

## DM n°2

Ce devoir à la maison doit être préparé individuellement par chaque étudiant. **Il doit être remis à votre chargé de TD lors de votre séance de TD pendant la semaine du 10 novembre.** (Il ne pourra être envisagé de transmettre votre devoir par mail qu'en cas d'absence dûment justifiée.)

**La précision des raisonnements et la qualité de la rédaction compteront de façon significative dans la notation.** Il est bien sûr important d'obtenir des résultats et calculs corrects, mais il est au moins aussi important que les justifications essentielles soient données et que les symboles mathématiques soient utilisés correctement.

### Exercice I

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ x + 4y = 1 \\ 4x + 10y + 3z = 7 \\ 2x + 6y + z = 3 \end{cases}$$

- (1) Écrire la matrice augmentée correspondant à ce système.
- (2) Résoudre le système en appliquant l'algorithme de Gauss.
- (3) Interpréter géométriquement dans  $\mathbb{R}^3$  ce qui précède en terme d'intersection de plans dans  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice II

On se donne  $n \geq 1$  un entier. Et on considère dans  $\mathbb{R}^n$  le système suivant :

$$\begin{cases} x_n = 1 \\ x_{n-1} + x_n = 2 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n = n \end{cases}$$

- (1) Écrire la matrice augmentée. Décrire les opérations sur les lignes que l'on peut faire pour mettre cette matrice sous forme échelonnée. En déduire que le système possède une unique solution. (Indication : commencer si nécessaire par le cas  $n = 4$ .)
- (2) Déterminer l'unique solution du système.

### Exercice III

Les matrices  $A, B, C, D$  suivantes sont-elles échelonnées (on justifiera les réponses données)? On pourra discuter en fonction de la valeur du paramètre réel  $a$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice IV

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + 7z = 8 \end{cases}$$

- (1) Donner l'ensemble des solutions de ce système.
- (2) Justifier qu'il s'agit d'une droite que l'on explicitera sous forme paramétrique. On notera  $D_1$  cette droite.
- (3) On considère par ailleurs la droite  $D_2$  paramétrée par l'ensemble

$$N(t) = (2 - t, -6 + t, -3 + t), \text{ pour } t \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection  $D_1 \cap D_2$ .