

Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} & x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - L_1 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - L_1 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - L_1 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3 .
Pas de variable secondaire.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3 . Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3 . Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3 . Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3 . Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

Les pivots sont maintenant égaux à 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \right]$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3 . Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

Les pivots sont maintenant égaux à 1. Il reste à annuler les coefficients placés au-dessus des pivots.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array} \right]$$

$$L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array} \right]$$

$$L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

L'unique solution du système est
(1, -3, 3).