Onzième exposé du groupe de lecture

Étude des polynômes harmoniques et analyse de $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$ en tant que représentation de $\mathcal{SO}(n)$.

JOËL RIOU

14 janvier 2000

Résumé

Grâce aux séries de FOURIER, on connaît la décomposition suivante $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1) \cong \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})) = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}^{\perp} \mathbb{C}Z^n}$. On se propose ici d'étudier la décomposition de $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$ en tant que représentation unitaire de $\mathcal{SO}(n)$ dans le cas où $n \geq 3$.

1 Introduction

1.1 La représentation unitaire $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$ de $\mathcal{SO}(n)$

Définition 1.1 (Représentation unitaire) *Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme de groupes $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}(H)$ avec $\mathcal{U}(H)$ groupe unitaire de l'espace de* HILBERT *H tel que pour tout $x \in H$, $\left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ g & \longmapsto & \pi_g(x) \end{array}\right.$ soit continue.*

Définition 1.2 (Représentation irréductible) *Une représentation $H \neq \{0\}$ est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces fermés invariants de H sont $\{0\}$ et H.*

Définition 1.3 (Somme directe interne) *On dit que la représentation unitaire H est la somme directe de $(H_i)_{i\in I}$ si et seulement si*

- *Pour tout $i \in I$, H_i est un sous-espace fermé de H G-invariant.*
- *Les espaces $(H_i)_{i\in I}$ sont orthogonaux.*
- *$H = \overline{\bigoplus_{i\in I} H_i}$*

Définition 1.4 (Sphère)

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![\qquad \mathbb{S}^{n-1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i\in[\![1,n]\!]} x_i^2 = 1 \right\}$$

Rappel 1.1 *On peut définir une mesure de surface σ sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, invariante par l'action du groupe $\mathcal{O}(n)$. On notera $L^2(\mathbb{S}^{n-1}) = L^2(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1}), \sigma)$, l'espace de* LEBESGUE *muni du produit scalaire complexe suivant :*

$$\forall (f,g) \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \qquad \langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{f} g \, d\sigma$$

Propriété 1.1 *Pour $n \geq 3$, on définit sur $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ une représentation unitaire π de $G = \mathcal{SO}(n)$ ainsi :*

$$\forall g \in G \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \qquad \pi_g(f) = f \circ g^{-1}$$

Démonstration.

σ étant invariante sous l'action de G, on obtient immédiatement que $\|\pi_g(f)\| = \|f\|$.

Pour toute $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$, considérons $g \longmapsto \pi_g(f) = f \circ g^{-1}$. Pour montrer la continuité de cette application, d'après l'égalité précédente, il suffit de montrer la continuité en e. Moyennant la continuité de l'inversion dans $\mathcal{SO}(n)$, il suffit en fait de montrer que $f \circ g$ tend vers f quand g tend vers e. Dans un premier temps, montrons que c'est vrai pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{C})$. Comme $\mathbb{S}^{n-1}$ est un compact, f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{S}^{n-1})^2$, $\|x - y\| \leq \eta$ implique $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. Si $\|g - e\| \leq \eta$, on obtient $\|f - f \circ g\| \leq \varepsilon\sqrt{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}$.

Maintenant, soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$, par densité de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que f_n converge dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$ vers f. Lorsque $g \in \mathcal{SO}(n)$ tend vers e, on vient de montrer que $f_n \circ g$ tend vers f_n. De plus, lorsque n tend vers $+\infty$, $f_n \circ g$ converge *uniformément* en $g \in \mathcal{SO}(n)$ vers $f \circ g$, car $\pi_{g^{-1}}$ est une isométrie. On peut appliquer le théorème d'interversion des limites, ce qui prouve que $f \circ g$ converge dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$ vers f lorsque g tend vers e.

$$\begin{tikzcd}
f_n \circ g \arrow[r] \arrow[d] & f \circ g \arrow[d, "g \longrightarrow e"] \\
f_n \arrow[r, "n \longrightarrow +\infty"] & f
\end{tikzcd}$$

□

1.2 Polynômes homogènes, polynômes harmoniques

Définition 1.5 (Polynômes homogènes) *Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, on définit l'ensemble $\mathcal{Q}_m^n$ des polynômes homogènes de degré m comme le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les monômes $\prod_{i\in[\![1,n]\!]} X_i^{\alpha_i}$ avec $\alpha = (\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{i\in[\![1,n]\!]} \alpha_i = m$.*

Définition 1.6 *Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, on note P_α le coefficient dans P du monôme $\prod_{i\in[\![1,n]\!]} X_i^{\alpha_i}$*

Définition 1.7 (Opérateurs différentiels) *Pour une fonction f qui est dans $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ avec E espace euclidien et $\mathcal{U}$ un ouvert de E, on peut définir le gradient de f en $x \in \mathcal{U}$ comme étant le vecteur noté $\nabla f(x)$ qui représente la forme linéaire df_x différentielle de f en x. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, on définit $\nabla f = \nabla(\Re f) + \imath\nabla(Im\ f)$.*

Pour une fonction f qui est dans $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, E)$ avec E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{U}$ un ouvert de E, on peut définir la divergence $div\, f(x)$ de f en $x \in \mathcal{U}$ comme étant la trace de df_x.

Pour une fonction f qui est dans $\mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, avec E espace euclidien et $\mathcal{U}$ un ouvert de E, on peut définir le laplacien de f en $x \in \mathcal{U}$ comme étant le réel $\Delta f(x) = div\, \nabla f(x)$. Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, on définit $\Delta f = \Delta(\Re f) + \imath\Delta(Im\ f)$.

Propriété 1.2 *Pour $E = \mathbb{R}^n$, on note ∂_i l'opérateur de différentiation par rapport à la i-ème coordonnée. Dans ce cas, les expressions analytiques des opérateurs* *gradient et laplacien sont :*

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{bmatrix} \qquad \Delta = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} \partial_i^2$$

Définition 1.8 (Polynômes harmoniques) *Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $\mathcal{H}_m^n$ des polynômes harmoniques homogènes de degré m en les indéterminées $X_1, \ldots, X_n$ ainsi :*

$$\mathcal{H}_m^n = \{P \in \mathcal{Q}_m^n, \Delta P = 0\}$$

On va s'intéresser aux restrictions des fonctions polynômiales des éléments de $\mathcal{Q}_m^n$ et $\mathcal{H}_m^n$ à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$:

Définition 1.9

$$\tilde{\mathcal{Q}}_m^n = \left\{P_{/\mathbb{S}^{n-1}}, P \in \mathcal{Q}_m^n\right\} \subset L^2\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$$
$$\tilde{\mathcal{H}}_m^n = \left\{P_{/\mathbb{S}^{n-1}}, P \in \mathcal{H}_m^n\right\} \subset L^2\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$$

Propriété 1.3 *$\tilde{\mathcal{Q}}_m^n$ et $\tilde{\mathcal{H}}_m^n$ sont des espaces vectoriels (de dimension finie) G-invariants.*

Démonstration. Le caractère polynômial homogène de degré m de ces fonctions est conservé par composition avec des applications linéaires. De plus, la définition intrinsèque du laplacien permet de dire que si $f \in \mathcal{H}_m^n$ et $g \in \mathcal{SO}(n)$ alors $\Delta\left(f \circ g^{-1}\right) = 0$. Ceci provient en fait du calcul plus général suivant, $\nabla(f \circ g)(x) = g^\star(\nabla f(g(x)))$. La différentielle en x de $\nabla(f \circ g)$ est donc $g^{-1} \circ \left(d(\nabla f)_{(g(x))}\right) \circ g$, le calcul de la trace donne :

$$\forall g \in G \qquad \Delta(f \circ g) = (\Delta f) \circ g$$

□

Il s'agit de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.1 *La représentation unitaire $L^2\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ de $\mathcal{SO}(n)$ est la somme directe des sous-représentations irréductibles $\tilde{\mathcal{H}}_m^n$ pour $m \in \mathbb{N}$.*

1.3 Une condition suffisante d'irréductibilité de sous-représentations de $\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$

Définition 1.10 (Pôle Nord) *On note N le pôle Nord de $\mathbb{S}^{n-1}$:*

$$N = (0, \ldots, 0, 1)$$

Définition 1.11

$$G_N = \{g \in G, gN = N\} \cong \mathcal{SO}(n-1)$$

Définition 1.12 *Si H est un sous-espace de $L^2\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ de dimension finie et G-invariant, on définit un sous-espace H^N de H ainsi :*

$$H^N = \{f \in H, \forall g \in G_N \quad \pi_g(f) = f\}$$

Propriété 1.4 *Soit $H \neq \{0\}$ un sous-espace de $\mathcal{C}\left(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{C}\right) \subset L^2\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ de dimension finie et G-invariant, alors $H^N \neq \{0\}$, et si $\dim H^N = 1$ alors H est une sous-représentation irréductible de G.*

Démonstration. Supposons que $H \neq \{0\}$, il existe donc $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $f \in H$ telle que $f(x) \neq 0$. Du fait que l'action de G est transitive sur $\mathbb{S}^{n-1}$, il existe finalement $h \in H$ telle que $h(N) \neq 0$. On note ensuite

$$\forall x \in \mathbb{S}^{n-1} \qquad \tilde{h}(x) = \int_{G_N} h(g(x))\, d\mu(g) \qquad \mu \text{ étant la mesure de } \textsc{Haar} \text{ de } G_N$$

On remarque que $\tilde{h} \neq 0$ car $\tilde{h}(N) \neq 0$, et que $\tilde{h} \in H^N$, donc $\dim H^N \geq 1$

Par contraposition, supposons que l'on possède une sous-représentation de dimension finie non irréductible H avec un sous-espace G-invariant propre V, on a $H = V \oplus W$ avec $W = V^{\perp} \cap H$. V et W sont des espaces G-invariants (car la représentation est unitaire). Ainsi V^N et W^N sont tous les deux contenus dans H^N qui est par conséquent de dimension supérieure ou égale à 2. □

2 Construction d'une décomposition de $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$ en somme directe de représentations $(\mathcal{K}_m)_{m\in\mathbb{N}}$

2.1 Définition et propriétés d'espaces $(\mathcal{K}_m)_{m\in\mathbb{N}}$

Définition 2.1

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{K}_m = \left(\tilde{\mathcal{Q}}^n_{m-2}\right)^{\perp} \bigcap \tilde{\mathcal{Q}}^n_m$$

Définition 2.2 *En appliquant la méthode d'orthogonalisation de* Gram-Schmidt *à la suite $(X_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans l'espace hilbertien $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, on obtient une suite orthonormale de polynômes $(R_m(X_n))_{m\in\mathbb{N}}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}, deg\ R_m = m$.*

Propriété 2.1 *Les espaces $(\mathcal{K}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifient les propriétés suivantes*
- *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_m$ est un sous-espace G-invariant de dimension finie.*
- *$(\mathcal{K}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ constitue une somme directe orthogonale, avec de surcroît*

$$\tilde{\mathcal{Q}}^n_m = \bigoplus_{k\in[\![0,\lfloor \frac{m}{2}\rfloor]\!]} \mathcal{K}_{m-2k}$$

- *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_m^N = \mathbb{C}R_m(X_n)$, donc $\mathcal{K}_m$ est irréductible.*
- $\overline{\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_m} = L^2(\mathbb{S}^{n-1})$

Nous allons maintenant nous consacrer à la démonstration de ces propriétés.

Le fait que $\mathcal{K}_m$ soit G-invariant provient essentiellement du fait que les espaces $\tilde{\mathcal{Q}}^n_m$ et $\tilde{\mathcal{Q}}^n_{m-2}$ sont G-invariant, et que $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$ est une représentation unitaire.

2.2 Orthogonalité des $(\mathcal{K}_m)_{m\in\mathbb{N}}$

Définition 2.3

$$L_n = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} X_i^2 \in \mathcal{Q}^n_2$$

L'égalité suivante est une conséquence immédiate des définitions ! (Une fois que l'on a remarqué que $\mathcal{Q}^n_{m-2} = L_n\mathcal{Q}^n_{m-2} \subset \mathcal{Q}^n_m$).

$$\tilde{\mathcal{Q}}^n_m = \bigoplus_{k\in[\![0,\lfloor \frac{m}{2}\rfloor]\!]} \mathcal{K}_{m-2k}$$

On peut en déduire que si p et q sont deux entiers distincts de même parité, alors $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_q$ sont orthogonaux.

Pour prouver que ce résultat reste vrai même si p et q sont de parité différente, il suffit de prouver que la valeur moyenne d'un monôme de degré impair est nulle sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, ce qui est trivial.

2.3 Densité de $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_m$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$

Ce résultat précédent permet de procéder à l'identification suivante :

$$\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_m = \sum_{m\in\mathbb{N}} \tilde{\mathcal{Q}}_m^n$$

$\overset{\perp}{\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}} \mathcal{K}_m = \sum_{m\in\mathbb{N}} \tilde{\mathcal{Q}}_m^n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{C})$ contenant la fonction constante égale à 1, séparante et invariante par conjugaison. Comme $\mathbb{S}^{n-1}$ est un compact, le théorème de Stone-Weierstrass permet de dire que $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_m$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{C})$ pour la norme de la convergence uniforme, donc a fortiori pour la norme de l'espace de Lebesgue de $\mathbb{S}^{n-1}$. Comme $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{C})$ est dense dans cet espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$, on arrive à la conclusion suivante :

$$\overline{\overset{\perp}{\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}} \mathcal{K}_m} = \mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{n-1})$$

2.4 Propriétés de polynômes invariants

Lemme 2.1 *Soit $n \geq 2$, et $P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ tel que P soit invariant sous l'action de $\mathcal{SO}(n)$. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que*

$$P = Q(L_n)$$

Démonstration. Notons $H(X) = P(X,0,\dots,0)$. On remarque que $H(X) = H(-X)$ car P est invariant sous l'action de $g = \mathrm{Diag}(-1,-1,1,\dots,1) \in \mathcal{SO}(n)$, car $n \geq 2$. Il existe donc un polynôme $G \in \mathbb{C}[X]$ tel que $H(X) = G(X^2)$.

On utilise ensuite le fait que l'action de $\mathcal{SO}(n)$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est transitive (car $n \geq 2$) pour voir que

$$P = Q(L_n)$$

$\square$

Lemme 2.2 *Soit $m \in \mathbb{N}$, $K = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ et $P \in \mathcal{Q}_m^n$ tel que $P_{/\mathbb{S}^{n-1}}$ soit G_N-invariant, alors il existe des complexes $(a_k)_{k\in[\![0,K]\!]}$ tels que :*

$$P = \sum_{k\in[\![0,K]\!]} a_k L_n^k X_n^{m-2k}$$

Démonstration. Il existe des uniques polynômes $(P_j)_{j\in[\![0,m]\!]} \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_{n-1}]$ tels que

$$P = \sum_{j\in[\![0,m]\!]} P_j X_n^j \qquad P_j \in \mathcal{Q}_{m-j}^{n-1}$$

Pour tout $g \in G_N$, $P \circ g$ est un polynôme qui coïncide avec P sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Comme ces deux polynômes sont homogènes de degré m, on a l'égalité algébrique $P = P \circ g$. On peut en déduire que les polynômes P_j sont invariants sous l'action de G_N qui s'identifie avec $\mathcal{SO}(n-1)$. D'après le lemme précédent que l'on peut utiliser car $n \geq 3$, ces polynômes s'expriment polynômialement en fonction de L_{n-1}. Or, les polynômes P_j sont homogènes de degré $m-j$. Donc si $m-j$ est impair, $P_j = 0$, et si $m-j$ est pair, il existe $b_j \in \mathbb{C}$ tel que $P_j = b_j L_{n-1}^{\frac{m-j}{2}}$. Finalement, on a le résultat suivant :

$$P = \sum_{k\in[\![0,K]\!]} b_{m-2k}\left(L_n - X_n^2\right)^k X_n^{m-2k}$$

□

La conséquence triviale de ces lemmes et de l'orthogonalité des $\mathcal{K}_m$ est que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{K}_m^N = \mathbb{C}R_m(X_n)$$

3 Identification $\mathcal{K}_m = \tilde{\mathcal{H}}_m^n$

3.1 Une propriété des polynômes harmoniques

Propriété 3.1 *Soit $m \in \mathbb{N}$, $K = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, on a la décomposition suivante :*

$$\mathcal{Q}_m^n = \bigoplus_{k\in[\![0,K]\!]} L_n^k \mathcal{H}_{m-2k}^n$$

Démonstration.

Lemme 3.1

$$\forall m \in \mathbb{N}^\star \qquad dim\ \mathcal{H}_m^n = dim\ \mathcal{Q}_m^n - dim\ \mathcal{Q}_{m-2}^n$$

Démonstration. En appliquant le théorème du rang à $\Delta \in \mathrm{Hom}\left(\mathcal{Q}_m^n, \mathcal{Q}_{m-2}^n\right)$, il reste à montrer que Δ est surjectif.

Si on note $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, on peut définir ainsi un produit hermitien sur $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ par

$$< P, Q > = \sum_\alpha \alpha! \overline{P_\alpha} Q_\alpha$$

Montrons que pour ce produit hermitien, $(P \longmapsto L_n P) = \Delta^\star$, c'est-à-dire que pour tous $(P,Q) \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, $< P, \Delta Q > = < L_n P, Q >$.

Soient $P = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ et $Q = X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}$.

$$L_n P = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} X_1^{\alpha_1} \dots X_i^{\alpha_i+2} \dots X_n^{\alpha_n} \qquad \Delta Q = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} \beta_i(\beta_i - 1) X_1^{\beta_1} \dots X_i^{\beta_i-2} \dots X_n^{\beta_n}$$

Il existe au plus un i tel que $(\beta_1,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_i+2,\dots,\alpha_n)$. Si un tel i n'existe pas, on a : $< P, \Delta Q > = < L_n P, Q > = 0$. Si un tel i existe, on a : $< P, \Delta Q > = < L_n P, Q > = \beta!$.

Montrons maintenant que pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$

$$\mathcal{Q}_{m-2}^n \cap \Delta(\mathcal{Q}_m^n)^\perp = \{0\}$$

Soit $P \in \mathcal{Q}_{m-2}^n$ tel que $\forall Q \in \mathcal{Q}_m^n$, $< P, \Delta Q > = < L_n P, Q > = 0$. Comme $L_n P \in \mathcal{Q}_m^n$, on a $L_n P = 0$ et $P = 0$.

On a donc montré que $\Delta(\mathcal{Q}_m^n) = \mathcal{Q}_{m-2}^n$. □

Montrons que pour tout $m \geq 2$, $\mathcal{Q}_m^n = \mathcal{H}_m^n \oplus L\mathcal{Q}_{m-2}^n$. D'après le lemme, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{H}_m^n \cap L\mathcal{Q}_{m-2}^n = \{0\}$. En effet, soit $H \in \mathcal{Q}_{m-2}^n$ tel que $\Delta(L_n H) = 0$, on a $< H, \Delta(L_n H) > = < L_n H, L_n H > = 0$, donc $L_n H = 0$.

Montrons le résultat par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. Le résultat est évident pour $m \in \{0,1\}$. Soit maintenant $m \geq 2$, on pose $K = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, on a établi les résultats suivants :

$$\mathcal{Q}_m^n = \mathcal{H}_m^n \oplus L_n \mathcal{Q}_{m-2}^n \qquad \mathcal{Q}_{m-2}^n = \bigoplus_{k\in[\![0,K-1]\!]} L_n^k \mathcal{H}_{m-2-2k}^n$$

On en déduit immédiatement que :

$$\mathcal{Q}_m^n = \mathcal{H}_m^n \oplus \bigoplus_{k\in[\![0,K-1]\!]} L_n^{k+1}\mathcal{H}_{m-2(k+1)}^n = \bigoplus_{k\in[\![0,K]\!]} L_n^k\mathcal{H}_{m-2k}^n$$

□

3.2 Égalité $\mathcal{K}_m = \tilde{\mathcal{H}}_m^n$

Propriété 3.2

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{K}_m = \tilde{\mathcal{H}}_m^n$$

On fixe $m \geq 1$, car c'est évident pour $m = 0$. On peut définir une application laplacien $\Delta \in \mathrm{Hom}\left(\mathcal{Q}_m^n, \mathcal{Q}_{m-2}^n\right)$. On sait que le noyau de cette flèche est $\mathcal{H}_m^n$. Δ induit un morphisme de G-modules, $\Delta \in \mathrm{Hom}_G\left(\tilde{\mathcal{Q}}_m^n, \tilde{\mathcal{Q}}_{m-2}^n\right)$. Notons $Z = X_1 + \imath X_2$.

Lemme 3.2

$$Z^m \in \mathit{ker}\ \Delta$$

Démonstration. Cela revient à montrer que les polynômes de $\mathbb{C}[Z]$ sont de laplacien nul en tant que fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. On peut se ramener (grâce à la formule de Taylor) à l'étude du polynôme Z^2. $f(x+\imath y) = \left[x^2 - y^2\right] + \imath[2xy]$

$$\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f = 2 - 2 = 0$$

□

Lemme 3.3

$$Z^m \in \mathcal{K}_m$$

Démonstration. Z^m est bien un polynôme homogène de degré m. On se donne maintenant un polynôme P de degré inférieur ou égal à $m-1$. On note μ la mesure de probabilité de Haar du groupe compact $\mathcal{U}(1)$. On définit un morphisme de groupes $r : \mathcal{U}(1) \longrightarrow \mathcal{SO}(n)$ défini par

$$r\left(e^{\imath\theta}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

On fait l'identification suivante $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-2}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(z,\overline{x}) z^m \, d\sigma(z,\overline{x}) &= \int_{\mathcal{U}(1)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(uz,\overline{x})(zu)^m \, d\sigma(z,\overline{x}) \, d\mu(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\int_{\mathcal{U}(1)} P(uz,\overline{x})(zu)^m \, d\mu(u)\right] d\sigma(z,\overline{x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on a utilisé le fait que $r(u)$ laisse la mesure σ invariante. Ensuite, on a calculé la moyenne sur le disque unité complexe d'une expression de la forme $Z^m \sum_{|i|\leq m-1} \alpha_i Z^i$. □

$0 \neq Z^m \in (\ker\ \Delta) \cap \mathcal{K}_m$. Or $(\ker\ \Delta) \cap \mathcal{K}_m$ est une sous-représentation de $\mathcal{K}_m$ qui est irréductible, donc $(\ker\ \Delta) \cap \mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m$. On a de plus égalité des dimensions entre $\tilde{\mathcal{H}}_m^n$ et $\mathcal{K}_m$, donc finalement $\forall m \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{K}_m = \tilde{\mathcal{H}}_m^n$

Conclusion 1 *La représentation unitaire $L^2\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ de $\mathcal{SO}(n)$ est la somme directe des sous-représentations irréductibles $\tilde{\mathcal{H}}_m^n$ pour $m \in \mathbb{N}$.*

Table des matières

Bibliographie

[1] RACHED MNEIMNÉ, FRÉDÉRIC TESTARD *Introduction à la théorie des groupes de* LIE *classiques*. Hermann, 1986.