Université Denis Diderot (Paris VII) **2004-2005**
MT232

Corrigé du Partiel
Samedi 2 avril

Exercice 1 — On considère l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de taille 2 et l'application $q_a : E \to \mathbb{R},\ q_a(X) = \det(X) + a\mathrm{Tr}(X^2)$ dépendant d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.
On pose

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le système (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre car si $\sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle, cela signifie que chacun des λ_i est nul. De plus toute matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ s'écrit $X = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$, donc se système est générateur. Le système (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc bien une base de E.
2. (a) L'application $\tilde{B} : E \times E \to \mathbb{R},\ (X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(XY)$ est une forme bilinéaire, car la trace est une application linéaire. Puisque $\tilde{q}(X) = \tilde{B}(X, X)$, l'application $\tilde{q}$ est bien une forme quadratique.
   (b) On a $\det(X) = x_1x_4 - x_2x_3$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Cette application $\hat{q} : E \to \mathbb{R},\ X \mapsto \det(X)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les coefficients de X dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4). C'est donc bien une forme quadratique.
   (c) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $q_a = \hat{q} + a\tilde{q}$, avec $\hat{q}$ et $\tilde{q}$ des formes quadratiques. L'ensemble des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de E dans $\mathbb{R}$ donc q_a est bien une forme quadratique.
3. Désignons par B_a la forme polaire associée à q_a. On a $B_a(X, Y) = \frac{1}{2}(\det(X + Y) - \det(X) - \det(Y)) + a\mathrm{Tr}(XY)$. On évalue ensuite $B_a(e_i, e_j)$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$. On obtient la matrice A_a suivante pour q_a :

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & a - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   – Si $a \neq \frac{1}{2}$ et $a \neq -\frac{1}{2}$, la matrice A_a est inversible et donc $\ker q_a = \{0\}$.

   – Si $a = \frac{1}{2}$, la matrice $A_{\frac{1}{2}}$ est de rang 1 et on a

$$\ker q_{\frac{1}{2}} = \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4, x_1 + x_4 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

   – Si $a = -\frac{1}{2}$, la matrice $A_{-\frac{1}{2}}$ est de rang 3 et on a

$$\ker q_{-\frac{1}{2}} = \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4, x_2 = x_3 = x_1 - x_4 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. On suppose $a = \frac{1}{2}$. Posons $F = \mathbb{R}e_2$. D'après la question précédente, $F \subset kerq_{\frac{1}{2}}$, donc tout vecteur de E est orthogonal à F. cela signifie que $F^\perp = E$, et donc $\dim F + \dim F^\perp = 1 + 4 = 5 > 4$.

5. On suppose $a=0$. Soit G l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux pour la forme quadratique q_0 à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$.

   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$; on a

   $$B_0(X,M) = \frac{1}{2}(\det(X+M)-\det(X)-\det(M)) = \frac{1}{2}[(x_1+1)(x_4+m)-x_2x_3-x_1x_4+x_2x_3-m] = \frac{1}{2}(mx_1+x_4).$$

   L'ensemble G des vecteurs de E orthogonaux à M est donc égal à $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, mx_1+x_4=0 \right\}$.
   C'est un espace vectoriel de dimension 3, car c'est l'orthogonal pour la forme quadratique q_0, qui est non dégénérée, de la droite de E engendré par M. Le système (e_1-me_4, e_2, e_3) définit une base de G

   (b) On sait, d'après la question précédente que $G^\perp$ est de dimension 1 et contient M, c'est donc bien la droite de E engendré par M. On a alors $\dim G + \dim G^\perp = 4$, et donc on a $G \oplus G^\perp = E$ si et seulement si $G \cap G^\perp = \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $M \notin G^\perp$. Or $B_0(M,M) = m$, on a donc $G \oplus G^\perp = E$, sauf si $m=0$.

6. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. On a $X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2x_3 & x_1x_2 + x_2x_4 \\ x_1x_3 + x_3x_4 & x_4^2 + x_2x_3 \end{pmatrix}$ et donc on peut écrire

   $$q_a(X) = x_1x_4 + a(x_1^2 + x_4^2) + (2a-1)x_2x_3.$$

   Appliquons la méthode de réduction de Gauss, dans le cas $a \neq 0$. On a :

   $$q_a(X) = a(x_1 + \frac{1}{2a}x_4)^2 + a(1-\frac{1}{4a^2})x_4^2 + \frac{2a-1}{4}\left[(x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2\right].$$

   La signature de q_a est donc égale à
   - $\mathrm{sign}(q_a) = (1,3)$ si $a < -\frac{1}{2}$ car $a<0$, $1-\frac{1}{4a^2} > 0$ et $\frac{2a-1}{4} < 0$;
   - $\mathrm{sign}(q_a) = (1,2)$ si $a = -\frac{1}{2}$ car $a<0$, $1-\frac{1}{4a^2} = 0$ et $\frac{2a-1}{4} < 0$;
   - $\mathrm{sign}(q_a) = (2,2)$ si $-\frac{1}{2} < a < 0$ car $a<0$, $1-\frac{1}{4a^2} < 0$ et $\frac{2a-1}{4} < 0$;
   - $\mathrm{sign}(q_a) = (2,2)$ si $a=0$ car $q_0(X) = \frac{11}{4}\left[(x_1+x_4)^2 - (x_1-x_4)^2\right] - \frac{1}{4}\left[(x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2\right]$;
   - $\mathrm{sign}(q_a) = (2,2)$ si $0 < a < \frac{1}{2}$ car $a>0$, $1-\frac{1}{4a^2} < 0$ et $\frac{2a-1}{4} < 0$;
   - $\mathrm{sign}(q_a) = (1,0)$ si $a = \frac{1}{2}$ car $a>0$, $1-\frac{1}{4a^2} = 0$ et $\frac{2a-1}{4} = 0$;
   - $\mathrm{sign}(q_a) = (3,1)$ si $\frac{1}{2} < a$ car $a>0$, $1-\frac{1}{4a^2} > 0$ et $\frac{2a-1}{4} > 0$.

   .

7. On suppose que $a=1$, on a alors

   $$q_1(X) = (x_1 + \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{3}{4}x_4^2 + \frac{1}{4}\left[(x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2\right].$$

   Posons $l_1(X) = x_1 + \frac{1}{2}x_4$, $l_2(X) = x_2+x_3$, $l_3(X) = x_2-x_3$ et $l_4(X) = x_4$. Ces formes linéaires sur E sont linéairement indépendantes et la base duale (u_1,u_2,u_3,u_4) de (l_1,l_2,l_3,l_4) est une base orthogonale pour q_1. Les équations $l_i(u_j) = \delta_{ij}$, avec δ_{ij} le symbole de Kronecker permettent de déterminer les u_j. On obtient $u_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{2}(e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \frac{1}{2}(e_2-e_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = -\frac{1}{2}e_1 + e_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice de q_1 dans cette base est donnée par

   $$A_0' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 — On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. On pose

$$u_1 = (1,2,2)\ ,\ u_2 = (1,3,1)\ ,\ u_3 = (0,12,6).$$

1. (a) Les vecteurs (u_1, u_2, u_3) forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$car c'est un système libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. En effet si $\lambda_1 u_1 = \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, alors on a $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 12\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ car ce système est de Cramer.

   (b) – On a $\|u_1\|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$. On pose donc $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}u_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$.
   – Posons $\varepsilon_2' = u_2 - \langle u_2,\, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1$. On a $\langle u_2,\, \varepsilon_1\rangle = 3$, on a donc $\varepsilon_2' = u_2 - u_1 = (0,-1,1)$. De plus $\|\varepsilon_2'\|^2 = 2$, on a donc $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0)$.
   – Posons $\varepsilon_3' = u_3 - \langle u_3,\, \varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 - \langle u_3,\, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1$. On a $\langle u_3,\, \varepsilon_1\rangle = 12$ et $\langle u_3,\, \varepsilon_2\rangle = -3\sqrt{2}$, on a donc $\varepsilon_3' = u_3 + 3(0,-1,1) - 4u_1 = (-4,1,1)$. De plus $\|\varepsilon_3'\|^2 = 18$, on a donc $\varepsilon_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4,1,1)$.

2. On considère la projection orthogonale p sur la droite $\mathbb{R}u_1$

   (a) L'endomorphisme p projette ε_1 sur lui-même car ce vecteur est sur la droite $\mathbb{R}u_1$, et ε_2 ,ε_3 sur 0 car ces vecteurs sont orthogonaux à u_1. La matrice de p dans cette base est donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) On peut écrire p sous la forme $p(x) = \langle x,\, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1$.La matrice de p dans la base canonique est donc la matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

   (c) La projection p projette $\mathbb{R}^3$ sur une droite. Le rang de p est donc égal à 1.

Exercice 3 — On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = 2(xy + yz + xz).$$

La matrice de la forme quadratique q dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q **et** orthonormale pour le produit scalaire usuel revient à trouver une base de vecteurs propres de A qui soit orthonormale pour le produit scalaire usuel, ce qui est toujours possible d'après le théorème du cours sur la diagonalisation des matrices symétriques réelles. Les valeurs propres de A sont 2 et -1, qui est valeur propre double. Les espaces propres associés sont respectivement $E_2 = \{\lambda(1,1,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $E_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\} = E_2^{\perp}$. Pour trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et orthonormale pour le produit scalaire usuel, il suffit donc de trouver une base orthonormale de E_2 et une base orthonormale de E_{-1}. Posons $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$. Alors (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et orthonormale pour le produit scalaire usuel.

Exercice 4 — On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et u un vecteur unitaire de E, représenté matriciellement par le vecteur colonne U dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $k \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on pose $f_k(x) = x + k\langle x,\, u\rangle u$.

1. L'application f_k de E dans E est bien un endomorphisme car elle est linéaire. Cet endomorphisme est bijectif si et seulement si $\ker f_k = \{0\}$. Si $f_k(x) = 0$, alors $x = -k\langle x,\, u\rangle u$, donc x doit être

colinéaire à u. Posons $x = \lambda u$. On obtient $(1+k)\lambda u = 0$. Donc si $k \neq -1$, f_k est un endomorphisme bijectif.

2. Soient x et y dans E, on a

$$\langle f_k(x),\, y\rangle = \langle x + k\langle x,\, u\rangle u,\, y\rangle = \langle x,\, y\rangle + \langle x,\, u\rangle\langle u,\, y\rangle = \langle x,\, f_k(y)\rangle.$$

L'endomorphisme f_k est un endomorphisme symétrique de E. La matrice A_k de f_k dans la base canonique est donc symétrique, et on a $A_k = I + kU{}^tU$.

3. On suppose $k = -2$. On a $\|f_{-2}(x)\|^2 = \|x\|^2 + (4-4)\langle x,\, u\rangle^2$, donc on a bien $\|f_{-2}(x)\|^2 = \|x\|^2$. L'endomorphisme f_{-2} est donc une isométrie symétrique. Les valeurs propres de f_{-2} sont donc réelles et de module 1, et f_{-2} est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ce qui implique que f_{-2} est une symétrie orthogonale. L'expression de f_{-2} montre qu'il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}u)^\perp$. L'espace propre associé à la valeur propre -1 est donc $\mathbb{R}u$ et l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $(\mathbb{R}u)^\perp$

4. L'endomorphisme f_k est une isométrie si et seulement si pour tout $x \in E$, on a $\|f_k(x)\|^2 = \|x\|^2$. Or on a $\|f_k(x)\|^2 = \|x\|^2 + (k^2+2k)\langle x,\, u\rangle^2$. Donc f_k est une isométrie si et seulement si $k = 0$ ou $k = -2$.