à* G *est le groupe* $G(k[\delta]/(\delta^2))$.

Si g appartient à G et si X est un élément de l'espace tangent T_gG, alors $e_g + \delta X$ est un élément de TG.

Le fibré TG se surjecte sur G par composition avec la surjection de $k[\delta]/(\delta^2)$ sur k ; d'après l'exemple 1, cette surjection p est un morphisme de groupes. On vérifie en outre que $p(e_g + \delta X) = g$.

Réciproquement, soit u un élément de TG. Alors, en posant $g = p(u)$, on a, pour une $X : A \to k$, k-linéaire :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccl} A & \to & k[\delta]/(\delta^2) \\ f & \mapsto & f(g) + \delta X(f) \end{array} \right.$$

L'égalité $u\left(f\tilde{f}\right) = u(f)u\left(\tilde{f}\right)$ montre alors que X est une dérivation en g, soit $X \in T_gG$.

On a donc prouvé :

Proposition 3. *Le fibré tangent* TG *est l'ensemble des* $e_g + \delta X$*, où* g *appartient à* g*, et* X *appartient à l'espace tangent* T_gG*. Un tel élément sera également noté* $e_g^{\delta X}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$ s'injecte naturellement dans TG par $x \mapsto e_e^{\delta x}$; il s'agit en outre d'un morphisme de groupes, en considérant le groupe abélien sous-jacent à $\mathfrak{g}$.

Proposition 4. *On a un produit semi-direct :*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow TG \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

La structure de l'espace tangent se déduit donc immédiatement de celle de l'algèbre de Lie, et réciproquement. On peut par exemple utiliser le fibré tangent pour déterminer l'algèbre de Lie de $GL(V)$.

10.3. **L'espace tangent** $TGL(V)$**.**

Proposition 5. *Soit* V *un* k*-espace vectoriel de dimension finie et* B *une* k*-algèbre. Alors :*

$$Hom_{k-alg}(k[V], B) = V \otimes_k B$$

Démonstration. On a en effet une injection

$$\begin{array}{ccc} B \otimes V & \stackrel{\Phi}{\to} & Hom(k[V], B) \\ b \otimes v & \mapsto & (X \in V^\star \mapsto b < X, v >) \end{array}$$

L'égalité des dimensions permet de conclure que Φ est un isomorphisme. En outre, Φ commute aux polynômes dans le sens suivant : si p appartient à $k[V]$ et u appartient à V, alors

$$p(u) = \Phi(u)(p)$$

□

En remplaçant V par l'espace vectoriel $\mathcal{L}(V)$, on a :

Proposition 6. *Il existe un isomorphisme, conservant les polynômes, réalisant*

$$Hom_{k-alg}(k[\mathcal{L}(V)], B) = \mathcal{L}_k(V) \otimes_k B = \mathcal{L}_B(V \otimes_k B)$$

En remplaçant cette fois $\mathcal{L}_k(V)$ par $\mathcal{L}_k(V) \oplus k$, on obtient un isomorphisme entre $Hom_{k-alg}(k[\mathcal{L}_k(V) \oplus k], B)$ et $\mathcal{L}_B(V \otimes_k B) \oplus B$. On identifie alors $GL_k(V)$ et $GL_B(V \otimes B)$ à des fermés de $\mathcal{L}_k(V) \oplus k$ et $\mathcal{L}_B(V \otimes B) \oplus B$ respectivement, soit

$$GL(V) = \{(u, x) \in \mathcal{L}(V) \times k / \det u.x - 1 = 0\}$$

En remplaçant B par $k[\delta]/(\delta^2)$, on obtient, l'isomorphisme précédent conservant les polynômes :

$$TGL(V) = \mathcal{L}_{k[\delta]/(\delta^2)}(V \otimes_k k[\delta]/(\delta^2))$$

Par conséquent, $TGL(V)$ est le sous-groupe des matrices de $GL_k(V \oplus \delta V)$ commutant à la multiplication par δ, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; c'est donc l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ a & g \end{pmatrix}$$

où g appartient à $GL(V)$ et a appartient à $\mathcal{L}(V)$.

On peut appliquer la même méthode pour déterminer $TSL(V)$.

11. Représentation adjointe

11.1. Différentielles élémentaires. Soient G un groupe algébrique, $\mu : G \times G \to G$ la multiplication, $i : G \to G$ l'inversion et e le neutre de G.

Si f appartient à $k[G]$, on écrit

$$\mu^\star f = \sum f_i \otimes g_i, \text{ où } f(xy) = \sum f_i(x) g_i(y)$$

Si à présent (x, y) appartient à $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = T_{(e,e)} G \times G$, alors $d_{(e,e)}\mu(x, y) = z$ où

$$z(f) = (x, y)\Big(\sum f_i \otimes g_i\Big) = \sum x(f_i) g_i(e) + \sum f_i(e) y(g_i)$$

Or :$\sum f_i(e) g_i = \sum f_i g_i(e) = f$, d'où $z = x + y$.

Pour calculer la différentielle de l'inversion i, on utilise le diagramme :

$$G \xrightarrow{(1,i)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

La composée des deux flèches étant la flèche constante e, il vient par passage aux différentielles : $d_e i(x) = -x$.

On a donc prouvé :

Proposition 7. *Si G est un groupe algébrique, $\mu : G \times G \to G$ est la multiplication et $i : G \to G$ est l'inversion, alors*

1. *La différentielle en (e, e) de la multiplication est la somme :*

$$d_{(e,e)}\mu : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \right.$$

2. *La différentielle en e de l'inversion est*

$$d_e i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \right.$$

Proposition 8. *On appelle $Int(g)$ l'automorphisme intérieur associé à g et $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ sa différentielle. On note en outre $\gamma_g : h \mapsto g h^{-1} g^{-1}$ le morphisme (de variétés) commutateur associé à g. Alors : $d_e \gamma_g(X) = (1 - Ad(g))(X)$*

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\gamma_g = \mu \circ (1, (Intg) \circ i)$$

et de différencier les compositions de flèches. □

11.2. L'algèbre de Lie de $GL(V)$. En prenant le noyau du morphisme $\delta \mapsto 0$ dans $TGL(V)$, on obtient :

Proposition 9. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ est l'algèbre des matrices $\mathcal{L}(V)$, munie du crochet ordinaire $[X, Y] = XY - YX$, où XY est le produit matriciel de X et Y.*

On remarque que les polynômes sur $GL(V)$ sont engendrés par $T_{1,n}, \ldots, T_{n,n}, D$, avec la relation $\det(T_{i,j})D = 1$.

Il suffit donc de connaître l'action d'une matrice X sur les polynômes $T_{i,j}$ pour connaître la dérivation associée dans $T_e GL(V)$; or on a directement $X(T_{i,j}) = X_{i,j}$.

Pour déterminer le crochet de $\mathfrak{gl}$, on passe par l'algèbre associative sur $GL(V)$. La comultiplication sur $k[GL(V)]$ s'écrit

$$\mu^\star : T_{i,j} \mapsto \sum_{h=1}^{n} T_{i,h} \otimes T_{h,k}$$

Le produit associatif étant défini par $X \cdot Y = (X \otimes Y) \circ \mu^\star$, il vient $X \cdot Y = XY$, puis $[X, Y] = XY - YX$.

11.3. **La représentation adjointe.**

Proposition 10. *Soit g un élément de G. Alors, la différentielle de l'automorphisme intérieur $int(g)$ est un automorphisme $Ad(g)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et Ad est une représentation linéaire de G dans $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Ceci provient directement de la fonctorialité de la différentielle. □

Définition 11. *Ad est appelée* représentation adjointe *de G.*

Proposition 11. *La différentielle ad de Ad est*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X & \mapsto & [X, \cdot] \end{array}$$

On présente ici deux preuves de cette proposition. Voici d'abord une preuve utilisant dans le groupe fibré tangent.

Démonstration.

Remarque 3. *Étant donné un morphisme $f : G \to G'$ de groupes algébriques , on peut étendre f en un morphisme $f : TG \to TG'$ en posant*

$$f\left(e_g^{\delta X}\right) = e_{f(g)}^{\delta d_g f(X)}$$

On travaille dans le produit direct

$$TG \times TG = Hom_{k-alg}\left(k[G], k[\delta]/\left(\delta^2\right) \otimes k[\delta']/\left(\delta'^2\right)\right)$$

où $k[\delta]/\left(\delta^2\right) \otimes k[\delta']/\left(\delta'^2\right) = k[\delta, \delta']/\left(\delta^2, \delta'^2, \delta\delta' - \delta'\delta\right)$

Par définition de Ad : pour $g \in G$ et $Y \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{array}{rcl} Int\left(e^{\delta X}\right)\left(e^{\delta' Y}\right) & = & e^{\delta' Ad\left(e^{\delta X}\right)(Y)} \\ & = & e^{\delta' e^{\delta d Ad(X)}(Y)} \\ & = & e^{\delta'(Y + \delta d Ad(X)(Y))} \end{array}$$

Or, d'après les valeurs des différentielles au neutre de la multiplication et de l'inversion et le plongement de $\mathfrak{g}$ dans TG, il vient

$$Int\left(e^{\delta X}\right)\left(e^{\delta' Y}\right) = e^{\delta X} e^{\delta' Y} e^{-\delta X}$$

d'où successivement

$$\begin{array}{rcl} Int\left(e^{\delta X}\right)\left(e^{\delta' Y}\right) & = & (e + \delta X + \delta' Y + \delta\delta' X \cdot Y)\left(e^{-\delta X}\right) \\ & = & e + \delta X + \delta' Y + \delta\delta' X \cdot Y - \delta X - \delta\delta' Y \cdot X \\ & = & e^{\delta'(Y + \delta(X \cdot Y - Y \cdot X))} \end{array}$$

Par conséquent :

$$dAd(X)(Y) = ad(X)(Y) = [X, Y]$$

□

La deuxième preuve fait intervenir le théorème de plongement, vu lors de l'exposé de Joël Bellaïche :

Théorème 4. *Tout groupe affine est un sous-groupe fermé de $GL_n(k)$.*

Démonstration. On traite d'abord le cas de $G = GL_n$: si g appartient à G, alors $Ad(g)$ est l'image de g par la composée

$$G \xrightarrow{(1,i)} G \times G \xrightarrow{(\sigma,\tau)} GL(\mathfrak{g}) \times GL(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mu} GL(\mathfrak{g})$$

où $\sigma(g)$(respectivement $\tau(g)$) est l'opération de multiplication à gauche(respectivement à droite) par $g \in GL_n$ dans $\mathfrak{g} = k^{n \times n}$.

On peut expliciter σ en tant que morphisme de variétés $G \to GL(\mathfrak{g})$: la base standard de $\mathfrak{g}$ est constituée dea matrices $e_{i,j}$, ayant un 1 en (i, j) et des 0 ailleurs. On a alors : $(ge_{i,j})_{l,m} = g_{i,l}$ si $m = j$. Par conséquent, la matrice de g dans GL_{n^2} se divise en $n \times n$ blocs, le (l, m)-ème bloc étant constitué de la la l-ème colonne de g, placée en position m. Par conséquent, $d\sigma(x)$ est la multiplication à gauche par x dans $\mathfrak{g}$.

Il vient finalement, en composant les différentielles :

$$dAd(X)(Y) = [X,Y]$$

Dans le cas général : un groupe affine G étant un sous-groupe fermé de GL_n, la différentielle dans G s'identifie à la restriction de la différentielle dans GL_n, d'où le résultat.

□ En particulier, on remarque que le noyau de ad est inclus dans le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

Exercice 3. *En caractéristique nulle, on a même l'égalité* $\ker ad = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

11.4. **Applications aux sous-groupes et sous-algèbres de Lie.**

Corollaire 1. *Soit H un sous-groupe distingué fermé de G. Alors $\mathfrak{h}h$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. H étant distingué dans G, les $Int(g), g \in G$ stabilisent H ; par conséquent, leurs différentielles $Ad(g)$ stabilisent $\mathfrak{h}$. En étendant une base de $\mathfrak{h}h$ en une base de $\mathfrak{g}$, la matrice de $Ad(g)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$$

Pour X appartenant à $\mathfrak{g}$, la matrice de adX est donc de cette même forme ; elle stabilise donc $\mathfrak{h}h$. □

Corollaire 2. *Soit H un sous-groupe fermé de G, N son normalisateur dans H. Alors $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

Exercice 4. *En outre, si k est de caractéristique nulle, alors on a l'égalité*

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le résultat précédent au sous-groupe distingué H de N. □

Proposition 12. *Soient A, B deux sous-groupes fermés de G, et C l'adhérence dans G du sous-groupe $[A,B]$ engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$ où a appartient à A et b appartient à B. Alors $\mathfrak{c}$ contient tous les éléments de la forme*

$$Y - Ad(g)(Y), \quad X - Ad(h)(X), \quad [X,Y]$$

pour $g \in A, X \in \mathfrak{a}, h \in B, Y \in \mathfrak{b}$.

Démonstration. Pour g élément de A, γ_g est une application de B dans C, donc sa différentielle $1 - Ad(g)$ envoie $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{c}$, puis $Y - Ad(g)(Y)$ appartient à $\mathfrak{c}$; on obtient de même le résultat pour les $X - Ad(h)(X)$.

Soit maintenant le morphisme de variétés

$$\varphi : \begin{cases} B & \to & \mathfrak{c} \\ h & \mapsto & X - Ad(h)(X) \end{cases}$$

Puisque $\varphi(e) = 0$, on a $d_e\varphi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{c}$; $dAd = ad$ montre alors que $-d_e\varphi(Y) = [X,Y]$ appartient à $\mathfrak{c}$. □

Corollaire 3. *Soit H l'adhérence du groupe dérivé $DG = [G,G]$. Alors $\mathfrak{h}$ contient le sous-espace* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

On a en fait l'égalité $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ dès que k est de caractéristique nulle.

Proposition 13. *Soit g un élément de G ; alors l'algèbre de Lie $Lie(Z_G(g))$ est incluse dans le* centralisateur infinitésimal $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(g) = \{X \in \mathfrak{g} | Ad(g)(X) = X\}$ *; en outre, il y a égalité dès que $G = GL_n$.*

Démonstration. Le centralisateur $Z_g(g)$ est égal à $\gamma_g^{-1}(e)$; par conséquent, $d_e\gamma_g = 1 - Ad(g)$ montre l'inclusion.

Dans le cas où $G = GL_n$, les points fixes de $1 - Ad(g)$ sont les matrices X commutant avec G, et le centralisateur $Z_G(g)$ en est un ouvert principal ; par conséquent, les dimensions sont les mêmes, d'où l'égalité.
□