LA STRUCTURE MONOÏDALE SUR $\mathbf{SH}(S)$

par

Joël Riou

Résumé. — Ce texte constitue les notes de deux exposés (6 et 13 juin 2001) sur la structure monoïdale (*i.e.* le $\wedge$ produit) sur la catégorie homotopique stable d'un schéma (noethérien) S. Le lecteur ferait aussi bien de lire directement [**Ja1**]...

Table des matières

1. Les spectres symétriques 1
2. La structure monoïdale sur $\mathbf{SH}^\Sigma(S)$ 7
3. Équivalence entre les catégorie $\mathbf{SH}(S)$ et $\mathbf{SH}^\Sigma(S)$ 8
Bibliographie 12

Il est malaisé de définir directement une structure monoïdale symétrique sur les spectres. C'est ainsi que la notion de spectres symétriques a été inventée pour résoudre ce problème. Nous allons ainsi rappeler la définition des spectres symétriques dans le contexte qui nous intéresse, définir le $\wedge$ produit pour iceux et enfin montrer que les catégories de modèles fermées formées à partir des spectres ordinaires ou des spectres symétriques sont Quillen-équivalentes, et que par conséquent, on a bien un $\wedge$ produit sur la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}(S)$ d'un schéma noethérien S quelconque.

1. Les spectres symétriques

1.1. Définitions. — On note $\mathbf{C}$ la catégorie $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})_\bullet$ munie de la structure de catégorie de modèles $\mathbb{A}^1$-localisée. La catégorie $\mathbf{C}$ est aussi munie du produit $\wedge$. Dans cet exposé, T désignera soit le cercle simplicial S^1_{s} soit $(\mathbb{P}^1,\infty)$ (ou, ce qui ne change pas grand chose, $S^1_{\mathrm{s}}\wedge S^1_{\mathrm{t}}$ ou encore $\mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1-0)$).

Définition 1.1. — Une suite symétrique est une suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathbf{C}$ munis d'action à gauche $\Sigma_n\times X^n\to X^n$, où Σ_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. On note $\mathbf{Seq}^\Sigma(\mathbf{C})$ la catégorie des suites symétriques dans $\mathbf{C}$.

Lemme 1.2. — *Pour tous objets X et Y de $\mathbf{Seq}^\Sigma(\mathbf{C})$, le foncteur qui à un objet Z de $\mathbf{Seq}^\Sigma(\mathbf{C})$ associe l'ensemble des familles $(\varphi_{pq}\colon X^p\wedge Y^q\to Z^{p+q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de morphismes dans $\mathbf{C}$ telles que pour tous p,q, $\varphi_{p,q}$ soit $\Sigma_p\times\Sigma_q$-équivariant (*via *l'inclusion évidente $\Sigma_p\times\Sigma_q\to\Sigma_{p+q}$) est représentable par un objet $X\otimes Y$ de $\mathbf{Seq}^\Sigma(\mathbf{C})$.*

Démonstration. — Commençons par définir un foncteur associant à tout $\Sigma_p \times \Sigma_q$-ensemble pointé Z un Σ_n-ensemble pointé $\Sigma_n \otimes_{\Sigma_p \times \Sigma_q} Z$ avec $n = p+q$. Soit z_0 le point-base de Z. L'ensemble pointé $\Sigma_n \otimes_{\Sigma_p \times \Sigma_q} Z$ est l'ensemble $\Sigma_n \times Z$ (pointé par $(1, z_0)$) quotienté par la relation d'équivalence engendrée par l'identification des éléments de $\Sigma_n \times \{z_0\}$ et par $(\mu(\sigma,\sigma'),z) \sim (\mu,(\sigma,\sigma')z)$ pour tous $z \in Z$, $\mu \in \Sigma_n$ et $(\sigma,\sigma') \in \Sigma_p \times \Sigma_q$. On munit $\Sigma_n \otimes_{\Sigma_p \times \Sigma_q} Z$ d'une structure de Σ_n-ensemble pointé à gauche en faisant agir Σ_n sur lui-même par multiplication à gauche.

On peut évidemment prolonger cette définition aux préfaisceaux simpliciaux pointés, et même aux faisceaux simpliciaux pointés, donc aux objets de la catégorie $\mathbf{C}$. Si X et Y sont deux objets de $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$, on peut alors définir un objet $X \otimes Y$ de $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ en définissant sa composante de niveau n, les actions de Σ_n sur chaque terme du bouquet donnant une action à gauche sur $(X \otimes Y)^n$:

$$(X \otimes Y)^n = \bigvee_{p+q=n} \Sigma_n \otimes_{\Sigma_p \times \Sigma_q} (X^p \wedge Y^q)$$

□

Corollaire 1.3. — *Le bifoncteur $\otimes$ munit $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ d'une structure de catégorie monoïdale symétrique dont le neutre est la suite symétrique $\mathbf{1} = (S^0_{\mathrm{s}}, \bullet, \bullet, \dots)$.*

Démonstration. — Compte tenu du résultat de représentabilité précédent, on peut reproduire les arguments classiques pour le produit tensoriel des modules. Ainsi, les isomorphismes d'associativité de $\otimes$ sur $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ sont tautologiques, de même que ceux qui font de la suite $(S^0_{\mathrm{s}}, \bullet, \bullet, \dots)$ le neutre. La seule subtilité concerne la « commutativité », et plus précisément l'isomorphisme bifonctoriel $X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ pour X et Y objets de la catégorie $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$. Donnons-nous deux tels objets X et Y. D'après le lemme de Yoneda, il s'agit de définir, pour tout objet $Z \in \mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$, une bijection fonctorielle $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})}(Y \otimes X)$. Soit donc $(\varphi_{p,q})$ une famille de morphismes définissant un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})}(X \otimes Y, Z)$. On définit une famille $(\psi_{p,q})$ correspondant à un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})}(Y \otimes X, Z)$ de sorte que les diagrammes de la forme suivante soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} X^q \wedge Y^p \arrow[r, "\varphi_{qp}"] & Z^{q+p} \arrow[d, "c_{p,q}"] \\ Y^p \wedge X^q \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "\psi_{p,q}"] & Z^{p+q} \end{tikzcd}$$

où τ désigne l'isomorphisme de commutativité de la structure monoïdale sur $\mathbf{C}$ et $c_{p,q}$ la permutation telle que $c_{p,q}(i) = i + q$ pour $1 \leq i \leq p$ et $c_{p,q}(i) = i - p$ pour $p + 1 \leq i \leq p + q$. On vérifie aussitôt que $\psi_{p,q}$ est $\Sigma_p \times \Sigma_q$-équivariant. On a donc bien construit un isomorphisme $X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$. □

Lemme 1.4. — *On note $\mathbf{T}$ l'objet de $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ défini par $\mathbf{T}^n = T^{\wedge n}$, muni de l'action à gauche évidente de Σ_n (induite par l'application $\Sigma_n \times T^{\times n} \to T^{\times n}$ qui à (σ, f) associe $f \circ \sigma^{-1}$). Alors, $\mathbf{T}$ est un $\otimes$-monoïde commutatif dans la catégorie monoïdale symétrique $(\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C}), \otimes, \mathbf{1})$, la multiplication étant donnée par $\mu\colon \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ correspondant aux morphismes « idéntité » $T^{\wedge p} \wedge T^{\wedge q} \to T^{\wedge(p+q)}$ et d'unité $1\colon \mathbf{1} \to \mathbf{T}$ le morphisme évident.*

La démonstration est triviale. On notera toutefois que c'est à cet endroit que la construction prend tout son intérêt. En effet, si nous n'avions pas introduit les actions des groupes Σ_n, nous eussions pu définir néanmoins la catégorie des suites d'objets dans $\mathbf{C}$, y définir une structure monoïdale symétrique $\otimes$, considérer la suite $(T^{\wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ et en faire un $\otimes$-monoïde, mais celui-ci n'eût pas été commutatif.

Définition 1.5. — La catégorie $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$ des T-spectres symétriques est la catégorie des $\otimes$-modules à gauche sur le $\otimes$-monoïde $\mathbf{T}$. Ainsi, un T-spectre symétrique est un objet X de $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$

muni d'un morphisme $\mu\colon \mathbf{T}\otimes C\to X$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}\otimes\mathbf{T}\otimes X \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mu"] & \mathbf{T}\otimes X \arrow[d, "\mu"] \\ \mathbf{T}\otimes X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1}\otimes X \arrow[d, "1\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\cong"] & \\ \mathbf{T}\otimes X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

Le $\otimes$-monoïde $\mathbf{T}$ est évidemment un $\otimes$-module à gauche sur lui-même, ainsi $\mathbf{T}$ est un objet de $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$. Pour tout objet X de $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$, on munit $\mathbf{T}\otimes X$ d'une structure de $\otimes$-module à gauche *via* le morphisme $\mu\otimes\mathrm{Id}_X\colon \mathbf{T}\otimes(\mathbf{T}\otimes X)\to X$, c'est le $\mathbf{T}$-module libre de base X, on a alors évidemment une adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})}(\mathbf{T}\otimes X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})}(X,\mathrm{Oub}\,Y)$ pour tout objet Y de $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$ ou Oub désigne le foncteur d'oubli $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})\to\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$. On remarque que les catégories $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ et $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$ possèdent toutes les limites inductives et projectives et que celles-ci commutent au foncteur d'oubli $\mathrm{Oub}\colon \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})\to\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$.

La commutativité du $\otimes$-monoïde $\mathbf{T}$ permet de faire la définition suivante et d'en déduire le corollaire qui la suit.

Définition 1.6. — On définit un bifoncteur $\wedge\colon \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})\times\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})\to\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$ en définissant, pour tous objets X et Y de $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$, $X\wedge Y$ comme étant le coégalisateur des deux flèches $\alpha,\beta\colon \mathbf{T}\otimes X\otimes Y\to X\otimes Y$, α étant la composée $\mathbf{T}\otimes X\otimes Y\overset{\tau\otimes\mathrm{Id}_Y}{\to} X\otimes\mathbf{T}\otimes Y\overset{\mathrm{Id}_X\otimes\mu}{\to} X\otimes Y$ et $\beta=\mu\otimes\mathrm{Id}_Y$. La structure de $\mathbf{T}$-module à gauche sur $X\wedge Y$ est induite par α et β

Corollaire 1.7. — *Le bifoncteur $\wedge$ munit la catégorie $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$ d'une structure de catégorie monoïdale symétrique dont le neutre est $\mathbf{T}$.*

Proposition 1.8. — *Il est équivalent de se donner un T-spectre symétrique X et de se donner un T-spectre (*i.e.* une suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathbf{C}$ munis de morphismes d'assemblage $\sigma\colon T\wedge X^n\to X^{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$) muni d'actions à gauche $\Sigma_n\times X^n\to X^n$ telles que pour tous $n,p\geq 0$, le morphisme $\sigma\colon T^{\wedge p}\wedge X^n\to X^{p+n}$ soit $\Sigma_p\times\Sigma_n$-équivariant pour les actions à gauche évidentes, σ étant la composée $\sigma\circ(T\wedge\sigma)\circ\ldots(T^{\wedge(p-1)}\wedge\sigma)$. Il suffit en fait de vérifier cette dernière condition avec $p\in\{1,2\}$.*

Démonstration. — Se donner $X\in\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$ équivaut à se donner $X\in\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ et un morphisme $\mu\colon \mathbf{T}\otimes X\to X$ dans $\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ satisfaisant la $\mathbf{T}$-linéarité. Par définition de $\mathbf{T}\otimes X$, μ provient d'une unique famille de morphismes $\Sigma_p\times\Sigma_n$-équivariants $T^{\wedge p}\wedge X^q\to X^{p+n}$. Par $\mathbf{T}$-linéarité, il suffit de les connaître pour $p=1$ et $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, la donnée de $X\in\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$ revient à la donnée du T-spectre sous-jacent, des actions à gauche des groupes de permutation avec la condition de $\Sigma_p\times\Sigma_n$-équivariance du morphisme $\sigma\colon T^{\wedge p}\wedge X^n\to X^{p+n}$ défini ci-dessus. La raison essentielle pour laquelle il suffit de vérifier cette condition avec $p\in\{1,2\}$ est que les groupes de permutations soient engendrées par les transpositions. $\square$

Définition 1.9. — Soit K un objet de $\mathbf{C}$ et $n\in\mathbb{N}$. On note G_nK la suite symétrique

$$(\bullet,\ldots,\bullet,(\Sigma_{n+})\wedge K,\bullet,\ldots)$$

$(\Sigma_{n+})\wedge K$ étant muni de l'action induit par la multiplication à gauche dans Σ_n. On pose alors $F_nK=\mathbf{T}\otimes G_nK$ qui est un T-spectre symétrique.

On a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})}(G_nK,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(K,Y^n)$ pour tout $Y\in\mathbf{Seq}^{\Sigma}(\mathbf{C})$. De plus, on a aussi $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})}(F_nK,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(K,Y^n)$ pour tout $Y\in\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$. On peut alors constater que pour tous $n,m\in\mathbb{N}$ et $A,B\in\mathbf{C}$, il existe un isomorphisme canonique de T-spectres symétriques $F_nA\wedge F_mB\overset{\sim}{\to}F_{n+m}(A\wedge B)$. Remarquons que l'on peut aussi définir pour tout $X\in\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathbf{C})$ et $K\in\mathbf{C}$, un T-spectre symétrique $X\wedge K$ en « smashant à droite par K », on constate alors qu'il existe un isomorphisme canonique de T-spectres symétriques $X\wedge F_0K\overset{\sim}{\to}X\wedge K$.

Remarque 1.10. — Soient X, Y, et Z trois objets de $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$. Se donner un morphisme $X \wedge Y \to Z$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ équivaut à se donner pour tous $p, q \geq 0$ des morphismes $\varphi_{p,q} \colon X^p \wedge Y^q \to Z^{p+q}$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs pour tous $p, q, r \leq 0$:

$$\begin{tikzcd}
T^{\wedge r} \wedge X^p \wedge Y^q \arrow[r, "\tau\wedge\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\sigma\wedge\mathrm{Id}"] & X^p \wedge T^{\wedge r} \wedge Y^q \arrow[r, "\mathrm{Id}\wedge\sigma"] & X^p \wedge Y^{r+q} \arrow[d, "\varphi_{p,r+q}"] \\
X^{r+p} \wedge Y^q \arrow[r, "\varphi_{r+p,q}"] & Z^{r+p+q} \arrow[r, "c_{p,r}\oplus\mathrm{Id}"] & Z^{p+r+q}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^{\wedge r} \wedge X^p \wedge Y^q \arrow[r, "\sigma\wedge\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\wedge\varphi_{p,q}"] & X^{r+p\wedge Y^q} \arrow[d, "\varphi_{r+p,q}"] \\
T^{\wedge r} \wedge Z^{p+q} \arrow[r, "\sigma"] & Z^{r+p+q}
\end{tikzcd}$$

Lemme 1.11. — *Le foncteur d'oubli $U \colon \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$ admet un adjoint à gauche $V \colon \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ où $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$ désigne la catégorie des T-spectres.*

1.2. La structure injective. —

Définition 1.12. — Dans la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, une cofibration injective est un monomorphisme, une équivalence faible injective est un morpshisme $f \colon X \to Y$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \colon X^n \to Y^n$ soit une équivalence faible dans $\mathbf{C}$ et une fibration injective est un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations injectives qui sont aussi des équivalences injectives.

Lemme 1.13. — *Ces données munissent la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ d'une structure de catégorie de modèles fermée propre et simpliciale, appelée structure injective.*

Démonstration. — Cela ne présente pas de difficulté majeure. Par ailleurs, la structure simpliciale est donnée par le bifoncteur $(\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C}))^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C}) \to \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ défini par $\hom(X,Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})}(X \wedge \Delta^n_+, Y)$. □

Lemme 1.14. — *V transforme cofibrations projectives dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ en cofibrations injectives. De plus, V préserve les équivalences injectives.*

Démonstration. — La démonstration est laisée en exercice... Voir aussi [**Ja2**, lemme 3]. □

1.3. La structure stable. —

Définition 1.15. — On dit d'un morphisme f dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ que c'est une fibration stable si et seulement si Uf est une fibration stable dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, c'est-à-dire que Uf possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations projectives qui sont aussi des équivalences stables.

Lemme 1.16. —

1. *Tout morphisme $f \colon X \to Y$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ possède une factorisation fonctorielle en $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{p} Y$ telle que p soit une fibration stable et j une cofibration injective ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations stables dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$;*
2. *si $j \colon X \to Y$ est un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations stables, alors pour tout objet stablement fibrant W de $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, le morphisme canonique suivant est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux :*

$$j^\star \colon \hom(Y,W) \to \hom(X,W)$$

Démonstration. — Pour le premier point, il suffit d'appliquer l'argument du petit objet à un ensemble suffisamment grand de morphismes de la forme $Vi \colon VA \to VB$ où $i \colon A \to B$ est une cofibration projective qui est aussi une équivalence stable dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$. Pour établir le deuxième point, encore d'après l'argument du petit objet, un tel morphisme j sera un rétracte d'un composé transfini de morphisme de la morphisme Vi avec i une cofibration projective qui est aussi une équivalence stable dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$. Grâce à l'adjonction simpliciale $\hom(VA,B) = \hom(A,UB)$, on peut conclure en utilisant l'axiome simpliciale dans la structure de catégorie de modèles fermée simpliciale stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$. □

Remarque 1.17. — Pour tout objet X de $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, il existe une factorisation fonctorielle $X \xrightarrow{i} X_s \xrightarrow{j} X_{si}$ telle que i soit une cofibration injective ayant la propriété de relèvement à droite par rapoort aux fibrations stables, avec X_s stablement fibrant (grâce au lemme précédent), et que j soit une cofibration injective triviale et X_{si} injectivement fibrant (grâce à l'axiome **CM5**$^+$ pour la structure injective). $UX_s \to UX_{si}$ étant une équivalence projective, UX_s stablement fibrant et UX_{si} projectivement fibrant, UX_{si} est stablement fibrant. Ainsi, X_{si} est à la fois stablement et injectivement fibrant. On peut généraliser cette factorisation à un morphisme quelconque $X \to Y$ (utilise [**Ja1**, lemme 2.7]).

Définition 1.18. — Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$. On dit que f est une équivalence stable si et seulement si pour tout objet $W \in \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ stablement et injectivement fibrant, le morphisme d'ensembles simpliciaux $j^{\star}\colon \operatorname{hom}(Y, W) \to \operatorname{hom}(X, W)$ est une équivalence faible.

En particulier, les équivalences injectives sont des équivalences faibles.

Lemme 1.19. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ avec X et Y stablement fibrants. Alors, f est une équivalence stable si et seulement si f est une équivalence projective.*

Démonstration. — Le cas où X et Y sont de plus injectivement fibrants résulte du formalisme général. Pour faire le cas général, on construit un carré commutatif de la forme suivante où les lignes sont des cofibrations injectives triviales et où les objets de droite sont stablement et injectivement fibrants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_{si} \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r] & Y_{si} \end{tikzcd}$$

□

Définition 1.20. — Pour tout $K \in \mathbf{C}$ et $Z \in \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, on pose $\mathbf{Hom}(K, Z)^n = \mathbf{Hom}(K, Z^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et cet objet de $\mathbf{C}$ est muni de l'action à gauche de Σ_n induite par celle sur Z^n. Pour tous $p, n \geq 0$, on définit $\sigma\colon T^{\wedge p} \wedge \mathbf{Hom}(K, Z)^n \to \mathbf{Hom}(K, Z^{p+n})$ comme étant le morphisme adjoint de la composée $T^{\wedge p} \wedge \mathbf{Hom}(K, Z)^n \wedge K \xrightarrow{\mathrm{Id} \wedge \mathrm{ev}} T^{\wedge p} \wedge Z^n \xrightarrow{\sigma} Z^{p+n}$. Ces définissent un T-spectre symétrique $\mathbf{Hom}(K, Z)$. On pose $\Omega_T X = \mathbf{Hom}(T, X)$.

On a la formule $\mathbf{Hom}(K \wedge L, Z) = \mathbf{Hom}(K, \mathbf{Hom}(L, Z))$ pour tous K, L dans $\mathbf{C}$ et Z dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$. De plus, $- \wedge K$ est le foncteur adjoint à gauche de $\mathbf{Hom}(K, -)$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$.

Définition 1.21. — On définit un foncteur $-[1]\colon \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ de la façon suivante. On pose $Z[1]^n = Z^{1+n}$. Tout élément $\alpha \in \Sigma_n$ agit sur $Z[1]^n = Z^{1+n}$ par la permutation $\mathrm{Id} \oplus \alpha$. Pour tous $p, n \geq 0$, on définit $\sigma\colon T^{\wedge p} \wedge Z[1]^n \to Z[1]^{p+n}$ de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} T^{\wedge p} \wedge Z[1]^n \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[d, equal] & & Z[1]^{p+n} \arrow[d, Rightarrow] \\ T^{\wedge p} \wedge Z^{1+n} \arrow[r, "\sigma"] & Z^{p+1+n} \arrow[r, "c_{1,p} \oplus \mathrm{Id}"] & Z^{1+p+n} \end{tikzcd}$$

Enfin, $-[n]$ admet pour adjoint à gauche le foncteur qui à un T-spectre symétrique associe $G_n(S^0_{\mathrm{s}}) \otimes X$, la structure de $\mathbf{T}$-module sur $G_n(S^0_{\mathrm{s}}) \otimes X$ étant induite par l'action à gauche sur X.

Remarque 1.22. — On remarque que si $X \in \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ est tel que UX est projectivement fibrant, alors $U\Omega_T X$ aussi. Pour tout $Z \in \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, il existe un morphisme canonique $\psi_Z\colon Z \to \Omega_T Z[1]$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, défini au niveau n par le morphisme $Z^n \to \mathbf{Hom}(T, Z^{1+n})$ adjoint du morphisme $Z^n \wedge T \xrightarrow{\tau} T \wedge Z^n \xrightarrow{\sigma} Z^{1+n}$.

Définition 1.23. — Soit Z un objet de $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$ tel que UZ soit projectivement fibrant, on note $\mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma Z$ la colimite indexée par $\mathbb{N}$ du syst-me inductif suivant :

$$Z \overset{\psi}{\to} \Omega_T Z[1] \overset{\psi}{\to} \Omega_T^2 Z[2] \overset{\psi}{\to} \Omega_T^3 Z[3] \overset{\psi}{\to} \dots$$

Pour tout $K \in \mathbf{C}$, on a un morphisme canonique $(\mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma X) \wedge K \to \mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma(X \wedge K)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma$ est un foncteur « simplicial », c'est-à-dire que pour tous objets X, Y de $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$, on a un morphisme bifonctoriel d'ensembles simpliciaux $\hom(X,Y) \to \hom(\mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma X, \mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma Y)$.

Proposition 1.24. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$. Si Uf est une équivalence stable, alors f est une équivalence stable.*

Démonstration. — (Voir [**Ja1**, proposition 4.8]). On peut supposer que X et Y sont injectivement fibrants. On applique à f le foncteur $\hom(-,W)$ avec W stablement et injectivement fibrant. Compte tenu que le morphisme canonique $W \to \mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma W$ est une équivalence injective, on voit que le morphisme $\hom(X,W) \to \hom(Y,W)$ est facteur direct (à homotopie près) du morphisme $\hom(\mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma X, W) \to \hom(\mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma Y, W)$. Pour conclure, il reste à montrer que $\mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma X \to \mathrm{Q}_\mathrm{T}^\Sigma Y$ est une équivalence injective, ce qui se fait en comparant ceci avec la définition de l'espace des lacets infinis dans la cas des spectres ordinaires... □

Lemme 1.25. — *Le foncteur $-[n]\colon \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C}) \to \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$ préserve les fibrations injectives et les fibrations injectives triviales.*

Démonstration. — L'adjoint à gauche de $-[n]$ est le foncteur $G_n(S^0_\mathrm{s}) \otimes -$ qui préserve clairement les cofibrations injectives et les cofibrations injectives triviales, d'où le résultat. □

Lemme 1.26. —

1. *Dans un diagramme de comparaison entre deux suites associées à des cofibrations injectives dans $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$, le cardinal de l'ensemble des $i \in \{1,2,3\}$ tels que f_i soit une équivalence stable est différent de 2 :*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & B_1/A_1 \arrow[d, "f_3"] \\ A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_2/A_2 \end{tikzcd}$$

2. *Dans un diagramme de comparaison entre deux suites associées à des fibrations stables dans $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$, le cardinal de l'ensemble des $i \in \{1,2,3\}$ tels que f_i soit une équivalence stable est différent de 2 :*

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & Y_1 \arrow[d, "f_3"] \\ F_2 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Démonstration. — 1. On applique $\hom(-,W)$ avec W injectivement et stablement fibrant, et on utilise la suite exacte longue de la fibration associée (grâce à la structure injective sur $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$). Mais pour pouvoir appliquer le lemme des cinq, il s'agit de compléter infiniment vers la droite cette suite exacte longue. Pour cela, on remarque que pour tout $n \geq 0$ et $A \in \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{C})$, $\pi_{n+1}(\hom(A,W) = \pi_n(\hom(A, \Omega_{S^1_\mathrm{s}} W))$, $\Omega_{S^1_\mathrm{s}}$ étant bien entendu injectivement et stablement fibrant. Ainsi, il suffit ed montrer que pour tout W' injectivement et stablement fibrant, il existe W et une équivalence injective $W' \to \Omega_{S^1_\mathrm{s}} W$ tel que W soit injectivement et stablement fibrant. Pour cela, on remarque que la flèche canonique $W \to \Omega_T W'[1]$ est une équivalence injective (UW' est un Ω-spectre), or T peut s'écrire (au moins dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ comme $S^1_\mathrm{s} \wedge ?$, ainsi $W = \mathbf{Hom}(?, W)[1]$ convient, puisqu'il est de plus stablement et injectivement fibrant (*cf.* lemme précédent).

2. On se ramène au cas 1. en utilisant que $U(X_i/F_i) \to UY_i$ est une équivalence stable, ainsi, d'après la proposition 1.24, $X_i/F_i \to Y_i$ est une équivalence stable. □

Proposition 1.27. — *Soit $p\colon X \to Y$ un morpihsme dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$. Alors, p est une fibration stable et une équivalence stable si et seulement si Up est une fibration projective et une équivalence projective (*i.e.* Up est une fibration stable triviale).*

Démonstration. — On suppose que p est une fibration stable et une équivalence stable. Notons F la fibre de p, on peut appliquer le lemme précédent au diagramme de comparaison suivant :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ \bullet \arrow[r] & Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & Y \end{tikzcd}$$

Comme p et Id_Y sont des équivalence stables, $F \to \bullet$ est également une équivalence stable. Comme F est stablement fibrant, $F \to \bullet$ est une équivalence injective, donc $UF \to \bullet$ est une équivalence stable. En appliquant le principe de comparaison des fibrations stables dans la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, on obtient que Up est une équivalence stable. Ainsi, Up est une fibration stable triviale, c'est-à-dire une fibration projective triviale (les structures stables et projectives sur les T-spectres ont les mêmes cofibrations).

Réciproquement, si Up est une fibration projective triviale, Up est une équivalence stable, donc p est une équivalence stable d'après la proposition 1.24. De plus, Up est une fibration stable triviale, donc en particulier p est une fibration stable. Ainsi, p est une fibration stable et une équivalence stable. □

Dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, on appelle cofibration stable tout morphisme ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations stables qui sont aussi des équivalences stables. On appele structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ la donnée des cofibrations stables, des fibrations stables et des équivalences stables dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$.

Lemme 1.28. — *La catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ munie de la structure stable est une catégorie de modèles fermée propre et simpliciale. On note $\mathbf{SH}^{\Sigma}(S)$ la catégorie homotopique stable des T-spectres symétriques.*

Démonstration. — La vérification des axiomes **CM1**$^+$, **CM2**, **CM3** est évidente. La vérification de **CM4** (modulo **CM5**) peut se faire en utilisant l'astuce de Joyal (duale). Le lemme 1.16 donne une moitié de l'axiome **CM5**$^+$ puisqu'il implique que tout morphisme $X \to Y$ se factorise de manière fonctorielle en $X \overset{i}{\to} Z \overset{p}{\to} Y$ où i est une cofibration stable triviale et p une fibration stable.

En appliquant l'argument du petit objet à un ensemble suffisamment grand de morphismes de la forme $F_n i\colon F_n A \to F_n A'$ où $n \in \mathbb{N}$ et $i\colon A \to A'$ est une cofibration dans $\mathbf{C}$, on peut obtenir une factorisation fonctorielle de tout morphisme $X \to Y$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ sous la forme $X \overset{i}{\to} Z \overset{p}{\to} Y$ de telle sorte que i soit une cofibration stable et p une fibration stable triviale (en utilisant la proposition précédente).

La propreté résulte essentiellement du lemme 1.26 pourvu que l'on sache que les cofibrations stables soient des cofibrations injectives, ce qui se prouve en se ramenant au cas des morphismes $F_n i$ avec i un monomorphisme. La vérification de l'axiome simpliciale ne pose pas de difficulté particulière. □

2. La structure monoïdale sur $\mathbf{SH}^{\Sigma}(S)$

Nous avons défini une structure monoïdale symétrique $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$. Il s'agit de montrer que cette structure monoïdale « passe » à la catégorie homotopique.

Lemme 2.1. — *Soient $i\colon A \to B$ et $j\colon C \to D$ deux morphismes dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, notons (i,j) le morphisme canonique $(i,j)\colon (B \wedge C) \coprod_{A \wedge C} (A \wedge D) \to B \wedge D$.*

1. *Si i et j sont des cofibratiosn stables, alors (i,j) est une cofibration stable ;*

2. *Si i et j sont des cofibrations stables telles que i ou j soit de plus une équivalence stable, alors (i, j) est une cofibration stable triviale.*

Démonstration. — 1. À j fixé, la classe des morphismes i tels que (i, j) possède la propriété de relèveent à gauche par rapport aux fibrations stables triviales est saturé par rétracte, image directe, somme directe et composition transfinie. Donc, on peut supposer que i est de la forme $F_n(k)$ où $k\colon A \to B$ est une cofibration dans $\mathbf{C}$. Par symétrie, on peut utilise le même argument pour pouvoir supposer que j est de la forme $F_m(l)$ où $l\colon C \to D$ est aussi une cofibration dans $\mathbf{C}$. Les propriétés des foncteurs $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ impliquent qu'alors (i, j) s'identifie au morphisme $F_{n+m}\varphi$ où φ est le morphisme canonique $(B \wedge C) \coprod_{A\wedge C}(A \wedge D) \to B \wedge D$. Comme φ est une cofibration dans $\mathbf{C}$, (i, j) est une cofibration stable.

2. La cofibre de (i, j) est $(B/A) \wedge (C/D)$. D'après le lemme 1.26 (que l'on peut utiliser car les cofibrations stables sont des cofibrations injectives), il suffit de montrer que si A est un objet tel que $\bullet \to A$ est une cofibration stable triviale et que i est une cofibration stable, alors $A \wedge i$ est une cofibration triviale. Comme précédemment, on peut supposer que $i = F_n j$ avec $j\colon K \to L$ une cofibration dans $\mathbf{C}$. En utilisant des adjonctions, il suffit de montrer que $\theta\colon \mathbf{Hom}(L, X)[n] \to \mathbf{Hom}(K, X)[n] \times_{\mathbf{Hom}(K,Y)[n]} \mathbf{Hom}(L, Y)[n]$ est une fibration stable pour toute fibration stable $p\colon X \to Y$. Il suffit en fait de montrer que $U\theta$ est une fibration stable. Comme $-[n]$ préserve les fibrations stables dans la catégorie $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$, il suffit de montrer que $\mathbf{Hom}(L, UX) \to \mathbf{Hom}(K, UX) \times_{\mathbf{Hom}(K,UY)} \mathbf{Hom}(L, UY)$ est une fibration stable, mais cela résulte formellement du fait que pour tout objet W dans $\mathbf{C}$, le foncteur $- \wedge W$ préserve les cofibrations stables triviales de $\mathbf{Spect}^{\mathbb{N}}_T(\mathbf{C})$ (ce qui peut se ramener à montrer que $\mathbf{Hom}(W, -)$ préserve les objets stablement fibrants dans $\mathbf{Spect}^{\mathbb{N}}_T(\mathbf{C})$). □

Il résulte du lemme précédent que les foncteurs $-\wedge Y$ et $X\wedge-$ préservent les cofibratiosn triviales entre objets stablements cofibrants dans $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$ pour tous objets X et Y dans $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$. Par le Ken Brown's lemma, ces foncteurs préservent en fait toutes les équivalences stables entre objets stablement cofibrants. La définition suivante a donc un sens.

Définition 2.2. — On note $-\overset{\mathbf{L}}{\wedge}-\colon \mathbf{SH}^{\Sigma}(S) \times \mathbf{SH}^{\Sigma}(S) \to \mathbf{SH}^{\Sigma}(S)$ le foncteur dérivé total à gauche du bifoncteur $-\wedge-\colon \mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C}) \times \mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C}) \to \mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$ pour la structure stable sur $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$.

Ainsi, pour tous objets stablement cofibrants X et Y de $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$, le morphisme canonique $X \overset{\mathbf{L}}{\wedge} Y \to X \wedge Y$ est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}^{\Sigma}(S)$. Le théorème suivant est une formalité compte tenu de ce qui a déjà été établi :

Théorème 2.3. — *Le bifoncteur $-\overset{\mathbf{L}}{\wedge}-$ munit $\mathbf{SH}^{\Sigma}(S)$ d'une structure de catégorie monoïdale symétrique. De plus, le foncteur $F_0\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$ induit un foncteur monoïdal symétrique $(\mathbf{Ho}(\mathbf{C}), \wedge, S^0_{\mathrm{s}}) \to (\mathbf{SH}^{\Sigma}(S), \overset{\mathbf{L}}{\wedge}, \mathbf{T})$.*

3. Équivalence entre les catégorie $\mathbf{SH}(S)$ et $\mathbf{SH}^{\Sigma}(S)$

3.1. Plan de la démonstration. — Il s'agit de démontrer le théorème suivante, qui a pour corollaire l'existence d'une structure monoïdale sur $\mathbf{SH}(S)$:

Théorème 3.1. — *(V, U) est une équivalence de Quillen entre les catégories de modèles stables $\mathbf{Spect}^{\mathbb{N}}_T(\mathbf{C})$ et $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{C})$.*

Les résultats précédents impliquent le lemme suivant :

Lemme 3.2. — *(V, U) est une adjonction de Quillen, c'est-à-dire que V préserve les cofibrations stables et U les fibrations stables. De plus, U préserve et reflète les équivalences stables entre objets fibrants et V préserve les équivalences stables.*

Pour démontrer le théorème, nous allons utiliser le lemme suivant (voir [**HSS**]) :

Lemme 3.3. — *Soit $(-)_s$ un foncteur de résolution fibrante dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$. Supposons que pour tout X stablement cofibrant dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, la composée $X \overset{\mathrm{ad}}{\to} UVX \to U((VX)_s)$ soit une équivalence stable. Alors, (V,U) est une équivalence de Quillen.*

Démonstration. — Pour montrer ce lemme, il suffit de contempler le diagramme commutatif suivant, où X est un objet stablement cofibrant dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, Y un objet stablement fibrant dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, et $f\colon X \to UY$, $g\colon VX \to Y$ deux morphismes se correspondant par adjonction :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[dr] & UVX \arrow[r, "Ug"] \arrow[d] & UY \arrow[d] \\
& U((VX)_s) \arrow[r, "U(g_s)"] & U(Y_s)
\end{tikzcd}$$

En effet, on voit alors aussitôt que f est une équivalence stable si et seulement si g est une équivalence stable. □

Il ne reste plus qu'à montrer que pour tout objet X de $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, le morphisme fonctoriel $\varphi_X\colon X \to U((VX)_s)$ est une équivalence stable. Ceci est équivalent à montrer qu'il existe une (resp. que pour toute) résolution stablement fibrante $VX \to W$ de VX dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$, le morphisme composé $X \overset{\mathrm{ad}}{\to} UVX \to UW$ est une équivalence stable. L'idée de la démonstration va consister à démontrer que φ_{L_nX} est une équivalence stable, où (L_nX) est la *layer* filtration de X (autrement dit, $L_nX = (X^0, \dots, X^n, T \wedge X^n, T \wedge T \wedge X^n, \dots)$. En passant à la limite, on obtiendra que φ_X est une équivalence stable. On se ramènera ensuite au cas $n = 0$.

3.2. Réduction au cas $n = 0$. — Le lemme suivant ramène le théorème à la vérification du fait que φ_{L_nX} est une équivalence stable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.4. — *Soit $X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$ un système inductif dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$ indexé par $\mathbb{N}$ dont on note X la colimite. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_{X_n} est une équivalence stable. Alors, φ_X est une équivalence stable.*

Démonstration. — Admettons que les colimites indexées par $\mathbb{N}$ préservent les équivalences stables dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$ et dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ (voir [**Ja1**, lemme 3.12] pour une preuve dans le cas de $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$ s'adaptant parfaitement au cas de la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$).

Après examen attentif de la situation, on se rend compte qu'il suffit de montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système inductif indexé par $\mathbb{N}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ formé d'objets stablement fibrants, si on note A la colimite de ce système, alors pour toute résolution stablement fibrante $j\colon A \to A_s$, alors $A \to A_s$ est en fait une équivalence injective. En utilisant un argument du petit objet, on construit un morphisme $f\colon A \to A'$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ tel que f possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations niveau par niveau (ce que nous pourrions appeler fibrations projectives dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$), et A' fibrant niveau par niveau. En particulier, f est une équivalence injective. Comme A_s est stablement fibrant, il est en particulier fibrant niveau par niveau, ainsi, on obtient l'existence d'un triangle commutatif dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & A_s \\
A' \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que UA' est un Ω-spectre, ce qui résulte aisément du théorème de Brown-Gersten (f induisant des isomorphismes sur les « groupes d'homotopie naïfs »). □

Lemme 3.5. — *Si $f\colon X \to Y$ est une équivalence stable dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, alors φ_X est une équivalence stable si et seulement si φ_Y est une équivalence stable.*

Démonstration. — Comme V préserve les équivalences stables, $(VX)_s \to (VY)_s$ est une équivalence injective. Donc, $U(VX_s) \to U(VY_s)$ est une équivalence stable, d'où le résultat. □

Lemme 3.6. — *Un morphisme g dans $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$ est une équivalence stable si et seulement si $g \wedge T$ est une équivalence stable.*

Démonstration. — Si g est une équivalence stable, $g \wedge T$ est une équivalence stable grâce à la formule $\hom(X \wedge T, W) = \hom(X, \Omega_T W)$ et au fait que Ω_T préserve les objets stablement et injectivement fibrants (car $- \wedge T$ préserve les cofibrations injectives triviales).

Pour la réciproque, on utilise le fait que si W est injectivement et stablement fibrant, alors $\Omega_T W[1]$ et $W[1]$ aussi, et le fait que $\psi \colon W \to \Omega_T W[1]$ est une équivalence injective (UW étant un Ω-spectre). □

Corollaire 3.7. — *Soit X un objet de $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{C})$. Le morphisme évident $\eta \colon X \to \Omega_T((X \wedge T)_s)$ est une équivalence stable.*

Démonstration. — Considérons le triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \wedge T \arrow[r, "\eta \wedge T"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega_T((X \wedge T)_s) \wedge T \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ & (X \wedge T)_s \end{tikzcd}$$

j est une équivalence stable, de même que ev d'après les propriétés de la structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, donc $\eta \wedge T$ est aussi une équivalence stable. Ainsi, η est une équivalence stable d'après le lemme précédent. □

Corollaire 3.8. — *Pour tout objet X de $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, φ_X est une équivalence stable si et seulement si $\varphi_{X \wedge T}$ est une équivalence stable.*

Démonstration. — Cela résulte assez formellement du lemme et du corollaire précédents (*cf.* [**Ja1**, lemme 4.27]). □

Corollaire 3.9 **(Réduction au cas $n = 0$).** — *Si $\varphi_{\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K}$ est une équivalence stable pour tout $K \in \mathbf{C}$, alors pour tout $X \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$, φ_X est une équivalence stable.*

Démonstration. — Pour tout $K \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a une équivalence stable de T-spectres $\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K[-n] \wedge T^{\wedge n} \to \Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K$, et pour tout $X \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$ et $n \in \mathbb{N}$, on a une équivalence stable de T-spectres $\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} X^n[-n] \to L_n X$. Ainsi, d'après ce qui précède, $\varphi_{L_n X}$ est une équivalence stable, ce qui petmet de conclure. □

La démonstration du théorème envisagé se ramène donc à démontrer que $\varphi_{\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K}$ est une équivalence stable pour tout $K \in \mathbf{C}$.

3.3. Fin de la démonstration : cas $n = 0$. — Il s'agit de la partie la plus délicate de la démonstration.

Définition 3.10. — Un T-bispectre est une famille $(X^{r,s})_{(r,s) \in \mathbb{N}^2}$ d'objets de $\mathbf{C}$, munis de morphismes d'assemblages $\sigma_h \colon T \wedge X^{r,s} \to X^{r+1,s}$ et $\sigma_v \colon T \wedge X^{r,s} \to X^{r,s+1}$ pour tous $r, s \in \mathbb{N}$, tels que pour tous $r, s \in \mathbb{N}$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} T \wedge X^{r,s+1} \arrow[rr, "\sigma_h"] & & X^{r+1,s+1} \\ T \wedge T \wedge X^{r,s} \arrow[u, "T \wedge \sigma_v"] \arrow[dr, "\tau \wedge \mathrm{Id}"] & & \\ & T \wedge T \wedge X^{t,s} \arrow[r, "T \wedge \sigma_h"] & T \wedge X^{r+1,s} \arrow[uu, "\sigma_v"'] \end{tikzcd}$$

On dispose d'une notion de évidente de catégorie des T-bispectres, que l'on notera $\mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$.

Si X est un T-spectre, on peut définir un T-spectre $T\tilde{\wedge}X$ défini par $(T\tilde{\wedge}X)^n = T \wedge X^n$, le morphisme d'assemblage $T \wedge (T \wedge X^n) \to T \wedge X^{n+1}$ étant égal au composé $T \wedge T \wedge X^n \overset{\tau\wedge\mathrm{Id}}{\to} T \wedge T \wedge X^n \overset{T\wedge\sigma}{\to} T \wedge X^{n+1}$. On peut vérifier que $T\tilde{\wedge}X$ est canoniquement isomorphe (comme T-spectre) à $X \wedge T$.

Le lemme suivant est évident :

Lemme 3.11. — *Se donner un T-bispectre $X^{\bullet,\bullet}$ équivaut à se donner, pour tout $r \in \mathbb{N}$, un T-spectre $X^{r,\bullet}$ et un morphisme de T-spectres $T\tilde{\wedge}X^{r,\bullet} \to X^{r+1,\bullet}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.*

On peut aussi voir ce lemme dans l'autre sens, à savoir en voyant plutôt un T-bispectre comme une famille de T-spectres correspondant aux « lignes » (et non aux colonnes) munis dé morphismes d'assemblage verticaux.

Soit f un morphisme dans $\mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$. On dit que f est une fibration projective si et seulement si pour tous $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, $f^{r,s}$ est une fibration dans $\mathbf{C}$. On dit que c'est une équivalence projective si les $f^{r,s}$ sont des équivalences faibles. On dit enfin que c'est une cofibration projective si f possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations projectives qui sont aussi des équivalences projectives.

Lemme 3.12. — *La catégorie $\mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$ munie des équivalences projectives, des fibrations projectives et des cofibrations projectives est une catégorie de modèles fermée propre.*

Remarque 3.13. — On peut caractériser les cofibrations projectives (resp. cofibrations projectives triviales) dans $\mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$ de la même manière qu'on le fait classiquement dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$.

Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 3.14. — *Soit ξ le fibré vectoriel trivial de rang 1 sur S et T l'espace de Thom de ξ. Alors, la permutation circulaire sur $T^{\wedge 3}$ vaut l'identité dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$.*

Ainsi, pour tout objet $X^{\bullet,\bullet}$ de $\mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$ et $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, le carré suivant de $\mathbf{C}$ devient commutatif dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$:

$$\begin{tikzcd}
X^{r,s} \arrow[r, "\sigma_h^\star"] \arrow[d, "\Omega_T(\sigma_v^\star\sigma_v^\star)"'] & \Omega_T X^{r+1,s} \arrow[d, "\Omega_T(\Omega_T(\sigma_v^\star)\sigma_v^\star)"] \\
\Omega_T^2 X^{r,s+2} \arrow[r, "\Omega_T^2\sigma_h^\star"] & \Omega_T^3 X^{r+1,s+2}
\end{tikzcd}$$

On peut alors considérer le système inductif dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ indexé par $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ de terme général $Z^{p,q} = \Omega_T^{p+2q} X^{r+s,s+2q}$, le morphisme $Z^{p,q} \to Z^{p+1,q}$ étant $\Omega_T^{p+2q}(\sigma_h^\star)$ et le morphisme $Z^{p,q} \to Z^{p,q+1}$ étant $\Omega_T^{p+2q}(\Omega_T(\sigma_v^\star)\sigma_v^\star)$.

On définit enfin $\hat{\pi}_j^{r,s}(X^{\bullet,\bullet}$ comme étant la limite inductive (filtrante à droite) du système inductif $\pi_j Z^{p,q}$, $\pi_j F$ désignant le j-ième faisceau d'homotopie d'un faisceau simplicial $\mathbb{A}^1$-fibrant F.

On peut étendre cette définition à tout T-bispectre $X^{\bullet,\bullet}$ en remplaçant $X^{\bullet,\bullet}$ par une résolution fibrante. Les $\hat{\pi}_\bullet^{\bullet,\bullet}$ constituent ainsi une famille de foncteurs covariants de $\mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$ vers la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur le site $\mathbf{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$.

Définition 3.15. — Un morphisme f dans $\mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$ est une équivalence stable si et seulement si $\hat{\pi}_j^{r,s}(f)$ est un isomorphisme pour tous $r,s,j \in \mathbb{N}^2$.

On remarquera que les faisceaux $\hat{\pi}_j^{r,s}(X^{\bullet,\bullet})$ s'identifient à des colimites de faisceaux d'homotopie stable des T-spectres colonnes de $X^{\bullet,\bullet}$ (et aussi des lignes). On dit qu'un T-bispectre est stablement fibrant si et seulement s'il est projectivement fibrant et que ses lignes ainsi que ses colonnes sont des T-spectres stablement fibrants.

À un T-spectre Z, on peut associer un T-bispectre $\Sigma_{\mathrm{T}}^\infty Z$ façon évidente de sorte que ses colonnes soient les T-spectres $(Z, T\tilde{\wedge}Z, T\tilde{\wedge}(T\tilde{\wedge}Z), \dots)$. Le lemme suivant est clair.

Lemme 3.16. — *Soit $Z \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$ et $Y \in \mathbf{BiSp}(\mathbf{C})$. On suppose Y stablement fibrant. Soit un morphisme de T-bispectres $g\colon \Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} Z \to Y$ (c'est-à-dire un morphisme de T-spectres $g^{0,\bullet}\colon Z \to Y^{0,\bullet}$). Si g est une équivalence stable de T-bispectres, alors $g^{0,\bullet}\colon Z \to Y^{0,\bullet}$ est une équivalence stable.*

Lemme 3.17. — *Pour tout $K \in \mathbf{C}$, le morphisme $\varphi_{\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K}\colon \Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K \to U((V\,\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K)_s)$ est une équivalence stable dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(\mathbf{C})$.*

Esquisse de preuve du lemme. — La flèche $\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K \to UV(\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} K)$ est un isomorphisme, ainsi, il suffit de montrer que la flèche $U(F_0K) \to U((F_0K)_s)$ est une équivalence stable. On définit un T-bispectre $\mathscr{S}^{\bullet,\bullet}$ dont les colonnes sont des T-spectres symétriques en posant $\mathscr{S}^{n,\bullet} = (F_0K) \wedge T^{\wedge n}$; ainsi $\mathscr{S}^{r,s} = T^{\wedge s} \wedge K \wedge T^{\wedge r}$. On sait qu'il existe un foncteur $\mathscr{L}$ de résolution fibrante sur $\mathbf{C}$ qui est tel que pour tout $X \in \mathbf{C}$ et $K \in \mathbf{C}$, il existe un morphisme canonique $\mathscr{L}X \wedge K \to \mathscr{L}(X \wedge K)$ satisfaisant certaines conditions [**Ja1**, section 1.2]. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on a une résolution stablement fibrante $T^{\wedge s} \wedge K \wedge T^{\bullet} \to \mathscr{L}Q_T\mathscr{L}(T^{\wedge s} \wedge K \wedge T^{\bullet}))$. En utilisant les propriétés des foncteurs Q_T et $\mathscr{L}$, ces morphismes de T-spectres définissent un morphisme $\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty}(F_0K) \to Y^{\bullet,\bullet}$ de T-bispectres dont les colonnes sont des T-spectres symétriques avec $Y^{\bullet,\bullet} = \mathscr{L}Q_T\mathscr{L}(\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty}(F_0K))$. Les lignes de $Y^{\bullet,\bullet}$ sont des T-spectres stablement fibrants. On voit que les morphismes $Y^{\bullet,s} \to \Omega_T Y^{\bullet,s+1}$ adjoints des morphismes d'assemblages sont des équivalences stables, donc des équivalences projectives car les lignes de $Y^{\bullet,\bullet}$ sont des T-spectres stablement fibrants. Ainsi, $Y^{\bullet,\bullet}$ est stablement fibrant. Par conséquent, le T-spectre symétrique $Y^{0,\bullet}$ est stablement fibrant. Le lemme précédent appliqué au morphisme $\Sigma_{\mathrm{T}}^{\infty} F_0K \to Y^{\bullet,\bullet}$ implique que $U(F_0K) \to U(Y^{0,\bullet})$ est une équivalence stable, d'où le résultat. □

Bibliographie

[HSS] **Mark Hovey**, **Brooke Shipley**, **Jeff Smith**. Symmetric spectra. *Journal of the American Mathematical Society*, **13** (2000), Numéro 1, pages 149–208.

[Ja1] **John F. Jardine**. Motivic symmetric spectra. *Documenta Mathematica*, **5** (2000), pages 445–552.

[Ja2] **John F. Jardine**. Presheaves of symmetric spectra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **150** (2000), pages 35–87.

Les 6 et 13 juin 2001

JOËL RIOU, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *Url :* `http://www.eleves.ens.fr/home/jriou/`
• *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~riou/`
• *E-mail :* `riou@math.jussieu.fr`