# Opérations sur la $K$-théorie algébrique et régulateurs *via* la théorie homotopique des schémas

Joël Riou

*Institut de mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 – Denis Diderot, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par ££££££

**Résumé**

Dans cette note, on utilise la théorie homotopique des schémas au-dessus des schémas réguliers pour réduire la construction des opérations sur la $K$-théorie algébrique et des régulateurs aux cas classiques : groupes $K_0$ et groupes de Chow. *Pour citer cet article : J. Riou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ? ? ? ( ? ? ? ?).*

**Abstract**

**Operations on algebraic $K$-theory and regulators *via* the $\mathbf{A}^1$-homotopy theory.** In this note, we use the $\mathbf{A}^1$-homotopy theory over regular schemes to reduce the construction of operations on algebraic $K$-theory and regulators to the classical case : $K_0$-groups and Chow groups. *To cite this article: J. Riou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (????).*

## Abridged English version

Let $S$ be a (noetherian separated) regular scheme. We let $\mathrm{Sm}/S$ be the category of separated smooth $S$-schemes of finite type. F. Morel and V. Voevodsky defined the $\mathbf{A}^1$-homotopy category $\mathcal{H}(S)$ in [10] and proved that for any $X \in \mathrm{Sm}/S$ and $n \in \mathbf{N}$, there exists a natural bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}) \simeq K_n(X) \ ,$$

where $\mathbf{Gr}$ is the infinite Grassmannian and $K_n(X)$ the $n$th higher algebraic $K$-group defined by D. Quillen in [11]. In the following theorem, we consider $K_0(-)$ as a presheaf of sets on $\mathrm{Sm}/S$:

*Email address:* `joel.riou@normalesup.org` (Joël Riou).

**Theorem 0.1** *Let $S$ be a regular scheme. There are canonical bijections:*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}(S)}(\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Sets}}(K_0(-)) \xrightarrow{\sim} \prod_{n\in\mathbf{Z}} \lim_{(d,r)\in\mathbf{N}^2} K_0(\mathbf{Gr}_{d,r}) \simeq \prod_{n\in\mathbf{Z}} K_0(S)[[c_1,c_2,\dots]]\ .$$

**Corollary 0.2** *Let $S$ be a regular scheme. Let $\tau\colon K_0(-)\to K_0(-)$ be a morphism of presheaves of pointed sets on $\mathrm{Sm}/S$. Then, $\tau$ naturally induces maps $K_n(X)\to K_n(X)$ for all $X\in\mathrm{Sm}/S$ and $n\in\mathbf{N}$.*

The theorem 0.1 generalises to operations with several variables, providing the following corollary:

**Corollary 0.3** *Let $S$ be a regular scheme. The object $\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ is endowed with the structure of a special $\lambda$-ring inside the category $\mathcal{H}(S)$.*

We prove that these structures on $\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ arising from the classical ones on $K_0(-)$ induce the same maps on $K_\star(-)$ as the other known constructions (see [6], [7], [8], [13], [15]).

It is possible to pursue this study in the stable homotopy category $\mathcal{SH}(S)$ of $\mathbf{P}^1$-spectra (see [4]). The object $\mathbf{BGL}$ representing algebraic $K$-theory in that category is constructed in [14, §6.2]. The method used above gives tools to compute the endomorphism ring of $\mathbf{BGL}$ in $\mathcal{SH}(S)$. The $\mathbf{Q}$-localised version of this computation leads to the following theorem:

**Theorem 0.4** *Let $S$ be a regular scheme. There exists a canonical decomposition in $\mathcal{SH}(S)$ of the $\mathbf{Q}$-localisation $\mathbf{BGL}_{\mathbf{Q}}$ of $\mathbf{BGL}$ :*

$$\mathbf{BGL}_{\mathbf{Q}} = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathbf{H}_{\mathrm{B}}^{(i)}\ ,$$

*where, for any $k\in\mathbf{Z}-\{0\}$, the Adams operation $\Psi^k$ acts on $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}^{(i)}$ by multiplication par $k^i$.*

Likewise, if $k$ is a perfect field, we can compute the set of morphisms from $\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ to motivic Eilenberg-MacLane spaces (defined in [14, pages 596-597]) in $\mathcal{H}(k)$ and from $\mathbf{BGL}$ to motivic Eilenberg-MacLane spectra in $\mathcal{SH}(k)$.

## Introduction

Cette note est consacrée aux résultats de la thèse de l'auteur [12]. Dans [1], le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels sur un schéma est introduit et est muni de diverses structures, homologues à celles que l'on peut aussi construire en $K$-théorie topologique. D. Quillen a défini par la suite des groupes de $K$-théorie algébrique supérieure (cf. [11]), faisant de cette famille de groupes une théorie cohomologique sur les schémas. Utilisant diverses méthodes, plusieurs auteurs ont étendu les structures algébriques sur les groupes $K_0$ (produits, $\lambda$-opérations, opérations d'Adams) sur les groupes de $K$-théorie algébrique supérieure (voir notamment [6], [7], [8], [13], [15]). On se propose ici de montrer comment la théorie homotopique des schémas (cf. [10] et [14]) fournit un cadre pour étudier les opérations sur la $K$-théorie algébrique de façon unifiée, pourvu que l'on se limite aux schémas réguliers. Le slogan est que pour définir des opérations $K_n(X)\to K_n(X)$ pour tout schéma régulier $X$ et tout entier naturel $n$, il suffit de se donner des applications $K_0(X)\to K_0(X)$ fonctorielles en $X$.

## 1. Endomorphismes de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}$

Soit $S$ un schéma régulier (on entend par là que $S$ est noethérien, séparé et que ses anneaux locaux sont réguliers). Dans [10], F. Morel et V. Voevodsky ont défini la catégorie homotopique de $S$, notée $\mathcal{H}(S)$ (ainsi qu'une version pointée $\mathcal{H}_\bullet(S)$). On note $\mathrm{Sm}/S$ la catégorie des schémas lisses, de type fini et séparés sur $S$. Le résultat sur lequel s'appuie ce travail est le suivant :

**Théorème 1.1 (Morel-Voevodsky, [10, theorem 3.13, page 140])** *Soit $S$ un schéma régulier. Pour tout entier naturel $n$, il existe une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}) \simeq K_n(X)$$

*fonctorielle en $X \in \mathrm{Sm}/S$.*

L'objet $\mathbf{Gr}$ désigne la grassmannienne infinie, colimite des espaces $\mathbf{Gr}_{d,r}$ pour $(d,r) \in \mathbf{N}^2$, où $\mathbf{Gr}_{d,r} \in \mathrm{Sm}/S$ est la grassmannienne des $d$-plans dans le fibré vectoriel trivial $\varepsilon^{d+r}$ de rang $d+r$. On note $\mathcal{M}'_{d,r} \subset \varepsilon^{d+r}$ le fibré vectoriel tautologique de rang $d$ sur $\mathbf{Gr}_{d,r}$ et on pose $u_{d,r} = [\mathcal{M}'_{d,r}] - d \in K_0(\mathbf{Gr}_{d,r})$ ; ces classes forment un système compatible quand les entiers $d$ et $r$ varient.

Le résultat principal est le suivant :

**Théorème 1.2** *Soit $S$ un schéma régulier. On note $K_0(-)$ le préfaisceau d'ensembles sur $\mathrm{Sm}/S$ qui à $X$ associe $K_0(X)$. L'application suivante est bijective :*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}(S)}(\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)) \ ,$$

*où $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ désigne la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathrm{Sm}/S$. De plus, ces ensembles d'endomorphismes s'identifient à*

$$\prod_{n \in \mathbf{Z}} \lim_{(d,r) \in \mathbf{N}^2} K_0(\mathbf{Gr}_{d,r}) \simeq \prod_{n \in \mathbf{Z}} K_0(S)[[c_1, c_2, \dots]] \ ,$$

*où $c_k$ correspond à la famille compatible de classes $\gamma^k(u_{d,r}) \in K_0(\mathbf{Gr}_{d,r})$.*

La démonstration utilise la suite exacte de Milnor (cf. [3, chapter VI, proposition 2.15]), l'astuce de Jouanolou (cf. [5]) et le calcul de la $K$-théorie algébrique des grassmanniennes (cf. [1, exposé VI, §4]).

**Corollaire 1.3** *Soit $S$ un schéma régulier. Soit $\tau \colon K_0(-) \to K_0(-)$ un morphisme de préfaisceaux d'ensembles sur $\mathrm{Sm}/S$ tel que $\tau(0) = 0 \in K_0(S)$. Alors, $\tau$ induit naturellement des applications $K_n(X) \to K_n(X)$ fonctorielles en $X \in \mathrm{Sm}/S$ pour tout entier naturel $n$.*

En effet, $\tau$ correspond à un unique morphisme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ qui induit les applications voulues en vertu du théorème 1.1.

On peut généraliser le théorème 1.2 en plusieurs variables :

**Théorème 1.4** *Soit $S$ un schéma régulier. Pour tout entier naturel $k$, on a une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(S)}((\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr})^k, \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)^k, K_0(-)) \ .$$

Par conséquent, toute structure algébrique sur $K_0(X)$ et fonctorielle en $X \in \mathrm{Sm}/S$ se relève de manière unique sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}$ à l'intérieur de la catégorie $\mathcal{H}(S)$.

**Corollaire 1.5** *Soit $S$ un schéma régulier. L'objet $\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}$ est naturellement muni d'une structure de $\lambda$-anneau spécial dans la catégorie $\mathcal{H}(S)$.*

On obtient par exemple les opérations $\lambda^i\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ pour $i\geq 1$ et les opérations d'Adams $\Psi^k\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ pour $k\in\mathbf{Z}$ ; elles induisent des applications $K_n(X)\to K_n(X)$ pour $X\in\mathrm{Sm}/S$ et $n\in\mathbf{N}$. Le produit sur les groupes $K_0(-)$ donne un accouplement $(\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr})\times(\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr})\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ dans $\mathcal{H}(S)$. On peut le raffiner, comme dans [9, page 74] en un morphisme $(\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr})\wedge(\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr})\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$, ce qui permet d'obtenir une structure multiplicative $K_i(X)\times K_j(X)\to K_{i+j}(X)$ pour $X\in\mathrm{Sm}/S$ et $(i,j)\in\mathbf{N}^2$. On peut vérifier que ces applications coïncident avec celles construires antérieurement. Dans le cas des opérations en une seule variable, la comparaison de cette construction avec celle de [13] repose sur la construction d'un morphisme de $\lambda$-anneaux (spéciaux) $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}}\,\mathrm{GL}\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(S)}(\mathbf{Gr},\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr})$.

*Remarque 1 Les résultats de cette section ont leurs homologues en $K$-théorie topologique complexe, les versions algébriques et topologiques étant compatibles* via *le foncteur « points complexes » $\mathcal{H}(\mathbf{C})\to\mathcal{H}^{\mathrm{top}}$ où $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes et $\mathcal{H}^{\mathrm{top}}$ la catégorie homotopique usuelle.*

## 2. Stabilisation

Le théorème 1.2 s'intéressait à toutes les opérations « ensemblistes » $K_0(-)\to K_0(-)$. La proposition suivante étudie les opérations additives, autrement dit les endomorphismes de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ en tant qu'objet groupe dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ :

**Proposition 2.1 (Principe de scindage)** *Soit $S$ un schéma régulier. Les applications évidentes suivantes sont bijectives :*

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-))\overset{\sim}{\to}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\mathrm{Pic}(-),K_0(-))\overset{\sim}{\to}K_0(S)[[U]]\ .$$

L'application se gauche est induite par le morphisme de préfaisceaux d'ensembles $\mathrm{Pic}(-)\to K_0(-)$ qui à la classe d'isomorphisme d'un fibré en droites $L$ fait correspondre $[L]$. L'application de droite associe à $\tau\colon\ \mathrm{Pic}(-)\to K_0(-)$ la famille compatible des $\tau([\mathcal{O}(1)])\in K_0(\mathbf{P}^n)\simeq K_0(S)[U]/(U^{n+1})$ où $U=[\mathcal{O}(1)]-1\in K_0(\mathbf{P}^n)$. On munit $K_0(S)[[U]]$ de la topologie pro-discrète évidente. L'opération d'Adams $\Psi^k\colon K_0(-)\to K_0(-)$ (pour $k\in\mathbf{Z}$) correspond à la série $(1+U)^k\in K_0(S)[[U]]$.

On note $\sigma\colon \mathbf{P}^1\wedge(\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr})\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ le morphisme dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ induit par la multiplication par $u=[\mathcal{O}(1)]-1\in K_0(\mathbf{P}^1)$. Le théorème du fibré projectif implique que le morphisme $\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}\to\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbf{P}^1,\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr})$ déduit par adjonction de $\sigma$ est un isomorphisme dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$. Il en résulte, comme indiqué dans [14, §6.2], que dans la catégorie homotopique stable des $\mathbf{P}^1$-spectres (cf. [4]), on peut construire un objet $\mathbf{BGL}$ représenté par un $\Omega$-spectre tel qu'on ait des isomorphismes $\mathbf{BGL}_n\simeq\mathbf{Z}\times\mathbf{Gr}$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ pour tout entier naturel $n$ et que les morphismes d'assemblage $\mathbf{P}^1\wedge\mathbf{BGL}_n\to\mathbf{BGL}_{n+1}$ s'identifient à $\sigma$ *via* ces isomorphismes.

**Définition** 2.2 *Soit $f\colon\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ un morphisme dans $\mathcal{SH}(S)$ entre spectres représentés par des $\Omega$-spectres. Le morphisme $f$ est stablement fantôme si pour tout entier naturel $n$, le morphisme induit $\mathbf{E}_n\to\mathbf{F}_n$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ est nul.*

L'objet $\mathbf{BGL}$ n'est *a priori* pas bien défini à isomorphisme *unique* près : ces isomorphismes ne sont uniques que *modulo* les morphismes stablement fantômes. Nous verrons plus bas comment résoudre cette difficulté technique.

**Définition** 2.3 *Soit $A$ un groupe abélien. On définit une application $\Omega_{\mathbf{P}^1}\colon A[[U]]\to A[[U]]$ par la formule $\Omega_{\mathbf{P}^1}(f)=(1+U)\frac{df}{dU}$ et un système projectif $A^\Omega$ indexé par $\mathbf{N}$ :*

$$\dots\xrightarrow{\Omega_{\mathbf{P}^1}}A[[U]]\xrightarrow{\Omega_{\mathbf{P}^1}}A[[U]]\xrightarrow{\Omega_{\mathbf{P}^1}}A[[U]]\xrightarrow{\Omega_{\mathbf{P}^1}}A[[U]]\ .$$

Un endomorphisme $\tau$ de **BGL** dans $\mathcal{SH}(S)$ induit une famille de morphismes $\tau_n\colon \mathbf{BGL}_n \to \mathbf{BGL}_n$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ pour $n \in \mathbf{N}$. On peut identifier $\tau_n$ à un morphisme $\tau_n\colon \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}$. La catégorie $\mathcal{SH}(S)$ étant additive, $\tau_n$ correspond à une opération additive $K_0(-) \to K_0(-)$, c'est-à-dire à un élément de $K_0(S)[[U]]$ d'après la proposition 2.1. On peut vérifier que la compatibilité de $\tau$ avec les morphismes d'assemblage signifie que $\Omega_{\mathbf{P}^1}(\tau_{n+1}) = \tau_n$ pour tout entier naturel $n$. On a ainsi défini un morphisme

$$\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}) \to \lim K_0(S)^\Omega \ .$$

**Théorème 2.4** *Soit $S$ un schéma régulier. Il existe une suite exacte courte :*

$$0 \to \mathrm{R}^1 \lim K_1(S)^\Omega \to \mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}) \to \lim K_0(S)^\Omega \to 0 \ .$$

Le noyau de cette suite exacte fait intervenir le premier foncteur dérivé à droite $\mathrm{R}^1 \lim$ du foncteur « limite projective ». Les éléments de ce noyau sont les morphismes stablement fantômes. J'ignore si ce groupe $\mathrm{R}^1 \lim A^\Omega$ est nul pour tout groupe abélien $A$ ; c'est cependant le cas si $A$ est fini ou divisible. En particulier, puisque $K_1(\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z})$ est fini, il n'y a pas de morphisme stablement fantôme non nul $\mathbf{BGL} \to \mathbf{BGL}$ dans $\mathcal{SH}(\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z})$. Ainsi, **BGL** est bien défini à isomorphisme unique près dans $\mathcal{SH}(\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z})$. On peut définir un objet **BGL** canonique dans $\mathcal{SH}(S)$ pour tout schéma de base régulier $S$ par changement de base *via* le morphisme $S \to \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$.

On peut établir les mêmes résultats pour la version **Q**-localisée $\mathbf{BGL}_\mathbf{Q}$ de **BGL** : on a un isomorphisme

$$\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \lim \left(K_0(S) \otimes \mathbf{Q}\right)^\Omega \ .$$

**Définition** 2.5 *Soit $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$. On note $\Psi^k = (1, \frac{1}{k}(1+U)^k, \frac{1}{k^2}(1+U)^k, \dots) \in \lim \mathbf{Q}^\Omega$.*

Les opérations d'Adams agissent donc sur $\mathbf{BGL}_\mathbf{Q}$ dans $\mathcal{SH}(S)$. On peut en fait calculer complètement $\lim \mathbf{Q}^\Omega$ :

**Proposition 2.6** *Il existe un unique isomorphisme d'anneaux topologiques*

$$\Sigma\colon \mathbf{Q}^\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \lim \mathbf{Q}^\Omega$$

*tel que pour tout $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, on ait $\Sigma((k^n)_{n\in\mathbf{Z}}) = \Psi^k$.*

Cette proposition permet d'obtenir le théorème suivant :

**Théorème 2.7** *Soit $S$ un schéma régulier. Il existe une décomposition canonique dans $\mathcal{SH}(S)$ :*

$$\mathbf{BGL}_\mathbf{Q} = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathbf{H}_{\text{Б}}^{(i)} \ ,$$

*où, pour tout entier $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, l'opération d'Adams $\Psi^k$ agit sur $\mathbf{H}_{\text{Б}}^{(i)}$ par multiplication par $k^i$.*

## 3. Régulateurs

La méthode de démonstration du théorème 1.2 permet de calculer de façon similaire les morphismes $\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr} \to E$ pour un objet $E \in \mathcal{H}(S)$ assez général. On obtient par exemple :

**Théorème 3.1** *Soit $k$ un corps parfait. Soit $n$ un entier naturel. On note $K(\mathbf{Z}(n), 2n)$ l'espace d'Eilenberg-MacLane motivique défini dans [14, pages 596–597]. Il existe une bijection canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}, K(\mathbf{Z}(n), 2n)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-), CH^n(-)) \ .$$

*De plus, les transformations naturelles $K_0(-) \to CH^n(-)$ sont les polynômes homogènes de degré total $n$ en les classes de Chern.*

Comme précédemment, on peut étudier les morphismes de $\mathbf{BGL}$ vers les spectres d'Eilenberg-MacLane motiviques $\mathbf{H}_A$ (et leurs translatés) dans $\mathcal{SH}(k)$ pour tout groupe abélien $A$. On obtient ainsi le caractère de Chern $\mathrm{ch}\colon \mathbf{BGL} \to \mathbf{H}_{\mathbf{Q}}$ et le calcul montre qu'il existe des morphismes stablement fantômes non nuls $\mathbf{BGL} \to \mathbf{H}_{\mathbf{Z}}[1]$ dans $\mathcal{SH}(k)$.

*Remarque 2 On pourrait remplacer la cohomologie motivique, représentée par $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}$, par une théorie cohomologique orientée plus générale, pourvu que celle-ci soit représentée par un objet de $\mathcal{SH}(k)$ ; on peut donc obtenir des caractères de Chern comme dans [2].*


### Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, Bruno Kahn, et toutes les autres personnes ayant eu quelque influence positive sur ma thèse.


### Références


[1] Pierre Berthelot, Alexander Grothendieck, Luc Illusie. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (1966-1967). Lecture Notes in Mathematics 225 (1971). Springer.

[2] Henri Gillet. Riemann-Roch theorems for higher algebraic $K$-theory. Advances in Mathematics 40 (1981), n°3, pages 203–289.

[3] Paul G. Goerss, John F. Jardine. Simplicial homotopy theory. Progress in Mathematics 174 (1999). Birkhaüser.

[4] John F. Jardine. Motivic symmetric spectra. Documenta Mathematica 5 (2000), pages 445–552.

[5] Jean-Pierre Jouanolou. Une suite exacte de Mayer-Vietoris en $K$-théorie algébrique *in* Hyman Bass (éd.). Higher $K$-theories. Volume I. Lecture Notes in mathematics 341 (1973), pages 293–316. Springer.

[6] Florence Lecomte. Simplicial schemes and Adams operations *in* Algebraic $K$-theory ans its applications (Trieste, 1997), pages 437–449. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999.

[7] Marc Levine. Lambda-operations, $K$-theory and motivic cohomology. Fields Institure Communications, volume 16 (1997), pages 131–184.

[8] Jean-Louis Loday. $K$-théorie algébrique et représentations de groupes. Annales Scientifiques de l'École normale supérieure (quatrième série) 9 (1976), n°3, pages 309–377.

[9] Fabien Morel. Théorie homotopique des schémas. Astérisque 256 (1999). Société Mathématique de France.

[10] Fabien Morel, Vladimir Voevodsky. $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 90 (1999), pages 45–143.

[11] Daniel G. Quillen. Higher Algebraic $K$-theory I *in* Hyman Bass (éd.). Higher $K$-theories. Volume I. Lecture Notes in mathematics 341 (1973), pages 85–147. Springer.

[12] Joël Riou. Opérations sur la $K$-théorie algébrique et régulateurs *via* la théorie homotopique des schémas. Thèse de l'Université Paris 7 – Denis Diderot, Juillet 2006. `http://www.institut.math.jussieu.fr/theses/2006/riou/these-riou.pdf`.

[13] Christophe Soulé. Opérations en $K$-théorie algébrique. Canadian Journal of Mathematics 37 (1985), pages 488–550.

[14] Vladimir Voevodsky. $\mathbf{A}^1$-homotopy theory *in* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin), Volume I, pages 579–604. Documenta Mathematica (1998). Extra Volume I.

[15] Friedhelm Waldhausen. Algebraic $K$-theory of spaces *in* Andrew Ranicki, Norman Levitt, Frank Quinn (éd.). Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N. J., 1983). Lecture Notes in mathematics 1126 (1985), pages 318–419. Springer.