SPECTRES DE TYPE FINI

par

Joël Riou

Résumé. — On décrit la dualité de Spanier-Whitehead dans le cadre de la catégorie homotopique stable classique et on tente (en vain) d'adapter ceci dans le contexte de la théorie homotopique des schémas.

Table des matières

1. La catégorie de Spanier-Whitehead

1.1. Espaces de type fini. —

Définition 1.1. — On note $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ (resp. $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}(S)$) la plus petite sous-catégorie strictement pleine de la catégorie $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ (resp. $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})_\bullet$) contenant les ensembles simpliciaux pointés finis (resp. les objets de la forme $(U \times K)_+$ où K est un ensemble simplicial fini et $U \in \mathrm{Sm}/S$) et telle que pour tout carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

si i est un monomorphisme et que A, B et C sont dans $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ (resp. $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}(S)$) alors D aussi. On appelle de type fini les objets de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ (resp. $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}(S)$).

On omettra souvent le S dans les notations quand les arguments sont les mêmes dans les deux contextes. Le lemme suivant est une vaste trivialité :

Lemme 1.2. — *La catégorie* $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ *(resp.* $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}(S)$*) est stable par* $\vee$, $\times$, $\wedge$. *De plus, tout objet de type fini est de présentation finie dans* $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ *(resp.* $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})_\bullet$*) au sens où pour tout objet* X*, le foncteur* $\mathrm{Hom}(X,-)$ *commute aux colimites filtrantes.*

Définition 1.3. — On appelle catégorie de Spanier-Whitehead la catégorie $\mathbf{SW}$ (resp. $\mathbf{SW}(S)$) dont les objets sont les couples (X,n) avec $X \in \mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ (resp. $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}(S)$) et $n \in \mathbb{Z}$, et telle que pour tous objets (X,n) et (Y,m),

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SW}}((X,n),(Y,m)) = \mathrm{colim}_{k\geq -n,-m}\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(T^{\wedge k+n}\wedge X, T^{\wedge k+m}\wedge Y)$$

où T désigne S^1_{s} (resp. $(\mathbb{P}^1,\infty)$).

Proposition 1.4. — *La catégorie* $\mathbf{SW}$ *(resp.* $\mathbf{SW}(S)$*) est une catégorie triangulée*[(1)] *et monoïdale symétrique. De plus le foncteur évident* $\mathbf{SW} \to \mathbf{SH}$ *est triangulé, pleinement fidèle et monoïdal symétrique. Enfin,* $\mathbf{SW}$ *est la sous-catégorie triangulée (resp. sous-catégorie triangulée stable par* $-\wedge S^{-1}_{\mathrm{t}}$*) de* $\mathbf{SH}$ *engendrée par* S^0_{s} *(resp. les* U_+ *pour* $U \in \mathrm{Sm}/S$*).*

Démonstration. — Modulo les questions liées à la structure monoïdale symétrique, la seule chose non formelle consiste en la démonstration du fait que l'image de $\mathbf{SW}$ dans $\mathbf{SH}$ est stable par la formation du cône. Pour cela, il suffit de montrer qu'un morphisme dans $\mathbf{H}_\bullet$ entre espaces de type fini est isomorphe à l'image d'un morphisme dans $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$. Une démonstration de ce fait se trouve dans [**R**, page 68]. □

---

(1) Le foncteur de décalage est induit par le smash à droite avec S^1_{s}.

1.2. Objets de présentation finie de SH. — On rappelle qu'une catégorie triangulée admettant des sommes directes infinies est karoubienne. En particulier, **SH** est karoubienne.

Définition 1.5. — Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et X un objet de $\mathscr{T}$, on dit que X est de présentation finie si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X,-)$ de la catégorie $\mathscr{T}$ vers la catégorie des groupes abéliens commute aux sommes directes.

La proposition suivante est évidente :

Proposition 1.6. — *Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques. Alors, la sous-catégorie de $\mathscr{T}$ formée des objets de présentation finie est une sous-catégorie triangulée de $\mathscr{T}$.*

Proposition 1.7. — *Le foncteur évident $\mathbf{SW}^{\oplus} \to \mathbf{SH}$, où $\mathbf{SW}^{\oplus}$ désigne l'enveloppe karoubienne de $\mathbf{SW}$, induit une équivalence de catégorie de $\mathbf{SW}^{\oplus}$ vers la sous-catégorie pleine de $\mathbf{SH}$ formée des objets de présentation finie.*

Cette proposition résulte formellement de la proposition générale suivante qui se démontre en examinant de près l'argument du petit objet :

Proposition 1.8. — *Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques. Soit $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ un ensemble de générateurs de présentation finie de $\mathscr{T}$. Alors, la catégorie des objets de présentation finie de $\mathscr{T}$ s'identifie à l'enveloppe karoubienne de la sous-catégorie triangulée de $\mathscr{T}$ engendrée par les W_α.*

Démonstration. — L'hypothèse signifie que si X est un objet de $\mathscr{T}$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(W_\alpha, X)$ soit nul pour tout $\alpha \in A$, alors X est un objet nul de $\mathscr{T}$.

Soit X un objet de $\mathscr{T}$. On va définir (non fonctoriellement) un objet $\Phi(X)$ de $\mathscr{T}$ et un morphisme $\varphi_X \colon X \to \Phi(X)$ de la façon suivante. $\Phi(X)$ est un cône du morphisme $\oplus_{i\in I} W_{\alpha_i} \to X$ où I parcourt l'ensemble des couples $i = (\alpha_i, f_i)$ où $\alpha_i \in A$ et $f_i \colon W_{\alpha_i} \to X$. On dispose ainsi d'un triangle distingué

$$\oplus_{i\in I} W_{\alpha_i} \to X \to \Phi(X) \xrightarrow{+}$$

Par récurrence, on peut définir $\Phi^n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ *via* la formule $\Phi^n(X) = \Phi(\Phi^{n-1}(X))$. On peut noter $\Phi^\infty(X)$ une colimite homotopique du système inductif suivant :

$$X \xrightarrow{\varphi_X} \Phi(X) \xrightarrow{\varphi_{\Phi(X)}} \Phi^2(X) \to \cdots$$

Par construction et puisque les objets W_α sont de présentation finie, on obtient que $\Phi^\infty(X)$ est un objet nul de $\mathscr{T}$. Ainsi, le morphisme évident $X \to \Phi^\infty(X)$ est nul.

On suppose maintenant que X est un objet de présentation finie de $\mathscr{T}$. On peut en déduire qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que le morphisme évident $X \to \Phi^N(X)$ soit nul. Notons $\mathscr{T}'$ la sous-catégorie triangulée de $\mathscr{T}$ engendrée par les objets $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$. Montrons par récurrence descendante, que pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N$, il existe une factorisation de $X \to \Phi^n(X)$ sous la forme $X \to U_n \to \Phi^n(X)$ où $U_n \in \mathscr{T}'$. Pour $n = N$, c'est évident puisque l'on peut prendre la factorisation $X \to 0 \to \Phi^N(X)$. Supposons le résultat vrai pour $n > 0$, et montrons le pour $n-1$. On a un diagramme commutatif de la forme suivante, où $\Sigma = \oplus_{i \in I} W_{\alpha_i}$:

$$\begin{tikzcd}
\Phi^{n-1}(X) \arrow[r] & \Phi^n(X) \arrow[r] & \Sigma[1] \arrow[r, "+"] & {} \\
& U_n \arrow[u] \arrow[r] & \Sigma[1] \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Grâce à (TR III), on peut compléter ce diagramme en un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\Phi^{n-1}(X) \arrow[r] & \Phi^n(X) \arrow[r] & \Sigma[1] \arrow[r, "+"] & {} \\
Z_n \arrow[u] \arrow[r] & U_n \arrow[u] \arrow[r] & \Sigma[1] \arrow[u, equal] \arrow[r, "+"] & {}
\end{tikzcd}$$

En utilisant convenablement l'axiome de l'octaèdre, on voit que l'on peut compléter ce diagramme pour obtenir des triangles distingués horizontaux et verticaux :

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & & \\
C \arrow[u, "+"] \arrow[r, equal] & C \arrow[u, "+"] & & \\
\Phi^{n-1}(X) \arrow[u] \arrow[r] & \Phi^n(X) \arrow[u] \arrow[r] & \Sigma[1] \arrow[r, "+"] & {} \\
Z_n \arrow[u] \arrow[r] & U_n \arrow[u] \arrow[r] & \Sigma[1] \arrow[u, equal] \arrow[r, "+"] & {}
\end{tikzcd}$$

On peut appliquer le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, -)$ à ce diagramme. L'image de $X \to \Phi^{n-1}(X)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, C)$ par la flèche verticale est clairement la même que l'image de $X \to U_n$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, C)$ par la composée de deux flèches verticale, cette image est donc nulle. Ainsi, le morphisme $X \to \Phi^{n-1}(X)$ se relève (de façon non nécessairement unique) en une factorisation $X \to Z_n \to \Phi^{n-1}(X)$. On en donc ramené à montrer que le morphisme $X \to Z_n$ se factorise par un objet de $\mathscr{T}'$. Pour cela, vu que X est de présentation finie, il suffit de montrer que Z_n est isomorphe à un objet de la forme $Z'_n \oplus Y$ où $Z'_n \in \mathscr{T}'$ et où Y est une somme directe d'objets de la forme W_β avec $\beta \in A$. Par définition, $Z_n[1]$ est un cône du morphisme $U_n \to \Sigma[1]$. Comme U_n est de présentation finie, il vient que l'on peut partitionner l'ensemble d'indices qui paramétrise la somme directe que représente Σ de telle sorte que $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ où Σ_1 et Σ_2 soient des sommes directes d'objets de la forme W_β pour $\beta \in A$ et que le morphisme composé de $U_n \to \Sigma[1]$ avec la projection sur $\Sigma_2[1]$ soit nul. Le morphisme $U_n \to \Sigma[1]$ est donc la somme directe du morphisme $U_n \to \Sigma_1[1]$ et du morphisme $0 \to \Sigma_2[1]$, ce qui permet de conclure, en notant $Z'_n[1]$ le cône de $U_n \to \Sigma_1[1]$ et $Y = \Sigma_2$.

On a ainsi construit une factorisation $X \to U_0 \to X$ de Id_X avec $U_0 \in \mathscr{T}'$, ce qui dit précisément que X est dans l'enveloppe karoubienne de $\mathscr{T}'$. □

1.3. Hom et $\wedge$. — On rappelle que la catégorie **SH** est munie d'une structure monoïdale symétrique $\wedge$, que l'on peut construire en utilisant la notion de spectre symétrique...

Proposition 1.9. — *Soit $X \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ (resp. $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})_\bullet$), alors le foncteur $-\wedge X\colon \mathbf{SH} \to \mathbf{SH}$ admet un adjoint à droite $\mathbf{Hom}(X,-)\colon \mathbf{SH} \to \mathbf{SH}$.*

Démonstration. — C'est essentiellement formel (cf. [**R**, page 78]). □

Corollaire 1.10. — *Pour tout objet X de $\mathbf{SW}^{\oplus}$, le foncteur $-\wedge X$ admet un adjoint à droite $\mathbf{Hom}(X,-)$.*

Démonstration. — On peut clairement supposer que X est dans **SW**. Mais alors, quitte à suspendre avec T suffisamment de fois, on se ramène au cas de la proposition précédente. □

2. La dualité de Spanier-Whitehead en topologie

Dans cette section, **SH** désigne exclusivement la catégorie homotopique stable ordinaire.

2.1. Point de vue formel. — Dans la section précédente, on a construit un bifoncteur $\mathbf{Hom}(-,-) : \mathbf{SW}^{\oplus\mathrm{opp}} \times \mathbf{SH} \to \mathbf{SH}$, adjoint à droite partiel de $-\wedge-$.

Définition 2.1. — On note $-^\star\colon \mathbf{SW}^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{SH}$ le foncteur $X \longmapsto \mathbf{Hom}(X, S^0_{\mathrm{s}})$.

Théorème 2.2. — *Le foncteur* **Hom** *bénéficie des propriétés formelles suivantes :*

1. *Si A et B sont des objets de* **SW**, *alors $\mathbf{Hom}(A,B)$ est dans* **SW** *;*
2. *On a un isomorphisme fonctoriel de bidualité $A \xrightarrow{\sim} A^{\star\star}$ pour tout objet $A \in \mathbf{SW}$;*
3. *On dispose d'un isomorphisme bifonctoriel $B \wedge A^\star \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(A,B)$ pour tous $A \in \mathbf{SW}$ et $B \in \mathbf{SH}$;*
4. *On a un isomorphisme bifonctoriel $A^\star \wedge B^\star \xrightarrow{\sim} (A\wedge B)^\star$ pour tous $A, B \in \mathbf{SW}$.*

Démonstration. — Pour l'énoncé (1), comme **SW** est une sous-catégorie triangulée de **SH** engendrée par S^0_{s} et que **Hom** est un foncteur triangulé en la variable B, on peut supposer que $A = S^0_{\mathrm{s}}$. Dans ce cas, on a $\mathbf{Hom}(S^0_{\mathrm{s}}, B) = B$.

Pour les énoncés (2) et (3), comme on a un morphisme entre deux foncteurs triangulés (en fixant B pour (3)), pour démontrer que c'est un isomorphisme, on peut encore supposer que $A = S^0_{\mathrm{s}}$, et cela devient trivial.

L'énoncé (4) résulte formellement de (3) :

$$(A\wedge B)^\star = \mathbf{Hom}(A\wedge B, S^0_{\mathrm{s}}) = \mathbf{Hom}(A, B^\star) \xleftarrow{\sim} B^\star \wedge A^\star = A^\star \wedge B^\star$$

□

Remarque 2.3. — Dans la définition et le théorème précédents, on peut évidemment remplacer partout $\mathbf{SW}$ par $\mathbf{SW}^{\oplus}$.

2.2. Point de vue géométrique. —

2.2.1. Définition géométrique de la dualité. —

Proposition 2.4 ([**LMS**, théorème 1.6, page 124]). — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie monoïdale symétrique additive. Soient deux objets X et Y dans $\mathscr{C}$. Chacune des données suivantes détermine les autres de façon unique :*

(i) *deux morphismes $\eta\colon \mathbf{1} \to X \wedge Y$, $\varepsilon\colon Y \wedge X \to \mathbf{1}$ tels que les diagrammes suivantes soient commutatifs*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta\wedge\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & X \wedge Y \wedge X \arrow[d, "\mathrm{Id}\wedge\varepsilon"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{Id}\wedge\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & Y \wedge X \wedge Y \arrow[d, "\varepsilon\wedge\mathrm{Id}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(ii) *un morphisme $\varepsilon\colon Y \wedge X \to \mathbf{1}$ telle que l'application*

$$\varepsilon_\sharp\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Z \wedge Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W \wedge X, Z)$$

soit bijective pour tous objets W et Z, où $\varepsilon_\sharp(f) = (\mathrm{Id}\wedge\varepsilon) \circ (f \wedge \mathrm{Id})$;

(iii) *un morphisme $\eta\colon \mathbf{1} \to X \wedge Y$ tel que l'application*

$$\eta_\sharp\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W \wedge X, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Z \wedge Y)$$

soit bijective pour tous objets W et Z, où $\eta_\sharp(g) = (g \wedge \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id}\wedge\eta)$.

Si on dispose de telles données pour X et Y, on en dispose d'analogues pour Y et X. On dit alors que X et Y sont fortement dualisables et en dualité. Enfin, on a les propriétés suivantes :

1. *Pour tout objet Z, on a des isomorphismes canoniques $\mathbf{Hom}(X, Z) = Z \wedge Y$ et $\mathbf{Hom}(Y, Z) = Z \wedge X$;*
2. *Pour tout objet W, on a des isomorphisme canoniques $\mathbf{Hom}(X, W) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathbf{Hom}(X, \mathbf{1}) \wedge W$ et $\mathbf{Hom}(Y, W) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathbf{Hom}(Y, \mathbf{1}) \wedge W$;*
3. *Les morphismes canoniques suivants sont des isomorphismes :*

$$X \overset{\sim}{\to} \mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(X, \mathbf{1}), \mathbf{1}) \qquad Y \overset{\sim}{\to} \mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(Y, \mathbf{1}), \mathbf{1})$$

4. *Si (X', Y') est un autre couple d'objets fortement dualisables, on a des isomorphismes canoniques $Y \wedge Y' = \mathbf{Hom}(X, \mathbf{1}) \wedge \mathbf{Hom}(X', \mathbf{1}) \overset{\sim}{\to} \mathbf{Hom}(X \wedge X', \mathbf{1})$.*

2.2.2. Dualité de Poincaré. — Notre objectif dans cette partie est ce calculer le dual d'une variété différentiable compacte.

Lemme 2.5. — *Soit X une variété différentiable compacte. Alors, la suspension infinie de X est dans* $\mathbf{SW}$.

Démonstration. — Si on admet que l'on peut trianguler les variétés différentiables compactes, c'est évident. Sinon, on peut néanmoins plonger X dans un espace euclidien et en prendre un voisinage tubulaire V. L'inclusion $X \to V$ est une équivalence d'homotopie. Ainsi, si on note B une réunion finie de boules de l'espace euclidien recouvrant X, on obtient X comme facteur direct dans $\mathbf{SH}$ de B. On démontre très facilement qu'une réunion finie de boules est dans $\mathbf{SW}$, et donc $X \in \mathbf{SW}^{\oplus}$, ce qui nous suffit. □

Remarque 2.6. — On en déduit que pour toute spectre E tel que $\mathsf{E}^{\bullet}(S^0_{\mathrm{s}})$ soit de type fini (i.e. d'amplitude finie et constituée de groupes abéliens de type fini), alors $\mathsf{E}^{\bullet}(M)$ et $\mathsf{E}_{\bullet}(M)$ sont de type fini pour toute variété différentiable compacte M.

***Lemme 2.7* (Pureté homotopique).** — *Soit Z une sous-variété différentiable fermée d'une variété différentiable X. Notons ν le fibré normal de Z dans X. On a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{H}_{\bullet}$ de la forme :*

$$X/^h(X - Z) = \mathrm{Th}\,\nu$$

où $\mathrm{Th}\,\nu$ est la compactification d'Alexandrov du complémentaire de la section nulle de ν.

***Lemme 2.8* (Dualité de Poincaré géométrique, [LMS, théorème 5.1, page 152])**
Soit M une variété différentielle compacte plongée dans $\mathbb{R}^n$. Notons ν le fibré normal du plongement $i\colon M \to \mathbb{R}^n$. Il existe une application canonique $\varepsilon\colon \mathrm{Th}\,\nu \wedge M_+ \to S^n_{\mathrm{s}}$ dans $\mathbf{H}_{\bullet}$. Alors, ε induit un morphisme $\mathrm{Th}\,\nu[-n] \wedge M_+ \to S^0_{\mathrm{s}}$ dans $\mathbf{SH}$ induisant une dualité forte entre M_+ et $\mathrm{Th}\,\nu[-n]$.

Démonstration. — On se contente de définir ε. D'après le théorème de pureté homotopique, on peut remplacer $\mathrm{Th}\,\nu$ par $\mathbb{R}^n/^h(\mathbb{R}^n - M)$. On a un isomorphisme $(\mathbb{R}^n/^h(\mathbb{R}^n - M)) \wedge M_+ = (\mathbb{R}^n \times M)/^h((\mathbb{R}^n - M) \times M)$. L'application $(\mathbb{R}^n \times M)/^h((\mathbb{R}^n - M) \times M) \to \mathbb{R}^n/^h(\mathbb{R}^n - 0) = S^n_{\mathrm{s}}$ est alors induite par l'application qui à (v, x) associe $v - x$. □

2.3. Point de vue (co)homologique. —

Définition 2.9. — Soit $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$. Pour tout $X \in \mathbf{SH}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$\mathsf{E}^n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(X, \mathsf{E} \wedge S^n_{\mathrm{s}}) \qquad \mathsf{E}_n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(S^n_{\mathrm{s}}, \mathsf{E} \wedge X)$$

$\mathsf{E}^{\bullet}$ et $\mathsf{E}_{\bullet}$ sont respectivement appelées les théories cohomologiques et homologiques représentées par E.

Théorème 2.10. — *Soient X et Y deux objets de* $\mathbf{SW}$ *et* $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$, *on a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(Y, \mathsf{E} \wedge X^{\star}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(X \wedge Y, \mathsf{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(X, \mathsf{E} \wedge Y^{\star})$$

Démonstration. — On utilise la formule $\mathsf{E} \wedge A^\star = \mathbf{Hom}(A, \mathsf{E})$ avec A valant X ou Y. Ensuite, on utilise que $\mathbf{Hom}$ est adjoint à droite de $\wedge$. □

Corollaire 2.11. — *Pour tout spectre $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$ et $X \in \mathbf{SW}^{\oplus}$, on a un isomorphisme canonique, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathsf{E}^n(X) = \mathsf{E}_{-n}(X^\star)$$

Démonstration. — On applique le théorème précédent avec $Y = S_{\mathrm{s}}^{-n}$. □

Proposition 2.12. — *Notons $\mathsf{H}_{\mathbb{Z}}$ le spectre d'Eilenberg-MacLane. Alors, pour tout $X \in \mathbf{SW}$, on a des isomorphismes canoniques pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$(\mathsf{H}_{\mathbb{Z}})_n(X) = \mathbf{H}_n(X;\mathbb{Z}) \qquad \mathsf{H}_{\mathbb{Z}}^n(X) = \mathbf{H}^n(X;\mathbb{Z})$$

où $\mathbf{H}_\star$ et $\mathbf{H}^\star$ désignent respectivement l'homologie et la cohomologie singulières réduites.

Démonstration. — Le cas de la cohomologie singulière résulte d'une adjonction formelle (autrement dit, cela découle directement de la propriété universelle des espaces d'Eilenberg-MacLane). On peut définir formellement un morphisme fonctoriel en $X \in \mathbf{SW}$, $\mathsf{H}_{\mathbb{Z}} \wedge X \to \mathsf{H}(\tilde{C}_\star X)$, qui est un isomorphisme car il s'agit d'un morphisme entre foncteurs triangulés, en qu'il s'agit d'un isomorphisme dans le cas où $X = S_{\mathrm{s}}^0$. □

Corollaire 2.13. — *Pour tout $X \in \mathbf{SW}^{\oplus}$, on a des isomorphismes canoniques pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbf{H}^n(X;\mathbb{Z}) = \mathbf{H}_{-n}(X^\star;\mathbb{Z})$$

2.4. Caractéristique d'Euler, traces. —

Définition 2.14. — Soit $f : X \to X$ un endomorphisme d'un objet de $\mathbf{SW}^{\oplus}$. On définit la trace de f comme étant un certain endomorphisme de S_{s}^0 obtenu par la composition suivante :

$$S_{\mathrm{s}}^0 \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Hom}(X, X) \xleftarrow{\sim} X \wedge X^\star \overset{\tau}{=} X^\star \wedge X \xrightarrow{\beta} S_{\mathrm{s}}^0$$

où α est la flèche qui correspond par adjonction à f, τ la transposition et β la flèche qui correspond par adjonction à l'identité de $X^\star$.

Dans le cas où f est l'identité de X, la trace de f est appelée la caractéristique d'Euler-Poincaré de X et se note $\chi(X)$.

On rappelle que l'anneau $\mathrm{End}_{\mathbf{SH}}(S_{\mathrm{s}}^0)$ est canoniquement identifié à $\mathbb{Z}$. Dans le cas de la catégorie homotopique stable des schémas sur un corps k, cet anneau est en général plus gros, et donne donc des invariants plus fins qu'un simple nombre entier. De même, dans le cas des motifs, l'anneau des endomorphismes de $\mathbb{Z}(0)$ est $\mathbb{Z}$.

Lemme 2.15. — *Il existe des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{D}(\mathrm{Ab})$, pour tous A et B dans $\mathbf{SW}^{\oplus}$:*

$$\tilde{C}_\star A \overset{\mathsf{L}}{\otimes} \tilde{C}_\star B = \tilde{C}_\star(A \wedge B)$$

On a des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{D}(\mathrm{Ab})$, pour tous A et B dans $\mathbf{SW}^{\oplus}$:

$$\tilde{C}_\star \mathbf{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(\tilde{C}_\star A, \tilde{C}_\star B)$$

Pour tous $X \in \mathbf{SW}^{\oplus}$ et $Y \in \mathsf{D}(\mathrm{Ab})$, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathsf{H}\,\mathbf{Hom}(\tilde{C}_\star X, Y) = \mathbf{Hom}(X, \mathsf{H}Y)$$

Démonstration. — La première assertion découle du théorème d'Eilenberg-Zilber. Pour la deuxième assertion, le plus difficile est de construire la flèche, et cette construction est possible grâce à la troisième assertion qui résulte tautologiquement de la première. □

Par le même formalisme, on peut définir la trace d'un objet de $\mathsf{D}^b_c(\mathrm{Ab})$, l'indice c désignant les complexes dont les objets de cohomologie sont des groupes abéliens de type fini. Le lemme précédent admet alors pour corollaire :

Corollaire 2.16. — *Pour tout objet $X \in \mathbf{SW}^{\oplus}$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{SH}}(X)$, on a l'égalité*

$$\operatorname{tr} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}(f_\star | \mathbf{H}_n(X; \mathbb{Q}))$$

En particulier, $\chi(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{H}_n(X;\mathbb{Q})$.

3. Dualité de Spanier-Whitehead en théorie homotopique des schémas

3.1. Énoncés plausibles. — Je ne sais pas dire grand chose. Il est clair que tout le formalisme fonctionne bien sur une certaine sous-catégorie triangulée $\mathscr{C}$ de $\mathbf{SW}$ stable par $- \wedge S^{-1}_{\mathrm{t}}$ et par facteurs directs, et que $\mathscr{C}$ contient S^0_{s} et plus généralement les objets de $\mathbf{SW}$ admettant un inverse pour $\wedge$ qui soit aussi dans $\mathbf{SW}$. Sous l'hypothèse de la résolution des singularités, on peut se ramener à montrer que la dualité de Spanier-Whitehead fonctionne pour les S-schémas projectifs lisses. Notons $\mathbf{SW}(S)'$ la sous-catégorie triangulée karoubienne de $\mathbf{SW}(S)^{\oplus}$ stable par $- \wedge S^{-1}_{\mathrm{t}}$ engendrée par les X_+ pour tout S-schéma X projectif et lisse.

On rappelle le théorème suivant qui sera crucial dans la suite.

***Théorème 3.1* (Pureté homotopique).** — *Soit Z un sous-schéma fermé S-lisse d'un S-schéma lisse X, alors il existe un triangle distingué canonique dans $\mathbf{SH}(S)$:*

$$(X - Z)_+ \to X_+ \to \operatorname{Th} \nu \xrightarrow{+}$$

où ν est le fibré normal de Z dans X.

On utilise une notion très faible de résolution des singularités :

Définition 3.2. — Dans cet exposé, on dira qu'un corps (parfait) k admet la résolution des singularités si tout k-schéma de type fini et intègre X admet un ouvert dense U k-isomorphe à un ouvert dense d'un k-schéma projectif lisse. Autrement dit, tout k-schéma de type fini et intègre est birationnel à un k-schéma projectif lisse.

Théorème 3.3. — *Soit k un corps admettant la résolution des singularités. Alors $\mathbf{SW}' = \mathbf{SW}^{\oplus}$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour tout k-schéma de type fini et lisse X, $X_+ \in \mathbf{SW}'$, ce que nous allons faire par récurrence sur $\dim X$. Soit d un entier tel que pour tout k-schéma de type fini et lisse X de dimension $< d$, $X_+ \in \mathbf{SW}'$. Montrons tout d'abord que pour tout k-schéma de type fini et lisse X de dimension $< d$ et tout fibré vectoriel F sur X, $\operatorname{Th} F \in \mathbf{SW}'$. En effet, grâce au triangle distingué de Mayer-Vietoris, on peut supposer que F est un fibré vectoriel trivial, mais alors $\operatorname{Th} F = X_+ \wedge S^{2n,n}$ pour un certain n, d'où le résultat. Donnons-nous un k-schéma de type fini et lisse X, de dimension d et montrons que $X_+ \in \mathbf{SW}'$. Grâce au triangle distingué de Mayer-Vietoris, si on sait le faire pour X affine et connexe, on sait le faire pour X séparé, et si on sait le faire pour X séparé, on sait le faire pour X quelconque. On peut donc supposer que X est un k-schéma intègre de type fini et lisse.

Si on arrive à montrer que pour k-schéma intègre de type fini et lisse X de dimension d et tout ouvert dense U de X, alors $X_+ \in \mathbf{SW}'$ si et seulement si $U_+ \in \mathbf{SW}'$, alors on aura gagné puisqu'alors le fait d'être ou non dans $\mathbf{SW}'$ sera un invariant birationnel des k-schémas intègres de type fini et lisses de dimension d, et on pourra conclure en utilisant la résolution des singularités.

Soit donc U_0 un ouvert dense d'un k-schéma intègre, de type fini et lisse X_0. On construit par récurrence une suite décroissante de sous-schémas fermés réduits $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X_0 et une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où U_n est un ouvert de X_n de telle sorte que pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = X_n - U_n$ et que U_{n+1} soit l'ouvert de lissité de X_{n+1}. Comme k est parfait, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $X_N = \varnothing$.

Soit $n \geq 1$. L'ouvert complémentaire de l'immersion fermée $U_n = X_n - X_{n+1} \to X_0 - X_{n+1}$ est $X_0 - X_n$. Comme $X_0 - X_{n+1}$ et U_n sont lisses sur k, on peut appliquer le théorème de pureté homotopique et obtenir le triangle distingué suivant dans $\mathbf{SW}$ où ν désigne le fibré normal de $X_n - X_{n+1}$ dans $X_0 - X_{n+1}$:

$$(X_0 - X_n)_+ \to (X_0 - X_{n+1})_+ \to \operatorname{Th}_{U_n} \nu \xrightarrow{+}$$

Comme $\dim U_n < d$, $\operatorname{Th}_{U_n} \nu \in \mathbf{SW}'$, donc $(X_0 - X_n)_+ \in \mathbf{SW}'$ si et seulement si $(X_0 - X_{n+1})_+ \in \mathbf{SW}'$. De proche en proche, on obtient que $(X_0 - X_1)_+ \in \mathbf{SW}'$ si et seulement si $(X_0 - X_N)_+ \in \mathbf{SW}'$, c'est-à-dire que $(U_0)_+ \in \mathbf{SW}'$ si et seulement si $(X_0)_+ \in \mathbf{SW}'$, d'où le résultat. □

Avant de continuer de développer quelle forme devrait avoir la dualité de Spanier-Whitehead en théorie homotopique des schémas, il s'agit d'introduire les ingrédients nécessaire à son énoncé. En effet, les techniques permettant de construire les applications ε et η qui fonctionnent pour établir la dualité de Poincaré géométrique pour des variétés différentiables compactes *ne fonctionnent pas telles quelles* puisque notamment une variété projective lisse se plonge rarement[(2)] dans $\mathbb{A}^n$.

Dans ce qui suit, on suppose pour simplifier que $S = \operatorname{Spec} k$ avec k un corps.

[(2)] Il serait intéressant d'étudier comment cette construction fonctionne dans le cas des variétés lisses de dimension 0, c'est-à-dire d'établir que de telles variétés sont auto-duales dans $\mathbf{SH}(k)$!

Définition 3.4. — Soit X un schéma affine et lisse sur k et E un fibré vectoriel sur X. Pour tout entier $r \in \mathbb{Z}$, on définit un objet de $\mathbf{SH}$ par la formule suivante :

$$\widetilde{\mathrm{Th}}(E - r\mathscr{O}) = \mathrm{Th}\, E \wedge S_{\mathrm{s}}^{-2r,-r}$$

Lemme 3.5. — *Pour X affine et lisse sur k, la construction précédente définit une application de $\mathsf{K}_0(X)$ vers la classe des classes d'isomorphismes d'objets de $\mathbf{SH}$ par la formule*

$$\widetilde{\mathrm{Th}}([E] - r[\mathscr{O}]) = \widetilde{\mathrm{Th}}(E - r\mathscr{O})$$

Démonstration. — Comme X est affine, tous les éléments de $\mathsf{K}_0(X)$ sont de la forme $[E] - r[\mathscr{O}]$ avec $r \in \mathbb{N}$ et E un fibré vectoriel. Le fait que la classe d'isomorphisme obtenue ne dépende que de l'élément de $\mathsf{K}_0(X)$ vient essentiellement du fait que toutes les suites exactes de modules projectifs sont scindées, et que par conséquent on a un critère simple pour dire si deux éléments de $\mathsf{K}_0(X)$ sont égaux ou non. □

Proposition 3.6. — *Il existe une unique manière d'associer à tout schéma lisse X, de type fini et séparé sur k, une application $\widetilde{\mathrm{Th}}_X$ qui a un élément de $\mathsf{K}_0(X)$ associe une classe d'isomorphisme d'objets de $\mathbf{SH}(k)$ de telle sorte que :*

(i) *Si X est affine, $\widetilde{\mathrm{Th}}_X$ est donné par le lemme 3.5 ;*

(ii) *Si $f\colon X \to Y$ est un torseur sous un fibré vectoriel sur Y avec Y affine et lisse sur k, alors $\widetilde{\mathrm{Th}}_X \circ f^\star \simeq \widetilde{\mathrm{Th}}_Y$ où $f^\star$ désigne l'application $\mathsf{K}_0(Y) \to \mathsf{K}_0(X)$.*

Démonstration. — C'est une conséquence formelle de l'astuce de Jouanolou grâce à l'invariance par homotopie de la K-théorie algébrique, et plus précisément parce que dans les conditions du (ii), $f^\star$ induit un isomorphisme sur le K_0. □

Conjecture 3.7. — *Soit k un corps. Pour toute variété projective lisse X sur k, notons TX le fibré tangent de X. Alors, il existe une dualité forte dans $\mathbf{SH}$ entre X_+ et $\widetilde{\mathrm{Th}}_X(-[TX])$.*

Remarque 3.8. — Dans [**Voe**, proposition 2.7, page 9], Voevodsky définit un morphisme $S_{\mathrm{s}}^0 \to \widetilde{\mathrm{Th}}(-TX)$ dans $\mathbf{SH}$. En composant le morphisme défini par Voevodsky avec la diagonale de Thom $\widetilde{\mathrm{Th}}(-TX) \to \widetilde{\mathrm{Th}}(-TX) \wedge X_+$ définie de la manière classique(3), on peut en principe définir un morphisme $S_{\mathrm{s}}^0 \to \widetilde{\mathrm{Th}}(-TX) \wedge X_+$ qui est censé induire la dualité forte.

3.2. Applications. — Avant de donner des applications, énonçons la proposition soritale suivante :

Proposition 3.9. — *Tout objet fortement dualisable de $\mathbf{SH}$ est dans $\mathbf{SW}^\oplus$. Tout objet fortement dualisable de $\mathsf{D}(\mathrm{Ab})$ est «constructible».*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme suivant. □

(3)Si $p\colon E \to X$ est un fibré vectoriel sur X de section nulle s_0, la diagonale de Thom est le morphisme $E/(E - s_0(X)) \to E/(E - s_0(X)) \wedge X_+ = (E \times X)/(E - s_0(X) \times X)$ induit par l'application $e \mapsto (e, p(x))$.

Lemme 3.10. — *Soit X un objet fortement dualisable dans une catégorie triangulée monoïdale symétrique admettant des sommes directes. Alors, si $\mathbf{1}$ est un objet de présentation finie, alors X aussi.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$ commute aux sommes directes. Si on note Y le dual fort de X, on obtient que $\mathrm{Hom}(X, -) = \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, - \wedge Y)$ d'après la proposition 2.4. Or, le foncteur $- \wedge Y$ admet un adjoint à droite $\mathrm{Hom}(Y, -)$. Donc, $- \wedge Y$ commute aux sommes directes, d'où le résultat. □

Remarque 3.11. — Comme tout foncteur monoïdal symétrique préserve les dualités fortes, il vient que, sous les hypothèses raisonnables du lemme précédent, tout foncteur monoïdal envoie les objets fortement dualisables sur des objets de présentation finie.

Proposition 3.12. — *On suppose que la conjecture 3.7 est vérifiée pour $k = \mathbb{C}$. Alors, pour tout schéma de type fini et lisse X sur $\mathbb{C}$, les groupes d'homologie et de cohomologie singulière $\mathbf{H}^i(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ et $\mathbf{H}_i(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ sont de type fini et presque tous nuls.*

Démonstration. — On utilise le fait que le foncteur de réalisation topologique $\mathbf{SH}(\mathbb{C}) \to \mathbf{SH}^{\mathrm{top}}$ est monoïdal, de même que le foncteur $\tilde{C}_\star \colon \mathbf{SH}^{\mathrm{top}} \to \mathbf{D}(\mathrm{Ab})$. Comme X est fortement dualisable dans $\mathbf{SH}(\mathbb{C})$, il en va de même de $\tilde{C}_\star(X)$ dans $\mathbf{D}(\mathrm{Ab})$, d'où le résultat. □

La proposition suivante admet une démonstration légèrement différente :

Proposition 3.13. — *Pour tout schéma de type fini et séparé sur $\mathbb{C}$, les groupes abéliens $\mathbf{H}^i_c(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ sont de type fini et presque tous nuls.*

Démonstration. — On peut faire une récurrence sur la dimension de X. Le fait crucial est que l'on dispose d'un triangle distingué d'excision «ouvert-fermé complémentaire» en cohomologie à support compact. On peut alors clairement supposer que X est irréductible. Comme on peut évidemment supposer X réduit et que $\mathbb{C}$ est parfait, on peut en fait supposer que X est lisse sur k, et quasi-projectif. Mais alors, on peut utiliser la résolution des singularités et, quitte à rétrécir X, trouver une immersion ouverte de X dans un schéma projectif lisse $\overline{X}$. Comme on peut supposer que $\overline{X}$ est connexe, on obtient que $\dim \overline{X} = \dim X$, par conséquent, $\dim \left(\overline{X} - X\right) < \dim X$. Ainsi, il suffit de montrer que les groupes de cohomologie à support compact d'une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ sont de type fini et presque tous nuls, ce qui est un cas particulier de la proposition précédente (et en fait du lemme 2.5). □

On rappelle que pour tout schéma de base noethérien S et tout complexe $\mathscr{F}$ (borné) de faisceaux de torsion première aux caractéristiques résiduelles sur $S_{\text{ét}}$, on peut construire un spectre $\mathbb{H}_{\text{ét},\mathscr{F}} \in \mathbf{SH}(S)$ représentant la cohomologie étale à coefficients dans $\mathscr{F}$. Dans la suite de ce numéro, on fixe un tel schéma de base noethérien et un tel faisceau $\mathscr{F}$.

Définition 3.14. — Pour tout schéma $X \in \mathrm{Sm}/S$ et $i, j \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathbb{H}^{\text{ét}}_{i,j}(X/S; \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}(S)}(S^{i,j}, \mathbb{H}_{\text{ét},\mathscr{F}} \wedge X_+) \quad \mathbb{H}^{i,j}_{\text{ét}}(X/S; \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}(S)}(X_+, \mathbb{H}_{\text{ét},\mathscr{F}} \wedge S^{i,j})$$

Autrement dit, l'homologie et la cohomologie étale relatives à S sont les théories homologiques et cohomologiques représentées par $\mathbb{H}_{\text{ét},\mathscr{F}}$ dans $\mathbf{SH}(S)$.

Remarque 3.15. — On note $a\colon S_{\text{ét}} \to \bullet$ le morphisme de sites canoniques de $S_{\text{ét}}$ vers le topos ponctuel. Soit $f\colon X \to S$ un morphisme de type fini et lisse. Alors, on a les isomorphismes canoniques suivants (le deuxième étant au moins une conséquence de la conjecture 3.7) :

$$\mathbb{H}^{i,j}_{\text{ét}}(X;\mathscr{F}) = \mathbf{H}^i(\mathsf{R}a_\star\mathsf{R}f_\star f^\star\mathscr{F}(j)) \quad \mathbb{H}^{\text{ét}}_{i,j}(X;\mathscr{F}) = \mathbf{H}_i(\mathsf{R}a_\star\mathsf{R}f_! f^!\mathscr{F}(-j))$$

Théorème 3.16. — *Si k est un corps algébriquement clos admettant la résolution des singularités et que la conjecture 3.7 est vraie pour k, alors pour tout $X \in \mathbf{SW}(k)$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les groupes $\mathbb{H}^{i,j}_{\text{ét}}(X/k;\mathscr{F})$ et $\mathbb{H}^{\text{ét}}_{i,j}(X/k;\mathscr{F})$ sont finis et presque tous nuls si $\mathscr{F}$ est supposé constructible.*

Démonstration. — Par dualité de Spanier-Whitehead, il suffit de montrer l'énoncé pour l'homologie étale. Dans ce cas, d'après la remarque précédente, il suffit d'utiliser le fait général selon lequel $\mathsf{R}f_!$ préserve D^b_c si f est un morphisme de type fini et celui disant que $f^!$ préserve D^b_c si f est lisse de type fini. $\square$

Ce théorème est vraiment démontré dans [**SGA $4\frac{1}{2}$ [Th. Finitude] 1.1**].

Appendice A
Théoreme de Hurewicz

Pour rendre plus satisfaisante la présentation de la catégorie de Spanier-Whitehead, on peut en fait montrer que $\mathbf{SW}$ est karoubienne, c'est-à-dire que le foncteur $\mathbf{SW}^\oplus \to \mathbf{SW}$ est une équivalence de catégorie. La démonstration (pas très jolie) qui va suivre utilise de manière essentielle le théorème de Hurewicz et plus précisément une version de ce théorème pour les spectres[4].

Rappelons tout d'abord la version classique du théorème de Hurewicz :

***Théorème A.1* (Hurewicz).** — *Soit X un ensemble simplicial pointé connexe et simplement connexe. Soit $q > 1$ un entier tel que pour tout $1 \leq i < q$, $\pi_i(X) = \{1\}$. Alors $\mathbf{H}_i(X;\mathbb{Z}) = 0$ pour $1 \leq i < q$, et le morphisme de Hurewicz $\pi_q(X) \to \mathbf{H}_q(X;\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.*

Rappelons que l'on peut définir un morphisme de Hurewicz au niveau des spectres, en effet, on dispose d'un morphisme canonique (d'adjonction) $S^0_{\mathrm{s}} \to \mathsf{H}_{\mathbb{Z}}$. Ainsi, pour tout spectre $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$ et tout entier $q \in \mathbb{Z}$, on peut appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(S^q_{\mathrm{s}}, - \wedge \mathsf{E})$ pour obtenir le morphisme de Hurewicz $\pi_q(\mathsf{E}) \to \mathbf{H}_q(\mathsf{E};\mathbb{Z})$.

Théorème A.2. — *Soit $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$, $q \in \mathbb{Z}$, on suppose que pour tout $i < q$, $\pi_i(\mathsf{E}) = 0$. Alors, le morphisme de Hurewicz $\pi_q(\mathsf{E}) \to \mathbf{H}_q(\mathsf{E};\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.*

[4] On pourrait adapter ce théorème à la catégorie $\mathbf{SH}^{S^1_{\mathrm{s}}}_s(S)$.

Démonstration. — On peut clairement supposer que $q = 0$. L'idée de la preuve consiste à se ramener à des spectres d'Eilenberg-MacLane placés en degré $> q$ grâce à la t-structure homotopique et de se ramener au théorème de Hurewicz en utilisant la *layer filtration* sur ces spectres. Cependant, il y a une difficulté pour passer à la limite en raison de la non type finitude de $\mathsf{H}_{\mathbb{Z}}$, bien que la t-structure soit non-dégénérée.

On rappelle qu'un spectre E est dans $\mathbf{SH}_{<0}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(S^n_{\mathrm{s}}, \mathsf{E}) = 0$ et qu'un spectre F est dans $\mathbf{SH}_{\geq 0}$ si pour tout $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}_{<0}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(\mathsf{F}, \mathsf{E}) = 0$. On peut montrer qu'un spectre E est dans $\mathbf{SH}_{\geq 0}$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(S^n_{\mathrm{s}}, \mathsf{E}) = 0$ pour $n < 0$. On rappelle que l'on a un triangle distingué fonctoriel $\mathsf{E}_{\geq 1} \to \mathsf{E} \to \mathsf{E}_{\leq 0} \xrightarrow{+}$ pour tout $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$.

Lemme A.3. — *Soient* E *et* F *deux objets de* $\mathbf{SH}_{\geq 0}$. *Alors* $\mathsf{E} \wedge \mathsf{F} \in \mathbf{SH}_{\geq 0}$.

Démonstration. — C'est formel. En effet, l'énoncé est vrai si E et F sont des sphères de dimension positive ou nulle. Il en résulte formellement que la proposition est vraie en prenant $\mathsf{E} = S^n_{\mathrm{s}}$ avec $n \geq 0$. En recommençant l'argument, on obtient le cas général. $\square$

Pour démontrer le théorème, commençons par montrer l'énoncé suivant :

Corollaire A.4. — *Soit* $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}_{\geq 1}$. *Alors,* $\mathbf{H}_q(\mathsf{E}) = 0$ *pour* $q \leq 0$.

Démonstration. — On a $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}_{\geq 1}$ et $\mathsf{H}_{\mathbb{Z}} \in \mathbf{SH}_{\geq 0}$, d'après le lemme précédent $\mathsf{H}_{\mathbb{Z}} \wedge \mathsf{E} \in \mathbf{SH}_{\geq 1}$, d'où le résultat. $\square$

On se donne maintenant un spectre E vérifiant les hypothèses du théorème avec $q = 0$. On a un triangle distingué $\mathsf{E}_{\geq 1} \to \mathsf{E} \to \mathsf{E}_{\leq 0} \xrightarrow{+}$. Appliquons le morphisme de Hurewicz aux objets de ce triangle distingué. Grâce aux suites exactes qui en résultent et au corollaire précédent, on obtient qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où E est dans le cœur de la t-structure homotopique, c'est-à-dire que $\mathsf{E} = \mathsf{K}(G, 0)$ où G un groupe abélien. On utilise maintenant la *layer filtration* qui dit que E est la colimite filtrante du système $\Sigma^\infty K(G,n) \wedge S^{-n}_{\mathrm{s}}$. En appliquant la version classique du théorème de Hurewicz à ces espaces qui « deviennent de plus en plus connexes », on obtient le résultat voulu. $\square$

Remarque A.5. — On peut déduire du théorème précédent l'existence d'une suite spectrale de la forme $E^2_{pq} = \mathbf{H}_p(\mathsf{K}(\pi_q(\mathsf{E}), 0)) \Rightarrow \mathbf{H}_{p+q}(\mathsf{E})$ qui contient en fait le théorème comme cas particulier. On notera que cette suite spectrale est E^2-dégénérée si on tensorise avec $\mathbb{Q}$ et que rationnellement le morphisme de Hurewicz est un isomorphisme.

Théorème A.6. — *La catégorie* $\mathbf{SW}$ *est karoubienne.*

Démonstration. — L'idée de la démonstration consiste à partir d'un objet de $\mathbf{SW}^{\oplus}$ (que l'on identifie à son image dans $\mathbf{SH}$ qui est karoubienne), à tuer toute son homologie (en commençant par le plus bas degré) grâce au théorème de Hurewicz, et à conclure qu'un objet de $\mathbf{SW}^{\oplus}$ ayant une homologie nulle est nul. $\square$

Appendice B
Théorème de représentabilité de Brown

Il va s'agir de donner une formulation précise et juste du théorème de représentabilité de Brown dans le cadre de la catégorie homotopique stable des schémas. La méthode donnée ici fonctionne telle quelle dans plusieurs situations. On suppose ainsi que $\mathscr{C}$ est au choix la catégorie des ensembles simpliciaux pointés ou la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur le grand site Nisnevich lisse d'un schéma noethérien S, munie des structures de catégories de modèles habituelles ($\mathbb{A}^1$-localisées ou non). La catégorie $\mathbf{H}_\bullet$ désigne la catégorie homotopique de $\mathscr{C}$, $\widetilde{\mathbf{SW}}$ la catégorie triangulée tensorielle $\mathbf{H}_\bullet[T^{-1}]$ où $T = S^1_{\mathrm{s}}$ ou $(\mathbb{P}^1, \infty)$ et $\mathbf{SH}$ la catégorie homotopique stable des T-spectres dans $\mathscr{C}$. Notons j le foncteur évident $\mathbf{H}_\bullet \to \widetilde{\mathbf{SW}}$.

Définition B.1. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée. Un foncteur additif contravariant $F\colon \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ est dit cohomologique si et seulement si pour tout triangle distingué $X \to Y \to Z \to X[1]$, la suite $F(Z) \to F(Y) \to F(X)$ est exacte.

Pour tout T-spectre $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(-, \mathsf{E})$ est un foncteur cohomologique. On se demande alors à quelle condition, un foncteur cohomologique est isomorphe à un foncteur de cette forme.

Théorème B.2. — *Soit F un foncteur cohomologique $\mathbf{SH} \to \mathrm{Ab}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathbf{SH}$, on a un isomorphisme $F(\oplus_{i\in I} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} F(X_i)$;*
- *Il existe un objet $\mathsf{K}(F) \in \mathbf{SH}$ et une classe universelle $u \in F(\mathsf{K}(F))$ tel que le morphisme évident $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(-, \mathsf{K}(F)) \to F$ soit un isomorphisme de foncteurs contravariants $\mathbf{SH} \to \mathrm{Ab}$.*

Théorème B.3. — *Soit F un foncteur cohomologique $\widetilde{\mathbf{SW}} \to \mathrm{Ab}$. On suppose que pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathbf{H}_\bullet$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'application $F(T^{\wedge -n} \wedge \vee_{i\in I} X_i) \to \prod_{i\in I} F(T^{\wedge -n} \wedge X_i)$ est un isomorphisme. Alors, il existe un objet $\mathsf{K}(F) \in \mathbf{SH}$ et un isomorphisme de foncteurs $\widetilde{\mathbf{SW}}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(j(-), \mathsf{K}(F)) \to F(-)$$

où j désigne le foncteur triangulé évident $\widetilde{\mathbf{SW}} \to \mathbf{SH}$.

Théorème B.4. — *Soit F un foncteur cohomologique $\widetilde{\mathbf{SW}} \to \mathrm{Ab}$. On suppose que pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathbf{H}_\bullet$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'application $F(T^{\wedge -n} \wedge \vee_{i\in I} X_i) \to \prod_{i\in I} F(T^{\wedge -n} \wedge X_i)$ est un isomorphisme. Alors, il existe un objet $K(F) \in \mathbf{H}_\bullet$ et une classe universelle $u \in F(K(F))$ telle que le morphisme de foncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(-, K(F)) \to F(i(-))\colon \mathbf{H}_\bullet^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$$

qui s'en déduit soit un isomorphisme, où i désigne le foncteur évident $\mathbf{H}_\bullet \to \widetilde{\mathbf{SW}}$.

Démonstration de B.4 $\Longrightarrow$ B.2 et B.4 $\Longrightarrow$ B.3. — L'implication B.4 $\Longrightarrow$ B.3, bien que technique, est essentiellement une trivialité. Étudions de plus près l'implication B.4 $\Longrightarrow$ B.2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on sait qu'il existe un objet $\mathsf{K}_n(F) \in \mathscr{C}$ et une classe $u_n \in F(T^(\wedge -n) \wedge \Sigma_T^\infty \mathsf{K}_n(F))$ induisant un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(-, \mathsf{K}_n(F)) \xrightarrow{\sim} F(\Sigma_T^\infty(-) \wedge T^{\wedge -n})\colon \mathbf{H}_\bullet \to \mathbf{Ens}$, et l'on peut supposer que $\mathsf{K}_n(F)$ est fibrant. Il existe un unique isomorphisme raisonnable $\mathsf{K}_n(F) \to \mathbf{R}\Omega_T \mathsf{K}_{n+1}(F)$ dans $\mathbf{H}_\bullet$ que l'on peut relever dans $\mathscr{C}$, pour définir un spectre $\mathsf{K}(F)$. Grâce à la *layer* filtration, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{hocolim}_{n\in\mathbb{N}}(T^{\wedge -n} \wedge \Sigma_T^\infty \mathsf{K}_n(F)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(F)$. On a une suite exacte de Milnor pour le foncteur F, et par conséquent, l'application évidente suivante est surjective :

$$F(\mathsf{K}(F)) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} F(T^{\wedge -n} \wedge \Sigma_T^\infty \mathsf{K}_n(F))$$

Par construction, les classes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissent un élément de la limite projective. Il existe ainsi une classe $u_\infty \in F(\mathsf{K}(F))$ qui relève toutes ces classes u_n.

Grâce à u_∞, on peut définir un morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(-, \mathsf{K}) \to F(-)\colon \mathbf{SH} \to \mathrm{Ab}$. Par construction, ce morphisme est un isomorphisme sur les objets de la forme $T^{\wedge -n} \wedge \Sigma_T^\infty \mathscr{X}$ où $\mathscr{X} \in \mathbf{H}_\bullet$. En utilisant la *layer* filtration et le lemme des 5, ce morphisme de foncteurs est un isomorphisme puisque F transforme sommes directes dénombrables en produits. $\square$

Lemme B.5. — *Soit $F\colon \mathbf{H}_\bullet^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On fait les hypothèses suivantes :*

1. *pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathbf{H}_\bullet$, le morphisme $F(\vee_{i\in I} X_i) \to \prod_{i\in I} F(X_i)$ est un isomorphisme ;*
2. *pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathscr{C}$, la suite d'ensembles pointés[5] suivante est exacte :*
$$F(\mathit{cône}(f)) \to F(Y) \to F(X)$$
3. *pour tout système inductif $X_0 \to X_1 \to \cdots$ d'objets de $\mathscr{C}$, l'application*
$$F(\mathrm{hocolim}_{n\in\mathbb{N}} X_n) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} F(X_n)$$
est surjective.

Alors, il existe un objet $K(F) \in \mathbf{H}_\bullet$ et un élément $u \in F(K(F))$ tel que le morphisme qui s'en déduit $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(\mathscr{E}, K(F)) \to F(\mathscr{E})$ soit un isomorphisme pour tout objet $\mathscr{E} \in \mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$.

Démonstration. — Faisons comme si $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ était une petite catégorie (puisqu'elle est essentiellement petite). Notons Λ l'ensemble des couples $\lambda = (\mathscr{E}_\lambda, u_\lambda)$ où $\mathscr{E}_\lambda$ est un objet de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ et u_λ un élément de $F(E_\lambda)$. Notons $Y_0 = \vee_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{E}_\lambda$. D'après 1., il existe un (unique) élément $u_0 \in F(Y_0)$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, la restriction de u_0 à $\mathscr{E}_\lambda$ soit u_λ.

Définissons par étapes une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathscr{C}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $u_n \in F(Y_n)$ et des morphismes $(Y_n \to Y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que la restriction de u_{n+1} à Y_n soit Y_n. Supposons que Y_n et u_n sont définis. Notons $Y_n \to Y_n'$ une résolution fibrante de Y_n. On note encore par abus u_n l'unique élément de $F(Y_n')$ dont la restriction à Y_n soit u_n. On considère l'ensemble

[5] Le foncteur F est automatiquement à valeurs dans $\mathbf{Ens}_\bullet$ car $F(\bullet) = \bullet$ en vertu de 1.

I des couples $i=(\mathscr{E}_i,\alpha_i)$ où $\mathscr{E}_i$ est un objet de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$ et α_i un morphisme $\mathscr{E}_i\to Y'_n$ dans $\mathscr{C}$ tel que $F(\alpha_i)(u_n)=\bullet$. On considère alors le morphisme évident $f\colon \vee_{i\in I}\mathscr{E}_i\to Y'_n$, et on pose $Y_{n+1}=\mathrm{cône}(f)$. D'après 1. et 2., on a la suite exacte d'ensembles pointés suivante :

$$F(Y_{n+1})\to F(Y'_n)\to\prod_{i\in I}F(\mathscr{E}_i))$$

Par construction, il existe un élément $u_{n+1}\in F(Y_{n+1})$ dont la restriction à Y'_n est u_n. On a ainsi défini Y_{n+1}, u_{n+1} et le morphisme $Y_n\to Y_{n+1}$.

On peut maintenant poser $Y_\infty=\mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}Y_n$. D'après 3., il existe un élément $u_\infty\in F(Y_\infty)$ dont la restriction à Y_n est u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$. L'élément u_∞ induit alors un morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(-,Y_\infty)\to F(-)\colon \mathbf{H}_\bullet\to\mathbf{Ens}$. Quand on évalue ce morphisme sur un objet $\mathscr{E}$ de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$, d'après la construction de Y_0, l'application obtenue est surjective, et la construction récurrente implique l'injectivité puisque les objets de $\mathscr{E}$ sont homotopiquement de présentation finie. $\square$

Démonstration du théorème B.4. — On peut appliquer le lemme précédent au foncteur $\mathbf{H}_\bullet^{\mathrm{opp}}\to\mathbf{Ens}$ qui à X associe à $F(X)$. Il existe donc un objet $K\in\mathbf{H}_\bullet$ et $u\in F(K)$ tel que le morphisme de foncteurs $\mathbf{H}_\bullet^{\mathrm{opp}}\to\mathbf{Ens}$ correspondant $\varphi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(-,K)\to F(-)$ soit un isomorphisme sur les objets de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$. Essayons de démontrer que φ_X est un isomorphisme. Soit X un objet quelconque de $\mathscr{C}$. Par un argument du petit objet, on sait que, quitte à remplacer X par un objet qui lui est isomorphe dans $\mathbf{H}_\bullet$, on peut supposer que $\bullet\to X$ est un composé dénombrable d'images directes de cofibrations entre objets de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$. Notons $\bullet=X_0\to X_1\to\cdots\to$ un système inductif dont la colimite soit X et tel que $X_n\to X_{n+1}$ soit l'image directe d'une somme directe de cofibrations entre objets de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\varphi_{S^2_{\mathrm{s}}\wedge X_n}$ est un isomorphisme. Pour $n=0$, c'est évident. On suppose que $\varphi_{S^2_{\mathrm{s}}\wedge X_n}$ est un isomorphisme. Donnons nous un carré homotopiquement cocartésien de la forme suivante, où les morphismes $A_i\to B_i$ sont des cofibrations entre objets de $\mathbf{Esp}_\bullet^{\mathrm{tf}}$:

$$\begin{tikzcd} \vee_{i\in I}A_i \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[d] \\ \vee_{i\in I}B_i \arrow[r] & X_{n+1} \end{tikzcd}$$

Il est établi dans [**R**, lemme 5.16, page 65] qu'il existe un triangle distingué de la forme

$$\vee A_i\to X_n\oplus\vee_{i\in I}B_i\to X_{n+1}\to\vee_{i\in I}S^1_{\mathrm{s}}\wedge A_i$$

dans $\widetilde{\mathbf{SW}}$ où le morphisme non évident $X_{n+1}\to\vee_{i\in I}S^1_{\mathrm{s}}\wedge A_i$ provient d'un morphisme dans $\mathbf{H}_\bullet$. On remarque alors que les morphismes de la forme $\varphi_{S^2_{\mathrm{s}}\wedge W}$ où W est un objet de $\mathbf{H}_\bullet$ sont des morphismes de *groupes abéliens*. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence, le lemme précédent et le lemme des 5 pour montrer que $\varphi_{S^2_{\mathrm{s}}\wedge X_{n+1}}$ est un isomorphisme. En utilisant un triangle distingué $\oplus_{n\in\mathbb{N}}X_n\to\oplus_{n\in\mathbb{N}}X_n\to X\xrightarrow{+}$, on obtient que $\varphi_{S^2_{\mathrm{s}}\wedge X}$ est un isomorphisme. On obtient ainsi le résultat du théorème pour le foncteur cohomologique $F(S^2_{\mathrm{s}}\wedge -)$, d'où le résultat puisque l'on peut remplacer F par $F(S^{-2}_{\mathrm{s}}\wedge -)$. $\square$

Définition B.6. — On appelle théorie cohomologique sur $\widetilde{\mathbf{SW}}$ la donnée d'un foncteur contravariant $\mathsf{E}^0 \colon \widetilde{\mathbf{SW}} \to \mathrm{Ab}$ vérifiant l'hypothèse du théorème B.3.

Corollaire B.7. — *Le foncteur qui à un spectre* $\mathsf{E} \in \mathbf{SH}$ *associe sa théorie cohomologique* E^0 *sur* $\widetilde{\mathbf{SW}}$ *est plein et essentiellement surjectif.*

Démonstration. — Le théorème B.3 dit exactement que ce foncteur est essentiellement surjectif. Examinons sa plénitude. Donnons nous deux spectres E et F. On peut supposer que E et F sont deux Ω-spectres. La suite exacte de Milnor donne la surjectivité de l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(\mathsf{E}, \mathsf{F}) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(T^{\wedge -n} \wedge \Sigma^\infty_T \mathsf{E}_n, \mathsf{F}) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(\mathsf{E}_n, \mathsf{F}_n)$. D'après le lemme de Yoneda, $\mathrm{hom}_{\mathbf{H}_\bullet}(\mathsf{E}_n, \mathsf{F}_n)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes de foncteurs $\mathsf{E}_n(-) \to \mathsf{F}_n(-) \colon \widetilde{\mathbf{SW}}^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$. On identifie facilement la limite projective de ce système aux homomorphismes de théories cohomologiques sur $\widetilde{\mathbf{SW}}$ de E^0 vers F^0. □

Bibliographie

[Ada] **John F. Adams**. Stable homotopy and generalised homology. *Chicago Lectures in Mathematics*, (1974). *The University of Chicago Press.*

[EGA] **Alexander Grothendieck**, **Jean Dieudonné**. Éléments de géométrie algébrique. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **4** (1960), **8** (1961), **11** (1961), **17** (1963), **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[Jou] **Jean-Pierre Jouanolou**. Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique. in *Higher* K*-theories*. Volume I. *Lectures Notes in Mathematics*, **341** (1973), pages 293–316. *Springer.*

[LMS] **L.Gaunce Lewis, Jr.**, **J. Peter May**, **Mark Steinberger**. Equivariant stable homotopy theory. *Lecture Notes in Mathematics*, **1213** (1986). *Springer-Verlag.*

[Morel] **Fabien Morel**. Stable $\mathbb{A}^1$-homotopy theory I. Preprint. (2002).

[MV] **Fabien Morel**, **Vladimir Voevodsky**. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **90** (1999), pages 45–143.

[R] **Joël Riou**. Théorie homotopique des S-schémas. *Mémoire de DEA*. Université de Paris 7. (Janvier 2002). `http://www.eleves.ens.fr/home/jriou/maths/dea.html`

[Spa] **Edwin H. Spanier**. Algebraic Topology. (1989). *Springer.*

[Swi] **Robert M. Switzer**. Algebraic topology, homotopy and homology. (1975). *Springer.*

[TT] **Robert W. Thomason**, **Thomas Trobaugh**. Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories *in The Grothendieck Festschrift : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck*, Volume III, pages 247–436. *Progress in Mathematics*, **88** (1990). *Birkhaüser.*

[Voe] **Vladimir Voevodsky**. On 2-torsion in motivic cohomology. Preprint. Juin 2001.

Le 3 avril 2002

Joël Riou, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *Url :* `http://www.eleves.ens.fr/home/jriou/`
• *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~riou/`
• *E-mail :* `riou@math.jussieu.fr`