

DM n°2

Ce devoir à la maison doit être préparé individuellement par chaque étudiant. **Il doit être remis à votre chargé de TD lors de votre séance de TD pendant la semaine du 4 novembre.** (Il ne pourra être envisagé de transmettre votre devoir par mail qu'en cas d'absence dûment justifiée.)

La précision des raisonnements et la qualité de la rédaction compteront de façon significative dans la notation. Il est bien sûr important d'obtenir des résultats et calculs corrects, mais il est au moins aussi important que les justifications essentielles soient données et que les symboles mathématiques soient utilisés correctement.

Exercice I

On considère dans \mathbb{R}^3 le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 4x + 11y = 37 \end{cases}$$

- (1) Écrire la matrice augmentée correspondant à ce système.
- (2) Résoudre le système en appliquant l'algorithme de Gauss.
- (3) Interpréter géométriquement dans \mathbb{R}^3 ce qui précède en terme d'intersection de plans dans \mathbb{R}^3 .

Exercice II

On se donne $n \geq 1$ un entier. Et on considère dans \mathbb{R}^n le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots = \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \end{cases}$$

- (1) Écrire la matrice augmentée et résoudre le système en appliquant l'algorithme de Gauss et en explicitant les opérations effectuées. (Indication : commencer si nécessaire par le cas $n = 4$.)
- (2) En raisonnant par récurrence donner une méthode permettant d'aboutir plus simplement à la résolution du système sans passer par l'algorithme de Gauss.

Exercice III

Les matrices A, B, C, D suivantes sont-elles échelonnées (on justifiera les réponses données)? On pourra discuter en fonction de la valeur du paramètre réel a .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice IV

On considère dans \mathbb{R}^3 le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - y + 4z = 6 \end{cases}$$

- (1) Donner l'ensemble des solutions de ce système.
- (2) Justifier qu'il s'agit d'une droite que l'on explicitera sous forme paramétrique. On notera D_1 cette droite.
- (3) On considère par ailleurs la droite D_2 paramétrée par l'ensemble

$$M(t) = (t, 2t - 11, -3t + 15), \text{ pour } t \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection $D_1 \cap D_2$.