ÉNONCÉS D'ORAUX - JOËL RIOU - JUIN/JUILLET 1999

1 Oraux de l'X

1.1 *Mathématiques I* 50 minutes

1.1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I_m$

$\star$ Montrer que m est pair. $(m = 2n)$

Démonstration $\det A^2 = \det(-I_m) = (-1)^m = (\det A)^2 \in \mathbb{R}_+$, donc m est pair.

$\star$ Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration Le polynôme $X^2 + 1 = (X - \imath)(X + \imath)$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{C}$. Donc A est diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$. Les multiplicités de $\imath$ et $-\imath$ qui sont conjuguées sont égales à n car le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels. Notons $(Z_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ une $\mathbb{C}$-base de l'espace propre associé à la valeur propre $\imath$. A étant à coefficients réels, $\left(\overline{Z_j}\right)$ est une base de l'espace propre associé à la valeur propre $-\imath$.

On peut décomposer Z_j en $Z_j = X_j + \imath Y_j$ avec $(X_j, Y_j) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. En utilisant le fait que $AZ_j = \imath Z_j$ et que $A\overline{Z_j} = -\imath \overline{Z_j}$, on obtient :

$$AX_j = -Y_j \qquad AY_j = X_j$$

On pose $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$. Comme le rang $\left(Z_j, \overline{Z_j}\right)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est $m = 2n$, et que cette famille est engendrée par $\mathcal{B}$, il vient que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On peut alors affirmer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$\star$ Montrer que A est semblable à $R = \begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration Il suffit de remarquer que $R^2 = -I_m$. Par la question précédente, A et R sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

$\star$ Si, de plus, $A \in \mathcal{O}(m)$, montrer que A est orthogonalement semblable à R.

Démonstration On peut mettre en place un démarche récurrente. Tant que la dimension de l'espace est non nulle, on peut prendre un vecteur X de norme 1 quelconque. On pose $Y = AX$, comme A est une isométrie, $\|Y\| = 1$. De plus, par *conservation* du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \langle AX, AY \rangle = \langle Y, -X \rangle = -\langle X, Y \rangle$. D'où $\langle X, Y \rangle = 0$. L'espace $H = \mathrm{Vect}(X, Y)$ est stable par A. (X, Y) est une base orthonormale de H dans laquelle l'induit de A admet B pour matrice. H est stable par A. Comme A est inversible, H est stable par $A^{-1} = A^\star$. Donc $H^\perp$ est stable par A. L'induit de A à $H^\perp$ vérifie les hypothèses, d'où le résultat par récurrence descendante.

1.1.2

On définit $\tau(m) = \mathrm{Card}\{\, d \in \mathbb{N}^\star \,/\, d|m \,\}$

$\star$ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \sum_{j=1}^{n} \tau(j) = \sum_{j=1}^{n} E\left(\frac{n}{j}\right)$$

Démonstration Le membre de gauche s'interprète ainsi :

$$\sum_{m=1}^{n} \tau(m) = \mathrm{Card}\Big\{\, (d,m) \in [\![1,n]\!]^2 \,/\, d|m \,\Big\}$$

On peut partitionner cet ensemble suivant la valeur de $d \in [\![1,n]\!]$. Pour chaque d, on obtient le nombre de multiples de d compris entre 1 et n, c'est-à-dire $E\left(\frac{n}{j}\right)$. D'où,

$$\sum_{m=1}^{n} \tau(m) = \sum_{d=1}^{n} E\left(\frac{n}{d}\right)$$

$\star$ En déduire que :

$$\sum_{j=1}^{n} \tau(j) \sim n \ln n$$

Démonstration

$$\sum_{j=1}^{n} \tau(j) = \sum_{d=1}^{n} E\left(\frac{n}{d}\right) = n\left(\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}\right) + O(n)$$

En utilisant la comparaison intégrale-série pour la fonction ln, on obtient aisément : $\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \sim \ln n$. De plus, $O(n) \ll n \ln n$. Finalement,

$$\sum_{j=1}^{n} \tau(j) \sim n \ln n$$

1.1.3

$\star$ Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + \frac{2xy'}{1+x^2} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$$

Démonstration On peut poser $z(x) = y(x)\sqrt{1+x^2}$. L'équation différentielle portant sur la fonction y est équivalente à l'équation différentielle suivante pour la fonction z :

$$z'' = 0$$

Une base des solutions est donc donnée par les fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1.2 *Mathématiques II*
50 minutes

1.2.1

Soient A et B deux matrices symétriques réelles vérifiant $A^5 = B^5$

$\star$ Montrer que $A = B$

Démonstration Notons Δ l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et diagonalisables sur le corps commutatif $\mathbb{K}$.

Pour toute matrice $A \in \Delta$, on définit une fonction φ_A définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \varphi_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I_n)$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que la fonction polynômiale $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ soit *injective*.

Soit $A \in \Delta$, il est clair que $P(A) \in \Delta$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi_{P(A)}(P(\lambda)) \subset \varphi_A(\lambda)$

Comme A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$. La somme des dimensions des espaces $\varphi_A(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ vaut n. Comme P est injective, la somme des dimensions des espaces $\varphi_{P(A)}(\lambda)$ pour $\lambda \in P(\mathbb{K})$ ne peut pas dépasser n. On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\dim \varphi_{P(A)}(P(\lambda)) = \dim \varphi_A(\lambda)$. L'inclusion existant entre ces espaces permet alors de dire que $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \varphi_A(\lambda) = \varphi_{P(A)}(P(\lambda))$

$$\forall A \in \Delta \quad \varphi_A = \varphi_{P(A)} \circ P$$

Si $(A, B) \in \Delta^2$ vérifient $M = P(A) = P(B)$, on obtient $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_M \circ P$. Donc A et B possèdent les mêmes espaces propres, comme elles sont diagonalisables, $A = B$.

On peut utiliser ce résultat avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et le polynôme $P = X^5$ dont la fonction polynômiale est injective, en remarquant que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

1.2.2

Soient $(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}) \in \mathbb{R}^N$ des réels distincts. ($N = n_1 + n_2$)
On ordonne ces réels dans l'ordre croissant, on peut ainsi définir le rang de chacun de ces réels.
On définit $Z = (z_1, \ldots, z_N)$ avec $z_i = 1$ si le réel de rang i est un x, et $z_i = 0$ si c'est un y.

$\star$ Combien de valeurs peut prendre Z ?

Démonstration Il s'agit de choisir n_1 entiers parmi les $n_1 + n_2$ premiers entiers naturels. Z peut donc prendre $C_{n_1+n_2}^{n_1} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!n_2!}$ valeurs.

On définit $W = \sum_{i=1}^{n_1} \text{rang}(x_i)$

$\star$ Exprimer W en fonction de Z.

Démonstration

$$W = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} iZ_i$$

On définit $u = \text{Card}\{\,(i,j) \,/\, \text{rang}(x_i) > \text{rang}(y_j)\,\}$

$\star$ Montrer que $W - u$ est une constante, et la calculer.

Démonstration

Première preuve u est la somme, pour tous les x du nombre de y placés devant ce x.

$$u = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} Z_i \left[\sum_{j=1}^{i} (1 - Z_j) \right] = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} i Z_i - \sum_{i=1}^{n_1+n_2} Z_i Z[i] \text{ avec } Z[i] = \sum_{j=1}^{i} Z_j$$

On note $\phi(k)$ le rang du k-ième x. Comme $Z[i]$ représente le nombre de x ayant un rang inférieur ou égal à i, on a $Z[\phi(k)] = k$

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} Z_i Z[i] = \sum_{k=1}^{n_1} Z[\phi(k)] = \sum_{k=1}^{n_1} k = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$W - u = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

Deuxième preuve On peut considérer une situation de départ où tous les x sont devant les y :

$$x \dots x y \dots y \qquad W = \frac{n_1(n_1+1)}{2} \qquad u = 0$$

On peut ensuite faire remonter les y un-à-un à leur place. Il suffit de montrer la conservation de $W - u$ lorsqu'on fait passer un y juste devant un x

$$\begin{array}{rcccc}
[C] & = & [A]\ x\ y\ [B] & W & u \\
 & & \times & \downarrow & \downarrow \\
[C'] & = & [A]\ y\ x\ [B] & W' = W + 1 & u' = u + 1
\end{array}$$

$$W - u = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

1.2.3 Question de cours

$\star$ Théorème d'inertie de Sylvester

$\star$ Lien avec le "théorème spectral"

2 Oraux de Centrale-Supélec

2.1 *Mathématiques I - Analyse et Géométrie différentielle* 30 minutes de préparation et 30 minutes de passage

2.1.1

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ u_{n+1} = {u_n}^2 p_n \quad p_n = E\left(\frac{1}{u_n}\right) \end{cases}$$

$\star$ Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Démonstration Posons $f = \begin{cases}]0,1[& \longrightarrow &]0,1[\\ x & \longmapsto & x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$ qui est bien définie.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente associée à f. Pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \frac{1}{x} = x$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée par 0, donc convergente vers $l \in \mathbb{R}_+$

$\star$ Montrer que $u_n \longrightarrow 0$ ou bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire

Démonstration La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car la fonction E est croissante, et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ décroissante) et à valeurs entières. Deux cas sont possibles, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{p_n} \longrightarrow 0$. Donc $u_n \longrightarrow 0$

Si, au contraire, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, étant à valeurs entières, elle est stationnaire. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel p_n vaut $p_\infty \in \mathbb{N}$. $(u_n)_{n\geq N}$ vérifie donc la relation de récurrence suivante

$$u_{n+1} = g(u_n) \text{ avec } g = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & p_\infty x^2 \end{cases}$$

Cette fonction g étant continue, la limite l vérifie $l = p_\infty l^2$. Donc $l = 0$ ou $l = \frac{1}{p_\infty}$. (Ici, le cas $l = 0$ est à exclure, car il implique $p_n \longrightarrow +\infty$). Ainsi, $l = \frac{1}{p_\infty}$.

Comme $(u_n)_{n\geq N}$ est décroissante, on a :

$$\forall n \geq N \qquad l = \frac{1}{p_\infty} \leq u_n \leq \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_\infty}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à la valeur $\frac{1}{p_\infty}$

$\star$ Donner les valeurs de u_0 pour lesquelles $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}$

Démonstration D'après ce qui précède, $p_\infty = 2$, on note N le plus petit entier tel que $u_N = \frac{1}{2}$. Pour $n < N$, $u_n \in]\frac{1}{2}, 1[$, donc $p_n = 1$. Ainsi, $\forall n \in [\![0, N-1]\!]$, $u_{n+1} = u_n^2$. Il s'ensuit que $u_0 = 2^{\frac{-1}{2^N}}$

Les valeurs de u_0 pour lesquelles $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}$ sont $\left\{ 2^{\frac{-1}{2^N}} \,/\, N \in \mathbb{N} \right\}$

$\star$ Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p_{n+1} \leq p_n + r$$

Démonstration Il s'agit de maximiser la fonction $\Delta = \begin{cases}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longrightarrow & E\left(\frac{1}{f(x)}\right) - E\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

Soit $x \in]0,1[$, notons $p = E\left(\frac{1}{x}\right)$. Par définition de p, on a $p \leq \frac{1}{x} < p+1$. D'où $f(x) = px^2 > \frac{p}{(p+1)^2}$, $E\left(\frac{1}{f(x)}\right) \leq \frac{1}{f(x)} < \frac{(p+1)^2}{p} = p + 2 + \frac{1}{p} \leq p + 3$. Ainsi $\Delta(x) < 3$. Comme $\Delta(x) \in \mathbb{N}$, $\Delta(x) \leq 2$

$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2$.

Ainsi la meilleure constante r possible est $r = 2$

$\star$ En déduire la nature de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Démonstration $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \frac{1}{p_n+1} \geq \frac{1}{p_0+1+rn} \sim \frac{1}{rn}$

Or la série de terme général positif $\frac{1}{rn}$ est divergente (d'après les règles de Riemann).

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente.

2.1.2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ de rayon } R_f \in]0,+\infty[$$

$\star$ Donner le rayon des séries entières suivantes :

$$g_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad g_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 x^n \qquad g_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n^2}$$

Démonstration Comme $g_1(x) = f(x^2)$, le rayon de g_1 est $R_{g_1} = \sqrt{R_f}$.

D'après le lemme d'Abel, le rayon de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ vaut $R_u = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \,/\, |u_n| r^n \longrightarrow 0 \}$

Pour $\alpha > 0$, supposons que deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n|^\alpha = |v_n|$.

Supposons que $0 \leq r < R_u^\alpha$, comme $\alpha > 0$, $0 \leq r^{\frac{1}{\alpha}} < R_u$, donc $(|v_n| r^n)^{\frac{1}{\alpha}} = |u_n| \left(r^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n \longrightarrow 0$ $|v_n| r^n \longrightarrow 0$. Ainsi $R_u^\alpha \leq R_v$. En appliquant ce résultat en inversant u et v et en changeant α en $\frac{1}{\alpha}$, on obtient $R_u^\alpha = R_v$

D'après ce résultat, $R_{g_2} = R_f^2$

Si $0 \leq r < 1$, comme $r^n \longrightarrow 0$, il existe un rang à partir duquel $r^n \leq \rho < R_f$, donc $|a_n| (r^n)^n \leq |a_n| \rho^n$ qui est une série convergente. Donc $R_{g_3} \leq 1$

Si $r > 1$, $r^n \longrightarrow +\infty$, comme $R_f < +\infty$, il existe un rang à partir duquel $r^n \geq \rho > R_f$, donc $a_n (r^n)^n$ diverge grossièrement. D'où $R_{g_3} \geq 1$

$$R_{g_1} = \sqrt{R_f} \qquad R_{g_2} = R_f^2 \qquad R_{g_3} = 1$$

2.2 *Mathématiques II - Algèbre et Géométrie* 30 minutes de préparation et 30 minutes de passage

$$F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+ \}$$

$\star$ Montrer que F est stable par addition, par multiplication

$\star$ Quel est le degré d'un élément de F ?

Démonstration Soit $P \in F - \{0\}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \alpha x^n$ avec $n = \deg P$

Le signe de l'équivalent de P au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ force que $\alpha > 0$ et que le degré de P soit pair.

$\star$ Montrer que tout élément de F de degré 2 peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés d'éléments de $\mathbb{R}[X]$

Un polynôme $P \in F$ de degré 2 peut s'écrire sous sa forme canonique $P = \alpha(X-\gamma)^2 + \beta$ avec $\alpha > 0$ et $\beta = P(\gamma) \geq 0$

$$P = \left(\sqrt{\alpha}(X-\gamma)\right)^2 + \sqrt{\beta}^2$$

$\star$ Généraliser pour tout élément de F

Démonstration Notons $G = \left\{ A^2 + B^2 \,/\, (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2 \right\} \subset F$, on peut utiliser une égalité remarquable pour montrer que G est stable par multiplication *i.e.* $G.G \subset G$:

$$\left(A^2+B^2\right)\left(C^2+D^2\right) = (AC+BD)^2 + (AD-BC)^2 = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2$$

Soit $P \in F - \{0\}$, on sait que l'on peut factoriser P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \alpha \prod_{\lambda} (X-\lambda)^{m_\lambda} \prod_i C_i^{n_i} \text{ avec } C_i = X^2 + a_i X + b_i \quad a_i^2 - 4b_i < 0$$

Les polynômes C_i sont positifs et de degré 2 donc éléments de G. Bien entendu, $\alpha \in G$.

De plus, pour tout λ, la formule de Taylor au point λ permet de dire que $P(x) \underset{x \to \lambda}{\sim} \zeta (x-\lambda)^{m_\lambda}$ avec $\zeta = \dfrac{P^{(m_\lambda)}(\lambda)}{m_\lambda!} \neq 0$. Encore une fois, le signe local de P au voisinage de λ permet de dire que m_λ est pair. Donc $(X-\lambda)^{m_\lambda} = \left[(X-\lambda)^{\frac{m_\lambda}{2}}\right]^2 + 0^2 \in G$

La stabilité de G par multiplication permet alors de conclure que $P \in G$

$$G = F$$

$$P = X^4 + 2X^2 + X^3 + X + 1$$

$\star$ P peut-il s'écrire comme somme de deux carrés ? Si oui, donner une décomposition, et y a-t-il unicité ?

Démonstration $P = (X^2+1)(X^2+X+1)$, le discriminant de X^2+X+1 est strictement négatif, donc $P \in F = G$, donc P peut s'écrire comme somme de deux carrés de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

$X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

En utilisant les formules précédentes, on peut obtenir que :

$$P = \left(X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)X - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)X + \frac{1}{2}\right)^2$$

3 Oral du concours Mines-Ponts

20 minutes de préparation et 30 minutes de passage

3.1

$$\gamma \in]0,1[\qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^{\gamma}$$
$$b_n = a_n + a_{n+1}$$

$\star$ Étude de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration Posons $f(x) = x^{\gamma}$,

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_n = b_{n-1} + (-1)^n \delta_n \text{ avec } \delta_n = f(n+1) - f(n) \end{cases}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \delta_n$$

f est strictement croissante, donc $\delta_n > 0$
f est concave, donc $f(n+1) \geq \frac{1}{2}(f(n+2) + f(n))$, d'où $\delta_{n+1} \leq \delta_n$
$f'(x) = \gamma x^{\gamma-1}$ Pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $0 \leq \delta_n \leq f'(n) \longrightarrow 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$

$(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc la suite b_n converge vers une limite l que l'on peut encadrer $0 < l < \delta_0 = 1$

$\star$ Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$

Démonstration $b_n = 2a_n + (-1)^n f(n+1)$. On en déduit que $\frac{1}{a_n}$ tend vers 0. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ converge si et seulement la suite S_n converge, avec $S_n = 2 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_n}{a_n a_{n+1}}$

Or, $a_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2} n^{\gamma}$ et $a_{n+1} \sim \frac{(-1)^n}{2} n^{\gamma}$, de sorte que $\frac{b_n}{a_n a_{n+1}} \sim -4ln^{-2\gamma} < 0$. S_n est donc convergente si et seulement si $\gamma > \frac{1}{2}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ n'est jamais absolument convergente.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ est semi-convergente si et seulement si $\gamma > \frac{1}{2}$

3.2

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2+1) - \text{atan } x \end{cases}$$

$\star$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, calculer les zéros de $f^{(n)}$

Démonstration

$$f'(X) = \frac{2X-1}{1+X^2} = \frac{z}{X-\imath} + \frac{\overline{z}}{X+\imath} \text{ avec } z = 1 + \frac{\imath}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n+1)}(X) = (-1)^n n! \left[\frac{z}{(X-\imath)^{n+1}} + \frac{\overline{z}}{(X+\imath)^{n+1}} \right]$$

Les racines de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ sont donc les réels x satisfaisant à l'équation suivante :

$$\left(\frac{X-\imath}{X+\imath}\right)^n = -\frac{z}{\overline{z}}$$

Notons θ un argument de $-\frac{z}{\overline{z}}$, la condition sur x s'écrit ainsi :

$$\frac{x-\imath}{x+\imath} = e^{\imath\alpha} \text{ avec } n\alpha = \theta[2\pi]$$

On a alors $x = \imath\frac{1+e^{\imath\alpha}}{1-e^{\imath\alpha}} = \text{cotan } \frac{-\alpha}{2}$
Un argument de z est $\arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctan 2$. $\theta = -2\arctan 2$ est un argument de $-\frac{z}{\overline{z}}$
Les zéros de $f^{(n)}$ sont donc $\left\{ \text{cotan } \left(\frac{\arctan 2}{n} + k\frac{\pi}{n}\right) / \, k \in \mathbb{Z} \right\}$

4 Oraux des Écoles Normales Supérieures

4.1 Mathématiques Ulm
1 heure

E est un espace hermitien.

$$A \in L(E) \qquad W(A) = \{ \langle x, Ax \rangle \,/\, \|x\| = 1 \}$$

$\star$ Montrer que $W(A)$ est un fermé convexe

Démonstration On note $\mathcal{S}$ la sphère unité de E. En dimension finie, $\mathcal{S}$ est un compact. De plus, $x \longmapsto \langle x, Ax \rangle$ est une application continue, donc $W(A)$ est un compact, donc fermé.

Soit $(x, y) \in \mathcal{S}^2$. On pose $B = \mathrm{Vect}(x, y)$ et p le projecteur orthogonal sur B. Pour tout $z \in \mathcal{S} \cap B$, $\langle z, Az \rangle = \langle z, (pA)z \rangle$. Or la restriction de pA à B est un endomorphisme de B. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $\dim E \leq 2$

Si $\dim E = 1$, A est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{C}$, et $W(A) = \{\lambda\}$ qui est convexe.

Si $\dim E = 2$, pour un $x \in \mathcal{S}$, considérons le projecteur orthogonal P sur $\mathbb{C}x$. On remarque que $\mathrm{Tr}\, AP = \langle x, Ax \rangle$. On en déduit que

$$W(A) = \{ \mathrm{Tr}\, AP \,/\, P \in \mathcal{P} \}$$

$\mathcal{P}$ étant l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang 1.

Or $\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s) \,/\, s \text{ symétrie orthogonale vérifiant } \dim(s - \mathrm{Id}) = 1 \right\}$

On pose $\Sigma = \{ f \in L(A) \,/\, f^\star = f \quad \mathrm{Tr}\, f = 0 \}$ et $\sigma = \{ f \in \Sigma \,/\, f^2 = \mathrm{Id} \}$. On a $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Id} + \frac{1}{2}\sigma$

Dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ fixée, tout élément f de Σ s'écrit de manière unique sous la forme suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b - \imath c \\ b + \imath c & -a \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

On peut munir Σ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé à la norme euclidienne $\|\cdot\|$: $\langle f, f' \rangle = aa' + bb' + cc'$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f^2\big) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} = \|f\|^2 I_2$$

σ est donc la *sphère* unité euclidienne du $\mathbb{R}$-espace vectoriel Σ de dimension 3.

Notons $\varphi \in L(\Sigma, \mathbb{C})$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui à f associe $\mathrm{Tr}\, AP$. D'après le théorème du rang, $\dim \ker \varphi \geq 1$, il existe $f_0 \in \Sigma - \{0\}$ telle que $\varphi(f_0) = 0$. Notons Q le projecteur orthogonal sur $f_0^\perp$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. $\forall f \in \sigma \quad \varphi f = \varphi Q f$. On en déduit que :

$$W(A) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A + \frac{1}{2}\varphi(Q(\sigma))$$

On sait que $Q(\sigma)$ est un *disque* euclidien de Σ, donc convexe. Comme φ est linéaire, il s'ensuit que $W(A)$ est un convexe. En dimension 2, $W(A)$ est une ellipse du plan complexe, un segment ou un point.

Dans tous les cas, $W(A)$ est un fermé convexe.

4.2 Mathématiques Lyon
45 minutes

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ à support compact}$$
$$V(f) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,/\, \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

$\star$ Calculer $V(f)$ si $f \in \mathcal{C}^1$

Démonstration Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact, on peut intégrer par parties $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} f'\varphi \leq \int_{\mathbb{R}} |f'|$

On définit une famille de fonctions continues $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ainsi

$$\sigma_n = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}} \end{array} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \forall x \in \mathbb{R}\ |\sigma_n(x)x - |x|| = \left| \frac{x^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{n^2}+x^2\right)x^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}} \right| = \frac{\frac{1}{n^2}x^2}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}\left(x^2+\sqrt{\left(\frac{1}{n^2}+x^2\right)x^2}\right)} \leq \frac{\frac{1}{n^2}x^2}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}(x^2+0)} = \frac{1}{n}$$

On en déduit que $x \longrightarrow \sigma_n(x)x$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $|\cdot|$

On peut définir une suite de fonctions continues $\psi_n = -\sigma_n \circ (f')$

Par composition à droite, $\psi_n f'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $-|f'|$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$ tel que le support de f soit inclus dans $K = [-A, A]$. On peut facilement construire une fonction μ de classe $\mathcal{C}^1$, à support inclus dans $[-2A, 2A]$, telle que $\|\mu\|_\infty = 1$ et $\forall x \in K\ |\mu(x)| = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut approximer ψ_n sur le segment $[-2A, 2A]$ à ε près par une fonction ω de classe $\mathcal{C}^1$. $\varphi = \frac{\omega\mu}{1+\varepsilon}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$

On a alors, $V(f) \geq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi = -\frac{1}{1+\varepsilon}\int_K \omega\varphi' \geq -\frac{1}{1+\varepsilon}\int_K \psi_n f' - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\int_K |f'|$

On peut faire $\varepsilon \longrightarrow 0$ de sorte que $V(f) \geq -\displaystyle\int_K \psi_n f'$. K est un segment, et $-\psi_n f'$ converge uniformément sur K vers $|f'|$ donc $-\int_K \psi_n f' \longrightarrow \int_K |f'| = \int_{\mathbb{R}} |f'|$. En faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, on peut obtenir finalement

$$V(f) = \int_{\mathbb{R}} |f'|$$

$\star$ Calculer $V(f)$ si $f \in \mathcal{C}^1_{/m}$

4.3 Mathématiques Ulm/Lyon 45 minutes

4.3.1

$$\left\{ \begin{array}{l} g \in [\![0,9]\!] \\ j \in \mathbb{N}^\star \end{array} \right.$$

$$\phi(n) = \mathrm{Card}\{\, p \in [\![0,n]\!] \,/\, \text{le } j\text{-ième chiffre de } \sqrt{p} \text{ après la virgule est } g \,\}$$

$\star$ Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\phi(n)}{n}$

Démonstration Notons $J_k^{(g)} = [((g+10k)10^{-j})^2, ((g+1+10k)10^{-j})^2[$ et $u_k(g) = \mathrm{Card}\left(J_k^{(g)} \bigcap \mathbb{N}\right)$

La largeur de $J_k(g)$ est $((g+1+10k)10^{-j})^2 - ((g+10k)10^{-j})^2$
$= ((g+1+10k)10^{-j} - (g+10k)10^{-j})((g+1+10k)10^{-j} + (g+10k)10^{-j})$
$\sim l_k = 2 \cdot 10^{-2j+1}k \longrightarrow +\infty$

Comme $l_k \longrightarrow +\infty$, $u_k^{(g)} \sim l_k$

D'après le théorème de sommation des séries divergentes à termes positifs,

$$\sum_{m=1}^{k} u_m^{(g)} \sim \sigma_k = \sum_{m=1}^{k} l_m \sim 10^{-2j+1}k^2$$

On définit $k(n) = E(10^{j-1}\sqrt{n}) + 1$

Il vient $\phi(n) = \sum_{m=1}^{k_n} u_m^{(g)} + O\Big(u_{k_n}^{(g)}\Big) = \sigma_{k(n)} + O\Big(l_{k(n)}\Big) = \sigma_{k(n)} + O\Big(\sqrt{n}\Big) \sim \dfrac{n}{10}$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\phi(n)}{n} = \frac{1}{10}$$

4.3.2

$\star$ Calculer $\sup \{\, n \in \mathbb{N} \,/\,$ il existe n entiers consécutifs divisibles par un carré parfait $\}$

Démonstration Soient $(s_1, \ldots, s_k)$ des entiers premiers entre eux deux-à-deux. Leur plus petit commun multiple est donc $\pi = s_1 \ldots s_k$.

On définit le morphisme de groupes ϕ

$$\phi = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{/s_1\mathbb{Z}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{/s_k\mathbb{Z}} \\ n & \longmapsto & (n + s_i\mathbb{Z})_{i\in[\![1,k]\!]} \end{array} \right.$$

Le noyau de ce morphisme de groupes est $\bigcap_{i=1}^{k} s_i\mathbb{Z} = \pi\mathbb{Z}$

En notant p le morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}_{/\pi\mathbb{Z}}$, on peut construire un morphisme injectif de groupes φ de $\mathbb{Z}_{/\pi\mathbb{Z}}$ vers $\mathbb{Z}_{/s_1\mathbb{Z}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{/s_k\mathbb{Z}}$ vérifiant $\phi = \varphi \circ p$

Les cardinaux des deux groupes $\mathbb{Z}_{/\pi\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}_{/s_1\mathbb{Z}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{/s_k\mathbb{Z}}$ sont tous les deux π. Le morphisme injectif φ est donc surjectif. Comme p est lui aussi surjectif, ϕ est surjectif.

Le morphisme de groupes ϕ est surjectif.

Soit $k \in \mathbb{N}$, du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini, on peut se donner k nombres premiers distincts $(p_1, \ldots, p_k)$. On s'intéresse alors aux entiers $(s_1 = p_1^2, \ldots, s_k = p_k^2)$, ces entiers sont premiers entre eux, on peut appliquer le résultat précédent. Notons $c = (-i + s_i\mathbb{Z})_{i\in[\![1,k]\!]} \in \mathbb{Z}_{/s_1\mathbb{Z}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{/s_k\mathbb{Z}}$, c admet un antécédent n par ϕ qui vérifie donc

$$\forall i \in [\![1,k]\!] \quad p_i^2 | n + i$$

$$\sup \{\, n \in \mathbb{N} \,/\, \text{il existe } n \text{ entiers consécutifs divisibles par un carré parfait} \,\} = +\infty$$

4.4 Mathématiques Cachan
45 minutes

$$p \in \mathbb{N}^\star \qquad H^2 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0\Big(\mathbb{R}_{/2\pi\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})\Big) \;/\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 \|c_n(f)\|^2 < +\infty \right\}$$

$\|\cdot\|$ désigne la norme hermitienne usuelle de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$

$$\|f\|_{H^2} = \left(\|c_0(f)\|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} n^4 \|c_n(f)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\star$ Montrer que $\|\cdot\|_{H^2}$ est une norme

Démonstration Tout d'abord H^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0\Big(\mathbb{R}_{/2\pi\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})\Big)$ car si $(f,g) \in (H^2)^2$, $0 \leq n^4\|c_n(f+g)\|^2 \leq 2n^4\|c_n(f)\|^2 + 2n^4\|c_n(g)\|^2$

Dans ces conditions, on peut définir un produit scalaire complexe sur H^2

$$\forall (f,g) \in \left(H^2\right)^2 \qquad \langle f, g\rangle = \langle c_0(f), c_0(g)\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} n^4 \langle c_n(f), c_n(g)\rangle$$

$\langle f, g\rangle$ est bien défini car $n^4|\langle c_n(f), c_n(g)\rangle| \leq n^4\|c_n(f)\|\|c_n(g)\| \leq \frac{1}{2}n^4\Big[\|c_n(f)\|^2 + \Big\|c_n(g)^2\Big\|\Big]$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien une forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, et positive. Le caractère défini-positif provient du théorème de Parseval et du fait que les fonction de H^2 sont continues.

$\|\cdot\|_{H^2}$ est la norme associée à ce produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. En fait H^2 est un espace hilbertien (car complet).

$\star$ Montrer que $\forall f \in H^2 \quad f \in \mathcal{C}^1$ et que $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall f \in H^2 \quad \|f'\|_\infty \leq c\|f\|_{H^2}$

Démonstration Notons $\forall n \in \mathbb{Z} \quad e_n = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\imath n x} \end{array} \right. \qquad \|e_n\|_\infty = 1$

$|n|\|c_n(f)\| = \frac{1}{|n|}n^2\|c_n(f)\| \leq \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n^2} + n^4\|c_n(f)\|^2\Big]$

On en déduit que $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ et $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \imath n c_n(f) e_n$ convergent absolument dans $\mathcal{C}^0\Big(\mathbb{R}_{/2\pi\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})\Big)$ qui est complet, g et φ sont donc continues. Le théorème de dérivation des séries permet de dire que $\varphi = g'$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Le théorème d'interversion $\int \sum$ permet d'affirmer que f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, en appliquant le théorème de Parseval à $f - g$, et en remarquant que $f - g$ est continue, on obtient $f = g$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = \varphi$, de plus $\|\varphi\|_\infty \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{1}{|n|} n^2 \|c_n(f)\| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} n^4\|c_n(f)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}^\star)$ Ainsi, $c = 2\zeta(2)$ convient.

$$\forall f \in H^2 \quad f \in \mathcal{C}^1 \quad \|f'\|_\infty \leq 2\zeta(2)\|f\|_{H^2}$$

A est une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $h > 0$, $f \in H^2$

$\star$ Montrer que l'équation $\dfrac{f-g}{h} + A\left(\dfrac{f+g}{2}\right)' = 0$ admet une unique solution $g = \Phi^h(f)$ dans H^2

Démonstration A étant hermitienne, on peut la diagonaliser dans une base *orthonormale*. La norme $\|\cdot\|_{H^2}$ de f n'est alors pas modifiée si on effectue ce changement de base. On obtient des équations différentielles *scalaires* équivalentes. On peut ainsi se restreindre au cas de la dimension 1, et remplacer A par une valeur propre réelle λ :

$$\frac{f-g}{h}+\lambda\left(\frac{f+g}{2}\right)'=0$$

Si $g\in H^2$ convient, alors les coefficients de Fourier de g vérifient les relations suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{Z}\qquad c_n(g)=\frac{2+\imath\lambda nh}{2-\imath\lambda nh}c_n(f)$$

On obtient ainsi l'unicité de la solution. On peut poser $g=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2+\imath\lambda nh}{2-\imath\lambda nh}c_n(f)e_n\in H^2$ car le facteur multiplicateur $\frac{2+\imath\lambda nh}{2-\imath\lambda nh}$ est de module 1. Il s'ensuit que $\|g\|_{H^2}=\|f\|_{H^2}$

$\star$ Montrer que Φ^h est une isométrie de H^2

Démonstration D'après la remarque ci-dessus, si on note f_i les composantes de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}=(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ diagonalisant A, et g_i les solutions aux équations *scalaires* associées. $g=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}g_iv_i$ est l'unique solution à l'équation différentielle.

De plus, comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\|f\|_{H^2}^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\|f_i\|_{H^2}^2=\sum_{i=1}^{p}\|g_i\|_{H^2}^2=\|g\|_{H^2}^2$

Φ^h est donc une isométrie de H^2

On fixe $u_0\in H^2$, $\forall h>0$, on définit $\left(u_n^h\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi :

$$\begin{cases} u_0^h=u_0\\ u_{n+1}^h=\Phi^h\left(u_n^h\right)\end{cases}$$

On définit alors $F^h(t,x)=u_n^h(x)$ si $nh\leq t<(n+1)h$

$\star\, T\in\mathbb{R}_+$ étant fixé, montrer la convergence uniforme de F^h vers une fonction F sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ lorsque $h\to 0^+$

Démonstration Il est équivalent de montrer la même convergence uniforme pour les composantes de F^h dans la base $\mathcal{B}$. On se ramène encore au cas $p=1$, $A=\lambda\in\mathbb{R}$

Calculons les coefficients de Fourier des fonctions $F^h(t,\cdot)$:

$$c_n\Big(F^h(t,\cdot)\Big)=\left(\frac{2+\imath\lambda nh}{2-\imath\lambda nh}\right)^{E\left(\frac{t}{h}\right)}c_n(u_0)=e^{\imath 2E\left(\frac{t}{h}\right)\arctan\frac{\lambda nh}{2}}c_n(u_0)$$

Fixons $n\in\mathbb{Z}$, pour $0<h\geq 1$, arctan étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut trouver $k\geq 0$ tel que $\left|\arctan\frac{\lambda nh}{2}-\frac{\lambda nh}{2}\right|\leq kh^2$.

Pour tout $t\in[0,T]$, $\left|e^{\imath 2E\left(\frac{t}{h}\right)\arctan\frac{\lambda nh}{2}}-e^{\imath\lambda nt}\right|\leq\left|2E\left(\frac{t}{h}\right)\arctan\frac{\lambda nh}{2}-\lambda nt\right|$

$\leq\left|2E\left(\frac{t}{h}\right)\arctan\frac{\lambda nh}{2}-2\frac{t}{h}\arctan\frac{\lambda nh}{2}\right|+\left|2\frac{t}{h}\arctan\frac{\lambda nh}{2}-\lambda nt\right|\leq|\lambda nh|+2kth\leq(|\lambda n|+2kT)h$

Ainsi, $c_n\Big(F^h(t,\cdot)\Big)$ converge uniformément en $t\in[0,T]$ vers $e^{\imath\lambda nt}c_n(u_0)$ lorsque $h\longrightarrow 0^+$

On définit $F=\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ (t,x) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(u_0)e^{\imath\lambda nt}e_n(x)\end{cases}$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\sum_{|n|>N} |c_n(u_0)| \leq \varepsilon$

Comme $[\![-N, N]\!]$ est un ensemble fini, il existe $\eta > 0$, tel que pour tous $0 < h \leq \eta$ et $t \in [0, T]$, $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left|c_n\Big(F^h(t,\cdot)\Big) - e^{\imath\lambda n t} c_n(u_0)\right| \leq \varepsilon$

$\left\|F^h(t,\cdot) - F(t,\cdot)\right\|_\infty \leq \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left|c_n\Big(F^h(t,\cdot)\Big) - e^{\imath\lambda n t} c_n(u_0)\right| + 2 \sum_{|n|>N} |c_n(u_0)| \leq 3\varepsilon$

Ainsi, F^h converge uniformément sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ vers F lorsque $h \longrightarrow 0^+$

On peut remarquer que $F(t,x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0) e_n(x + \lambda t) = u_0(x + \lambda t)$

$\star$ Intuiter une équation aux dérivées partielles vérifiée par F

Démonstration On intuite que $\frac{\partial F}{\partial t} = A \frac{\partial F}{\partial x}$, ce qui se montre en vérifiant que les équations *scalaires* associées sont bien vérifiées. En dimension 1, $F(t,x) = u_0(x+\lambda t)$, donc $\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = \lambda u_0'(x + \lambda t)$

F vérifie donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} &= A \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ F(0,\cdot) &= u_0 \end{cases}$$

4.5 Mathématiques-Informatique Lyon
30 minutes de préparation et 30 minutes de passage

On s'intéresse aux mots (non vides) constitués uniquement des lettres B et N.

On définit sur ces mots la relation $X \to Y$ si et seulement si le mot Y s'obtient en remplaçant dans X une séquence BN par N, ou NB par N, ou BB par B, ou NN par B.

$\star$ Montrer que toute suite telle que $X_n \to X_{n+1}$ termine

Démonstration La longueur $|X_n|$ décroit à chaque étape d'une unité, la suite X_n termine donc.

$\star$ Montrer que toutes les suites commençant par un même mot X_0 terminent sur le même mot.

Démonstration La parité du nombre d'occurrences de la lettre N dans le mot est conservée par la relation $\to$. Si elle est paire pour X_0 on termine sur le mot B, et sinon sur le mot N.

On se propose de généraliser ce résultat. $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble $\mathcal{X}$, on note $\mathcal{R}^\star$ la fermeture *transitive* de $\mathcal{R}$.

Définition 1 (Terminaison) *La relation $\mathcal{R}$ termine si et seulement si il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \mathcal{R} x_{n+1}$*

Définition 2 (Confluence locale) *x est localement confluent pour la relation $\mathcal{R}$ si et seulement si*

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{X}^3 \quad (x\mathcal{R}y_1 \text{ ET } x\mathcal{R}y_2 \Longrightarrow \exists z \in \mathcal{X} \quad y_1\mathcal{R}^\star z \text{ ET } y_2\mathcal{R}^\star z)$$

Définition 3 (Confluence globale) *x est globalement confluent pour la relation $\mathcal{R}$ si et seulement si*

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{X}^3 \quad (x\mathcal{R}^\star y_1 \text{ ET } x\mathcal{R}^\star y_2 \Longrightarrow \exists z \in \mathcal{X} \quad y_1\mathcal{R}^\star z \text{ ET } y_2\mathcal{R}^\star z)$$

$\star$ Montrer que si $\mathcal{R}$ termine et est localement confluente alors $\mathcal{R}$ est globalement confluente

Démonstration Supposons que la relation $\mathcal{R}$ est localement confluente mais non globalement confluente, montrons qu'elle ne termine pas.

Donnons nous un élément x_0 non confluent.

Supposons construite une suite $x_0 \to x_1 \cdots x_{n-1} \to x_n$, avec x_n non globalement confluent.

Il existe ainsi des chemins $x_n \to w_1 \to \cdots \to y_1$ et $x_n \to w_2 \to \cdots \to y_2$ tels que pour tout z on n'a pas $y_1\mathcal{R}^\star z$ ET $y_2\mathcal{R}^\star z$

Si pour $i = 1$ ou $i = 2$, on a w_i non globalement confluent, on peut prolonger la suite ainsi : $(x_0, \cdots, x_n, w_i)$

Dans le cas contraire, w_1 et w_2 sont confluents, la confluence locale de x_n donne l'existence de w tel que $w_1\mathcal{R}^\star w$ et $w_2\mathcal{R}^\star$

On prolonge alors la suite ainsi : $(x_0, \cdots, x_n, w_1, \cdots, w)$

Il reste à montrer par l'absurde que w est globalement confluent.

Pour $i \in \{1, 2\}$, comme w_i est globalement confluent, et que $w_i\mathcal{R}^\star y_i$ ET $w_i\mathcal{R}^\star w$, il existe p_i tel que $y_i\mathcal{R}^\star p_i$ ET $w\mathcal{R}^\star p_i$. Comme w est globalement confluent, il existe q tel que $p_1\mathcal{R}^\star q$ ET $p_2\mathcal{R}^\star q$

Comme $y_i\mathcal{R}^\star p_i$ ET $p_i\mathcal{R}^\star q$, la transitivité impose que $y_1\mathcal{R}^\star q$ ET $y_2\mathcal{R}^\star q$, ce qui contredit une hypothèse sur x_n

$$\begin{array}{ccccc} x_n & \to & w_2 & \cdots\to & y_2 \\ \downarrow & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ w_1 & \cdots\to & w & \cdots\to & p_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y_1 & \cdots\to & p_1 & \cdots\to & q \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \to & : & \mathcal{R} \\ \cdots\to & : & \mathcal{R}^\star \end{array} \right.$$

$\star$ Montrer que la relation $\rightarrow$ est globalement confluente

Démonstration Supposons qu'une relation $\mathcal{R}$ termine et ait la propriété que partant d'un élément x_0 on termine toujours sur le même mot $F(x_0)$.

Soient x, y_1, y_2 tels que $x\mathcal{R}^\star y_i$, il vient $x\mathcal{R}^\star y_i \mathcal{R}^\star F(y_i)$. Cette suite commence par x et se termine par $F(y_i)$, on a donc $F(x) = F(y_1) = F(y_2)$, d'où $y_1\mathcal{R}^\star F(x)$ et $y_2\mathcal{R}^\star F(x)$, ce qui prouve la confluence globale.

Réciproquement, si l'on a la confluence globale, supposons que partant d'un mot x_0, on obtienne deux éléments terminaux y_1 et y_2. D'après la confluence globale de x_0, ou bien $y_1 = y_2$, ou bien on peut prolonger strictement les chemins $x_0, \cdots, y_i$ ce qui est absurde.

On a finalement l'équivalence suivante, et le résultat voulu pour la relation $\rightarrow$

Terminaison ET Confluence locale	$\Longleftrightarrow$	Terminaison ET Confluence globale	$\Longleftrightarrow$	Terminaison ET Unicité de l'élément de fin

$\star$ Montrer que sans la terminaison, la confluence locale n'implique pas la confluence globale

On définit sur $\mathbb{N}^\star$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow b = 2a \text{ OU } b = 2a+1 \text{ OU } (\exists n \in \mathbb{N}^\star \ \{a,b\} = \{2n, 2n+1\})$$

Dans les deux premiers cas, on dit que b est un des deux fils de a, et pour le troisième, on dit que a et b sont frères.

Cette relation ne termine pas, car le chemin $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infini.

Cette relation est localement confluente, en effet, soient a, b, c tels que $a\mathcal{R}b$, et $a\mathcal{R}c$, il y a plusieurs cas possibles,

1. $b = c$, dans ce cas $b\mathcal{R}^\star b$ et $c\mathcal{R}^\star b$
2. b et c sont les fils de a, dans ce cas, $b\mathcal{R}^\star b$ et $c\mathcal{R}^\star b$
3. b est le frère de a, et c un fils de a, dans ce cas $b\mathcal{R}a\mathcal{R}c$ et $c\mathcal{R}^\star c$
4. Le cas précédent où b et c sont échangés.

Mais, la relation $\mathcal{R}$ n'est pas globalement confluente, prenons par exemple $x = 1, y_1 = 4, y_2 = 6$. $x = 1\mathcal{R}2\mathcal{R}4 = y_1$ et $x = 1\mathcal{R}3\mathcal{R}7 = y_2$

Notons $\mathcal{F}_1 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} [\![2^{n+1}, 3\times 2^n[\![$ et $\mathcal{F}_2 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} [\![3\times 2^n, 2^{n+2}[\![$

Il est clair que les ensembles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont disjoints, et que pour tout $y \in \mathcal{F}_i$, $x\mathcal{R}z \Rightarrow z \in \mathcal{F}_i$, de sorte que si $y_1\mathcal{R}^\star z$ et $y_2\mathcal{R}^\star z$, on aurait $z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, ce qui montre que $\mathcal{R}$ n'est pas globalement confluente.

4.6 Informatique Ulm/Lyon/Cachan 45 minutes

On définit le poids d'un monôme $H = \prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i}$ de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ par $\pi(H) = \sum_{i=1}^{n} p_i$. On définit un ordre sur les monômes de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ en les rangeant par ordre croissant de poids puis par l'ordre lexicographique des exposants $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

Dans ce contexte, chaque élément $f \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n] - \{0\}$ s'écrit sous la forme $f = \alpha_f H_f \oplus R_f$ avec $R_f \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$, $\alpha_f \in \mathbb{K}^\star$, et H_f est le monôme le plus grand de f. (Le symbole $\oplus$ signifie qu'il s'agit d'un $filtrage$, et non uniquement de l'opération + usuelle)

$(f_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'éléments (non nuls) de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$. On note $\mathcal{J}$ l'idéal engendré par cette famille.

Définition 1 (Règles de réécriture) *$f\mathcal{R}g$ si et seulement si il existe $i \in I$, un monôme M, $\beta \in \mathbb{K}^\star$ et $Q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que*

$$f = \alpha_f \beta M H_{f_i} \oplus Q \text{ ET } g = f - \beta M f_i$$

Définition 2 (Zig-zag) *Un zig-zag entre x et y pour la relation $\mathcal{R}$ est une suite finie $(x_n)_{n \in [\![0,N]\!]}$ avec $x_0 = x$, $x_N = y$, $\forall n \in [\![0, N[\![\quad x_n \mathcal{R} x_{n+1}$ OU $x_{n+1} \mathcal{R} x_n$*

$\star$ Montrer que $g_1 - g_2 \in \mathcal{J}$ équivaut à l'existence d'un *zig-zag* entre g_1 et g_2 pour la relation $\mathcal{R}$

On suppose que les conditions sont réunies pour que la relation $\mathcal{R}$ soit confluente et noetherienne (c'est-à-dire termine).

$\star$ Établir un algorithme permettant de déterminer si $g_1 - g_2 \in \mathcal{J}$