Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique

Spanier-Whitehead duality in algebraic geometry

Joël Riou

Institut Mathématique de Jussieu – Université de Paris 7, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris

Abstract

In this note, we study finitely presented objects in the stable $\mathbb{A}^1$-homotopy category introduced by Morel and Voevodsky and we use a theorem by Voevodsky and Ayoub on the four functors to get Spanier-Whitehead duality in $\mathbb{A}^1$-homotopy theory. *To cite this article: J. Riou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (????).*

Résumé

Dans cette note, on étudie les objets de présentation finie de la catégorie homotopique stable de Morel-Voevodsky et on montre que les résultats de Voevodsky et Ayoub sur les quatre foncteurs permettent d'établir la dualité de Spanier-Whitehead en théorie homotopique des schémas. *Pour citer cet article : J. Riou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ? ? ? (? ? ? ?).*

Abridged English version

In this paper, we introduce three reasonable subcategories of the stable $\mathbb{A}^1$-homotopy category $SH(S)$ of a noetherian scheme S (see [16], [11] and [9]). The first one $SH^{pf}(S)$ is the category of triangulated compact objects in $SH(S)$, we prove that it is the pseudo-abelian envelope of the triangulated subcategory of $SH(S)$ generated by objects of the form $U_+(q)$ where U is a smooth S-scheme of finite type and q an integer. The second one $SH^{proj}(S)$ is generated in the previous sense by objects of the form $X_+(q)$ where X is smooth and projective over S. The third one $SH^{rig}(S)$ is the full subcategory of strongly dualisable objects in $SH(S)$, this category is triangulated, pseudo-abelian and rigid (see [4] for the notion of strong duality).

Email address: `joel.riou@normalesup.org` (Joël Riou).

Preprint submitted to Elsevier Science *13th October 2004*

The paper falls into two parts. In the first one, we assume that S is the spectrum of a field. Under the resolution of singularities, we prove that $SH^{proj}(k) = SH^{pf}(k)$, and without that assumption, the conclusion remains true provided we consider the $\mathbb{Q}$-linear versions of these categories.

In the second part, we prove that $SH^{proj}(S)$ is contained in $SH^{rig}(S)$ *i.e.* that if X is a smooth and projective S-scheme, the object X_+ admits a strong dual in $SH(S)$, which turns out to be the Thom space of the virtual bundle $-[TX]$ over X where TX is the tangent bundle of X relative to S. This is an algebraic version of the classical Spanier-Whitehead duality (see [4, Theorem 3.1]). As Voevodsky foresaw it in the concluding remarks of the ICM article [16], the proof involves the theory of four functors developed by V. Voevodsky [3] and J. Ayoub [1] in an essential manner. We also notice that our category $SH^{rig}(S)$ is contained in $SH^{pf}(S)$, so that the inclusions

$$SH^{proj}(S) \subset SH^{rig}(S) \subset SH^{pf}(S)$$

turn out to be equalities if $S = \operatorname{Spec} k$ and k is a field that admits the resolution of singularities or if $S = \operatorname{Spec} k$, k is any field and we replace the three previous categories by their $\mathbb{Q}$-linear versions.

1. Objets de présentation finie

Pour étudier les objets de présentation finie de la catégorie homotopique stable de Morel-Voevodsky, commençons par quelques rappels.

Définition 1.1 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et X un objet de $\mathcal{T}$, on dit que X est de présentation finie si le foncteur $Hom(X,-)\colon \mathcal{T} \to Ab$ commute aux sommes directes représentables. On note $\mathcal{T}^{pf}$ la sous-catégorie pleine (triangulée) de $\mathcal{T}$ formée par les objets de présentation finie.*

La proposition suivante permet souvent de déterminer les objets de présentation finie :

Proposition 1.2 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'objets de présentation finie de $\mathcal{T}$ telle que le foncteur $\prod_{\alpha\in A} Hom(X_\alpha,-)\colon \mathcal{T} \to Ab$ soit conservatif. Alors $\mathcal{T}^{pf}$ est l'enveloppe pseudo-abélienne de la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$ engendrée par la famille $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$.*

On peut montrer directement cette proposition ; c'est aussi une conséquence immédiate de [12, Proposition 8.4.1, Lemma 4.4.5, Remark 4.2.6].

On rappelle que si S est un schéma noethérien et U un S-schéma lisse de type fini, on note U_+ l'objet de $SH(S)$ provenant du faisceau représenté par U auquel on a ajouté un point-base et que le foncteur twist (1) est caractérisé par l'isomorphisme canonique $\mathbf{E} \wedge (\mathbb{P}^1,\infty) \simeq \mathbf{E}(1)[2]$ pour tout $\mathbf{E}$ dans $SH(S)$ (voir [16]).

En utilisant notamment le théorème de Brown-Gersten (voir [11, Proposition 1.16, p. 100]), on peut montrer que les objets de la forme $U_+(q)$ sont de présentation finie dans $SH(S)$, la proposition précédente admet ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 1.3 *Soit S un schéma noethérien. La catégorie $SH^{pf}(S)$ est engendrée (en tant que catégorie triangulée pseudo-abélienne) par la famille des objets $U_+(q)$ où U est un S-schéma lisse de type fini et q un entier (négatif).*

Théorème 1.4 *Soit k un corps parfait.*

– *si k admet la résolution des singularités (au sens où tout corps de type fini sur k est k-isomorphe au corps des fonctions d'une variété projective lisse connexe sur k), alors $SH^{pf}(k)$ est engendrée en tant que catégorie triangulée pseudo-abélienne par les objets de la forme $X_+(q)$ où X est une variété projective lisse sur k et q un entier (négatif) ;*
– *sinon, l'énoncé précédent vaut encore pour la version à coefficients rationnels $SH^{pf}_{\mathbb{Q}}(k)$ de $SH^{pf}(k)$.*

La stratégie pour démontrer le théorème 1.4 est la suivante. Il s'agit de montrer que pour toute k-variété lisse (intègre) U, U_+ appartient à la sous-catégorie triangulée pseudo-abélienne engendrée par les twists de variétés projectives lisses dans $SH(k)$ (resp. $SH_{\mathbb{Q}}(k)$). On procède par récurrence sur la dimension de U. On veut alors montrer que si X est une variété lisse connexe et U un ouvert dense, alors le quotient X/U est dans la sous-catégorie triangulée pseudo-abélienne engendrée par les twists de variétés lisses de dimension strictement inférieure à la dimension de X de sorte que la propriété pour U d'être telle que U_+ soit dans la catégorie triangulée pseudo-abélienne engendrée par les twists de variétés projectives lisses devienne une propriété birationnelle, de telle manière que pour chaque corps de fonctions possible, il suffise de trouver *une* variété lisse connexe vérifiant cette propriété, ce qui permet de conclure quand on dispose de la résolution des singularités.

Définition 1.5 *Soit $p: X \to \operatorname{Spec} k$ un k-schéma de type fini et lisse, et L un sous-schéma de X. Soit U un ouvert de X dans lequel L est un sous-schéma fermé. On note $BM(L/X) \in SH(X)$ l'objet de Borel-Moore de L au-dessus de X, qui est le quotient $U/(U-L)$ et $BM_\sharp(L/X) = p_\sharp BM(L/X)$, où $p_\sharp$ est l'adjoint à gauche de $p^\star: SH(k) \to SH(X)$ qui existe car p est lisse (voir [11, p. 104] pour la construction). Il est immédiat que cette définition est indépendante de l'ouvert intermédiaire U.*

Les objets de Borel-Moore vérifient tautologiquement la propriété de localisation « fermé–ouvert complémentaire » :

Lemme 1.6 *Soit X un k-schéma de type fini et lisse, L un sous-schéma de X, Z un sous-schéma fermé de L, $V = L - Z$ l'ouvert complémentaire. On a alors un triangle distingué dans $SH(k)$:*

$$BM_\sharp(V/X) \to BM_\sharp(L/X) \to BM_\sharp(Z/X) \to BM_\sharp(V/X)[1]$$

Lemme 1.7 *Soit k un corps parfait, d un entier, X un k-schéma de type fini et lisse, L un sous-schéma de X. Supposons L de dimension $< d$. Alors $BM_\sharp(L/X)$ est dans la sous-catégorie triangulée de $SH(k)$ engendrée par les twists de k-variétés lisses de dimension $< d$.*

On a un isomorphisme évident $BM_\sharp(L/X) = BM_\sharp(L_{\text{réd}}/X)$. On peut donc supposer L réduit (et non vide). Grâce à une récurrence noethérienne évidente compte tenu du lemme précédent, il suffit de trouver un ouvert non vide de L pour lequel la conclusion du lemme est vérifiée. Comme k est parfait, quitte à prendre un ouvert de lissité, on peut supposer L lisse. Quitte à rétrécir encore L, on peut supposer que le fibré normal de L dans X est trivial. D'après le théorème de pureté homotopique [11, Theorem 2.23, p. 115], une trivialisation du fibré normal donne un isomorphisme $BM_\sharp(L/X) \simeq L_+(c)[2c]$ dans $SH(k)$ où c est la dimension du fibré normal de L dans X, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Il reste à étudier le cas où l'on ne dispose pas de la résolution des singularités. D'après Hironaka [8, p. 132], k n'est pas de caractéristique zéro. On dispose néanmoins du théorème de de Jong [2, theorem 4.1, p. 66] qui implique que pour toute variété lisse connexe U sur k (parfait), il existe une extension finie séparable L du corps des fonctions K de U telle que L soit le corps des fonctions d'une variété projective lisse sur k. D'après le plan annoncé plus haut, la deuxième partie du théorème 1.4 résultera de la proposition suivante :

Proposition 1.8 *Soit k un corps de caractéristique non nulle, $p: Y \to X$ un revêtement fini étale entre variétés lisses connexes sur k. Il existe un ouvert U non vide de X et un morphisme $\varphi: U_+ \to p^{-1}(U)_+$ dans $SH(U)$ tel que si $\psi: p^{-1}(U)_+ \to U_+$ est le morphisme induit par p, on ait l'égalité $\psi \circ \varphi = (\deg p) \cdot Id_{U_+}$ dans $SH(U)$. En particulier, U_+ est facteur direct de $p^{-1}(U)_+$ dans $SH_{\mathbb{Q}}(k)$.*

Notons qu'en général cette proposition est fausse en caractéristique 0 pour k ordonnable (pour un contre-exemple, prendre $p: \operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ et passer aux points réels). Grâce aux techniques de passage à la limite de [6, §8], la proposition précédente peut se déduire du lemme suivant :

Lemme 1.9 *Soit K un corps de caractéristique non nulle, L une K-algèbre étale, x un élément primitif de L/K (définissant une immersion fermée $i: Spec\, L \to \mathbb{P}^1_K$). Notons $\psi: L_+ \to K_+$ le morphisme canonique dans $SH(K)$ et $\varphi: K_+ \to L_+$ le morphisme (dans $SH(K)$) dont le smash-produit avec $\mathbb{P}^1$ est la composée $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K/(\mathbb{P}^1_K - i(Spec\, L)) \simeq \mathbb{P}^1_L/\infty_L$ où l'isomorphisme de droite résulte du théorème de pureté homotopique. Alors $\psi \circ \varphi = [L : K] \cdot Id_{K_+}$ dans $SH(K)$.*

Dans un corps de caractéristique non nulle, -1 est évidemment somme de carrés, on peut donc utiliser un résultat de Morel (voir notamment [10, Theorem 6.4.1]) disant que pour un tel corps K, le morphisme d'anneaux $\mathbb{Q} \to End_{SH(K)}(S^0) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme. L'assertion du lemme consiste donc à établir une égalité entre deux nombres rationnels. Pour les comparer, on peut faire une extension des scalaires de K. En passant à une clôture séparable, le lemme devient essentiellement trivial.

Le théorème 1.4 fournit une « machine » pour démontrer des théorèmes du type de [5, Theorem 1'] (voir aussi [7, Chapter IV]). En effet, pour tout corps k de caractéristique 0, on construit aisément un objet $\mathbf{H}_{\mathrm{dR,alg}}$ de $SH(k)$ représentant la cohomologie de de Rham algébrique introduite dans [5] (voir [16, §6] pour la notion de théorie cohomologie représentée par un spectre). Pour $k = \mathbb{C}$, on dispose aussi d'un spectre $\mathbf{H}_{\mathrm{dR,diff}}$ représentant la cohomologie de De Rham à coefficients complexes des variétés différentiables formées par les points complexes des variétés algébriques complexes sur $\mathbb{C}$. Le théorème de comparaison [5, Theorem 1'] peut se reformuler en disant que le morphisme évident $\mathbf{H}_{\mathrm{dR,alg}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{dR,diff}}$ est un isomorphisme dans $SH(k)$, ce qui, grâce au théorème 1.4, se ramène à vérifier que les deux théories cohomologiques considérées coïncident sur les variétés *projectives* lisses, ce qui résulte ici de [14].

2. Le théorème de dualité

Pour tout morphisme entre schémas noethériens $f: T \to S$, des foncteurs $f_\star$ et $f^\star$ ont été définis dans [11, Prop. 2.8, p. 108] entre les catégories homotopiques de T et S. On peut étendre aussitôt cette construction aux catégories homotopiques stables correspondantes définies dans [16] et [9]. Ces foncteurs vérifient les hypothèses d'un théorème de Voevodsky [3] et de J. Ayoub [1] qui donne une construction de foncteurs $f_!$ et $f^!$ pour tout morphisme quasi-projectif entre schémas noethériens. Leur théorie donne aussi un morphisme d'oubli du support $f_! \to f_\star$ qui est un isomorphisme si f est un morphisme projectif. On rappelle aussi qu'une structure monoïdale symétrique (notée $\wedge$) a été construite dans [9] (voir aussi [16]) et que l'on peut noter **Hom** le hom. interne correspondant.

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe un schéma de base noethérien S.

Proposition 2.1 *Soit $f: X \to S$ un morphisme (lisse) entre schémas noethériens. Pour tous objets $A \in SH(X)$ et $B \in SH(S)$, il existe un isomorphisme canonique dans $SH(S)$:*

$$\mathbf{Hom}(f_! A, B) \simeq f_\star \mathbf{Hom}(A, f^! B)$$

D'après le lemme de Yoneda et un jeu d'adjonctions, cela résulte de l'isomorphisme $f_!((f^\star C) \wedge A) \simeq C \wedge f_! A$ (C objet de $SH(S)$) qui découle de l'isomorphisme analogue où l'on remplace $f_!$ par $f_\sharp$ où $f_\sharp$ est l'adjoint à gauche du foncteur $f^\star$ et de la construction du foncteur $f_!$, f étant lisse, comme composé du foncteur $f_\sharp$ et du $\wedge$-produit avec l'inverse de l'espace de Thom du fibré tangent relatif de f (cf [1]).

Rappelons que dans les catégories monoïdales symétriques, il existe une notion de dualité *forte* entre deux objets, et la notion d'objet fortement dualisable (voir [4]). Grâce à [4, Theorem 1.3], en présence de hom. internes (donc en particulier dans $SH(S)$), un objet Y est fortement dualisable si et seulement si le morphisme évident $\mathbf{Hom}(Y, S^0) \wedge B \to \mathbf{Hom}(Y, B)$ est un isomorphisme pour tout objet B. Avec ce critère, il est clair que la sous-catégorie des objets fortement dualisables de $SH(S)$ est une sous-catégorie triangulée ; notons $SH^{rig}(S)$ cette sous-catégorie triangulée de $SH(S)$, elle est monoïdale symétrique *rigide* (et pseudo-abélienne).

La remarque précédant le corollaire 1.3 a pour cas particulier le fait que l'objet unité S^0 est de présentation finie dans $SH(S)$; cela a pour conséquence l'inclusion $SH^{rig}(S) \subset SH^{pf}(S)$. En effet, si $\mathbf{E}$ est un objet de $SH(S)$, le foncteur $Hom(\mathbf{E}, -)$ s'identifie à $Hom(S^0, \mathbf{Hom}(\mathbf{E}, -))$. Comme S^0 est de présentation finie, pour montrer que $\mathbf{E}$ est de présentation finie, il suffit de montrer que le foncteur $\mathbf{Hom}(\mathbf{E}, -)$ commute aux sommes directes quelconques. Or, si $\mathbf{E}$ est fortement dualisable, ce foncteur s'identifie à $\mathbf{Hom}(\mathbf{E}, S^0) \wedge -$ qui commute bien aux sommes directes quelconques.

Le théorème suivant est une version algébrique du théorème 3.1 de [4] qui constitue une approche *purement homotopique* à la dualité de Poincaré :

Théorème 2.2 *Soit $f: X \to S$ un morphisme projectif lisse. Alors X_+ est fortement dualisable dans $SH(S)$ et son dual fort est $f_! S^0$, c'est-à-dire l'espace de Thom de l'« opposé » du fibré tangent relatif de X sur S.*

On a les isomorphismes canoniques suivants pour tout objet B de $SH(S)$:

$$\mathbf{Hom}(f_! S^0, B) \simeq f_\star \mathbf{Hom}(S^0, f^! B) = f_\star f^! B \simeq f_! f^! B \simeq f_\sharp f^\star B \simeq X_+ \wedge B$$

En particulier, pour $B = S^0$, si on pose $Y = f_! S^0$, on obtient que $\mathbf{Hom}(Y, S^0) = X_+$, le critère pour la dualisabilité forte rappelé précédemment s'applique, donc X_+ et $f_! S^0$ sont duaux forts l'un de l'autre.

Remarque 1 Ce théorème utilise fondamentalement les résultats de V. Voevodsky et J. Ayoub sur la fonctorialité des catégories homotopiques stables comme Voevodsky l'avait prévu dans les remarques finales de [16] : « [...] the study of functoriality of the stable homotopy categories with respect to S. There is a theory here which is largely parallel to the functoriality for the constructible sheaves in the etale topology. It allows in particular to prove the Spanier-Whitehead duality for smooth proper schemes over any base. »

Notons $SH^{proj}(S)$ la sous-catégorie triangulée pseudo-abélienne de $SH(S)$ engendrée par les objets de la forme $X_+(q)$ où X est un schéma projectif lisse sur S et q un entier. Dans cette partie, on vient de voir que pour tout schéma noethérien S, on avait des inclusions entre sous-catégories triangulées de $SH(S)$:

$$SH^{proj}(S) \subset SH^{rig}(S) \subset SH^{pf}(S)$$

Compte tenu de ces inclusions, le théorème 1.4 implique que si S est le spectre d'un corps k admettant la résolution des singularités, alors les trois catégories triangulées ci-dessus coïncident, donc en particulier la catégorie des objets de présentation finie de $SH(k)$ est rigide ; de même, ces énoncés sont vrais sur un corps quelconque à condition de prendre des coefficients rationnels. En revanche, si S est par exemple un trait de corps résiduel de caractéristique différente de 2, on peut montrer que l'inclusion $SH^{rig}(S) \subset SH^{pf}(S)$ est stricte.

Remerciements

Je remercie vivement Joseph Ayoub, Denis-Charles Cisinski, Bernhard Keller, Georges Maltsiniotis et Fabien Morel pour les discussions intéressantes qu'ils m'ont offertes ainsi que Frédéric Déglise et Bruno Kahn qui m'ont encouragé dans la rédaction de cette note.

Références

[1] J. Ayoub. Formalisme des quatre opérations. Preprint (2004). `http://www.math.jussieu.fr/~ayoub/`

[2] A.J. de Jong. Smoothness, semi-stability and alterations. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 83 (1996), pp. 51–93.

[3] P. Deligne. Voevodsky's lectures on cross functors. Fall 2001. `http://www.math.ias.edu/~vladimir/delnotes01.ps`

[4] A. Dold, D. Puppe. Duality, trace and transfer *in Proceedings of the International Conference on Geometric Topology (Warsaw, 1978)*, PWN, Warsaw, 1980, pp. 81–102.

[5] A. Grothendieck. On the De Rham cohomology of algebraic varieties. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 29 (1966), pp. 95–103.

[6] A. Grothendieck, J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. Chapitre IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (troisième partie). *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 28 (1966).

[7] R. Hartshorne. On the De Rham cohomology of algebraic varieties. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 45 (1975), pp. 5–99.

[8] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math.* 79 (1964), pp. 109–326.

[9] J. F. Jardine. Motivic symmetric spectra. *Documenta Mathematica* 5 (2000), pp. 445–552.

[10] F. Morel. An Introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy Theory in Contemporary Developments in Algebraic K-Theory (Dedicated to H. Bass on the occasion of his 70th birthday, 8–19 July 2002). *ICTP lecture notes* 15 (2003), pp. 357–441. Trieste.

[11] F. Morel, V. Voevodsky. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 90 (1999), pp. 45–143.

[12] A. Neeman. Triangulated Categories. *Annals of Mathematics Studies* 148 (2001). Princeton University Press.

[13] Neantro Saavedra Rivano. Catégories Tannakiennes. *Lectures Notes in mathematics* 265 (1972). Springer-Verlag.

[14] J-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l'Institut Fourier*, vol VI (1956), pp. 1–42.

[15] J-L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque* 239 (1996).

[16] V. Voevodsky. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory *in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin)*, Volume I, 1998, Extra Volume I, pp. 579–604.