École universitaire Paris-Saclay — Licence de mathématiques

Année universitaire 2024/2025 — MEU 102 Algèbre et géométrie

Examen du 19 décembre 2024 – durée : deux heures

Documents et calculatrices interdits.

Lorsque vous effectuez des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ou sur les équations d'un système linéaire, **vous devez impérativement préciser ces opérations sur votre copie**.

Exercice I

Dire en le justifiant si les matrices suivantes sont inversibles ou non (on ne demande pas de calculer l'inverse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice II

(1) Calculer l'inverse de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Résoudre ensuite le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & & & -z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & & & & & = & 2 \\ 9x & & & & & & & = & 3 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array} \right.$$

Exercice III

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on introduit le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $x - y + 2z = 4$ et le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x - 3y - z = 5$. On note $\mathscr{D} := \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ l'intersection de ces deux plans.

Déterminer un paramétrage de $\mathscr{D}$.

Exercice IV

Un nombre réel a arbitraire étant fixé, on considère le système suivant d'inconnues x, y et z :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

(1) Montrer que la matrice augmentée correspondant au système est équivalente à la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & (a+2)(3-a) & 3-a \end{array}\right)$.

Déterminer les valeurs de $a \in \mathbf{R}$ pour lesquelles le système :

(2) N'a pas de solution.

(3) Admet une infinité de solutions.

(4) Admet une unique solution.

Exercice V

Calculer les produits matriciels suivants lorsqu'ils sont possibles. S'ils sont impossibles, justifier pourquoi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice VI

On introduit deux matrices $C \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ et $L \in M_{1,3}(\mathbf{R})$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le produit matriciel $M := CL \in M_3(\mathbf{R})$.

(2) Calculer le produit matriciel $LC \in M_1(\mathbf{R})$. (On pourra identifier LC à un nombre réel.)

(3) Calculer $M^2 = (CL)(CL)$.

(4) Montrer que $M^2 = 6M$.

On note $A := \mathbf{I} - \frac{1}{3}M$ où $\mathbf{I} \in M_3(\mathbf{R})$ désigne la matrice identité.

(5) Calculer A^2.

(6) Déterminer A^{-1}.