École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Corrigé de l'examen du 19 décembre 2024

Exercice I

Dire en le justifiant si les matrices suivantes sont inversibles ou non (on ne demande pas de calculer l'inverse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Une matrice n'est pas inversible si non carrée et par ailleurs on utilise le critère disant qu'une matrice carrée échelonnée est inversible si et seulement si elle admet autant de pivots que de lignes. Ceci permet de dire que parmi A, B, C, D, et D, seules C et E sont inversibles. La matrice F n'est pas inversible parce que la première colonne est égale à la troisième colonnes.

Exercice II

(1) Calculer l'inverse de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La méthode standard consiste à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & \frac{1}{9}L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & -L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Résoudre ensuite le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} & & -z & + & 2t & = & 1 \\ & y & & & & = & 2 \\ 9x & & & & & = & 3 \\ & & & & t & = & 4 \end{cases}$$

On peut résoudre directement le système (qui donne directement les valeurs de x, y et z, et la première équation permet de déterminer z), ou bien faire le calcul suivant :

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

L'unique solution est donnée par $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$, $z = 7$, $t = 4$.

Exercice III

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on introduit le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $x - y + 2z = 4$ et le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x - 3y - z = 5$. On note $\mathscr{D} := \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ l'intersection de ces deux plans.

Déterminer un paramétrage de $\mathscr{D}$.

Pour déterminer $\mathscr{D}$, on commence par résoudre le système formé des équations définissant $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$:

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & - & z & = & 5 \end{cases}$$

On obtient un système équivalent en effectuant l'opération élémentaire $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ & - & y & - & 5z & = & -3 \end{cases}$$

Ce système est échelonné et compatible. Les variables principales sont x et y. La variable secondaire est z. Pour tout $z \in \mathbf{R}$, il existe donc un unique couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $(x, y, z) \in \mathscr{D}$. On peut exprimer y, puis x en fonction de z :

$$\begin{cases} y & = & 3 - 5z \\ x & = & 4 + y - 2z = 4 + (3 - 5z) - 2z = 7 - 7z \end{cases}$$

On en déduit que si on note $M(t) = (7 - 7t, 3 - 5t, t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, alors $M(t)$ est un paramétrage de $\mathscr{D}$ (qui est donc une droite).

Exercice IV

Un nombre réel a arbitraire étant fixé, on considère le système suivant d'inconnues x, y et z :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

(1) Montrer que la matrice augmentée correspondant au système est équivalente à la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & (a+2)(3-a) & 3-a \end{array}\right)$.

> On applique le pivot de Gauss à la matrice augmentée correspondant au système. On effectue les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$; puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2$ ce qui nous permet de mettre la matrice sous la forme voulue.

Déterminer les valeurs de $a \in \mathbf{R}$ pour lesquelles le système :

(2) N'a pas de solution.

(3) Admet une infinité de solutions.

(4) Admet une unique solution.

> Si $a = -2$ la dernière ligne donne un système qui n'est pas compatible donc pas de solution. Si $a = 3$ la dernière ligne est de la forme $0 = 0$ et on voit que x et y sont des inconnues principales qui s'expriment en fonction de l'inconnue secondaire z : il y a une infinité de solutions. Sinon les 3 sont inconnues principales et le système est compatible ; il y a donc dans ce cas une unique solution.

Exercice V

Calculer les produits matriciels suivants lorsqu'ils sont possibles. S'ils sont impossibles, justifier pourquoi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dans un produit matriciel AB, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, donc seul le premier produit est défini et on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}$$

Exercice VI

On introduit deux matrices $C \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ et $L \in M_{1,3}(\mathbf{R})$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le produit matriciel $M := CL \in M_3(\mathbf{R})$.

$$M = CL = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Calculer le produit matriciel $LC \in M_1(\mathbf{R})$. (On pourra identifier LC à un nombre réel.)

$$LC = 6$$

(3) Calculer $M^2 = (CL)(CL)$.

En utilisant notamment l'associativité de la multiplication des matrices, on obtient :

$$M^2 = C(LC)L = 6CL$$

(4) Montrer que $M^2 = 6M$.

Cela résulte immédiatement de la question précédente : $M^2 = 6CL = 6M$.

On note $A := \mathbf{I} - \frac{1}{3}M$ où $\mathbf{I} \in M_3(\mathbf{R})$ désigne la matrice identité.
(5) Calculer A^2.

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}M\right)\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}M\right) \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{3}M - \frac{1}{3}M + \frac{1}{9}M^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{2}{3}M + \frac{1}{9}(6M) \\ &= \mathbf{I} - \frac{2}{3}M + \frac{2}{3}M \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

(6) Déterminer A^{-1}.

Comme $A^2 = \mathbf{I}$, on a $A^{-1} = A$.