

Feuille d'exercices n°1

Pour tous les exercices de cette feuille, même si ce n'est pas explicitement demandé, il peut être utile de représenter graphiquement les différents objets mathématiques considérés sur une figure.

Exercice I

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par l'équation cartésienne $xy = 1$. Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $\mathcal{C}$:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------------|
| ★ $(0, 1)$; non | ★ $(-1, -1)$; oui |
| ★ $(1, 1)$; oui | ★ $(1, 2)$; non |
| ★ $(1, -1)$; non | ★ $(\frac{1}{2}, 2)$; oui |

Exercice II

On considère la droite $\mathcal{D}$ dont un paramétrage $(X(t), Y(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$ est donné par

$$\begin{cases} X(t) = 2 + 3t \\ Y(t) = -1 + 2t \end{cases}$$

(1) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $\mathcal{D}$:

- | | |
|---|--|
| ★ $(0, 0)$; non | ★ $(5, 1)$; oui : $t = 1$ |
| ★ $(2, -1)$; oui : $t = 0$ | ★ $(2, 2)$; non |
| ★ $(3, 3)$; non | ★ $(\frac{7}{2}, 0)$; oui : $t = \frac{1}{2}$ |

(2) Déterminer une équation cartésienne (E) satisfaite par tous les points de $\mathcal{D}$.

On remarque que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $2X(t) - 3Y(t) = 7$, donc donc les points de $\mathcal{D}$ appartiennent à la droite d'équation $2x - 3y = 7$.

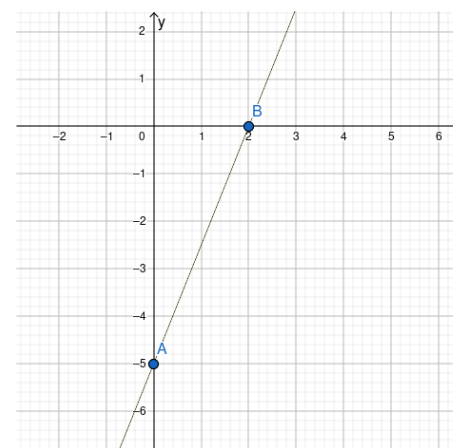
(3) D'après le cours, $\mathcal{D}$ est la droite d'équation (E) . Redémontrez rigoureusement cette égalité par double inclusion.

Si $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors il existe $t \in \mathbf{R}$, tel que $(x, y) = (X(t), Y(t))$, et on vient de montrer que $2x - 3y = 7$.

Réciproquement, si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est tel que $2x - 3y = 7$, on cherche à montrer l'existence de $t \in \mathbf{R}$ tel que $(x, y) = (X(t), Y(t))$. Si c'est le cas, on doit avoir $2 + 3t = x$, c'est-à-dire $t = \frac{x-2}{3}$. Posons $t := \frac{x-2}{3}$ et calculons $X(t)$ et $Y(t)$. Bien sûr, $X(t) = x$. Par ailleurs, $Y(t) = -1 + \frac{2(x-2)}{3} = \frac{2x-7}{3}$. En utilisant la relation $2x - 3y = 7$, on obtient $Y(t) = \frac{3y}{3} = y$. On a bien montré $(x, y) = (X(t), Y(t))$, donc $(x, y) \in \mathcal{D}$.

Exercice III

(1) Représenter graphiquement dans le plan la droite $\mathcal{D}$ d'équation « $5x - 2y = 10$ ».



Pour faire la construction, il convient de s'aider des réponses à l'une ou à l'autre des questions suivantes.

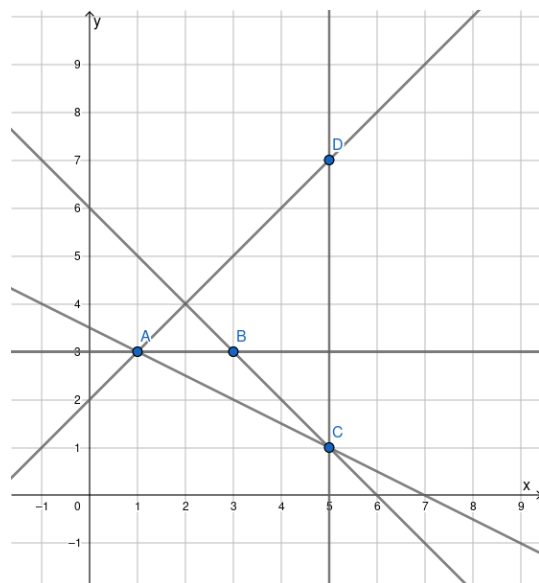
(2) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{D}$.

L'équation réduite de $\mathcal{D}$ est $y = \frac{5}{2}x - 5$. L'ordonnée à l'origine est -5 , ce qui donne l'appartenance à $\mathcal{D}$ du point $(0, -5)$. Le coefficient directeur $\frac{5}{2}$ permet de tracer la droite (par exemple parce que $(5, 2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$).

(3) Donner les coordonnées de deux points distincts appartenant à $\mathcal{D}$.

À l'équation $5x - 2y = 10$, on peut chercher une solution qui vérifie de plus $x = 0$: $A = (0, -5)$. En faisant $y = 0$, on obtient aussi $B = (2, 0)$. La droite $\mathcal{D}$ est donc la droite (AB) .

Exercice IV



Déterminer un paramétrage des droites (AB) , (AC) , (BC) , (AD) , (CD) .

Parmi les réponses possibles, il y a celles-ci, pour lesquelles on obtient les deux points définissant la droite avec les paramètres $t = 0$ et $t = 1$. Pour (AB) , $X(t) = 1 + 2t$, $Y(t) = 3$.

Pour (AC) , $X(t) = 1 + 4t$, $Y(t) = 3 - 2t$.

Pour (BC) , $X(t) = 3 + 2t$, $Y(t) = 3 - 2t$.

Pour (AD) , $X(t) = 1 + 4t$, $Y(t) = 3 + 4t$.

Pour (CD) , $X(t) = 5$, $Y(t) = 1 + 6t$.

Exercice V

Pour chacune des cinq droites considérées dans l'exercice IV, déterminer

– une équation cartésienne ;

(AB) est définie par $y = 3$.

(AC) est définie par $x + 2y = 7$.

(BC) est définie par $x + y = 6$.

(AD) est définie par $x - y = -2$.

(CD) est définie par $x = 5$.

(Par exemple pour (BC) , en utilisant la paramétrage $X(t) = 3 + 2t$ et $Y(t) = 3 - 2t$, on constate que $X(t) + Y(t) = 6$: on a éliminé t de l'expression. Ainsi, tous les points de (BC) appartiennent à la droite d'équation cartésienne $x + y = 6$. Le cours permet de conclure que (BC) est exactement la droite d'équation $x + y = 6$.)

– l'équation réduite.

(AB) est définie par $y = 3$.

(AC) est définie par $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

(BC) est définie par $y = -x + 6$.

(AD) est définie par $y = x + 2$.

(CD) est définie par $x = 5$.

Exercice VI

(1) Avec les notations de l'exercice IV, déterminer les points d'intersections des droites :

– (AB) et (BC) ;

Il est évident que $(AB) \cap (BC) = \{B\}$.

– (AB) et (CD) ;

En utilisant les équations cartésiennes des deux droites, on obtient que si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors $(x, y) \in (AB) \cap (CD)$ si et seulement si $y = 3$ et $x = 5$. Autrement dit, $(AB) \cap (CD) = \{E\}$ où $E = (5, 3)$.

– (AD) et (BC) ; $\{(2, 4)\}$

On cherche $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant les deux équations $y = x + 2$ et $y = -x + 6$. Il suffit pour cela de déterminer x tel que $x + 2 = -x + 6$, c'est-à-dire $2x = 4$, ou encore $x = 2$. Le point d'intersection est donc $(2, 4)$.

– (AC) et (BD) .

On connaît l'équation cartésienne $x + 2y = 7$ de (AC) . Un paramétrage de (BD) est donné par les formules $X(t) = 3 + 2t$ et $Y(t) = 3 + 4t$. Les points éventuels appartenant à $(AC) \cap (BD)$ sont les $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ tel

que $X(t) + 2Y(t) = 7$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on calcule $X(t) + 2Y(t) = 9 + 10t$. On doit donc résoudre l'équation $9 + 10t = 7$, c'est-à-dire $t = -\frac{1}{5}$. On en déduit que le point d'intersection F de (AC) et (BD) est $M(-\frac{1}{5}) = (\frac{13}{5}, \frac{11}{5})$.

- (2) Si on note E le point d'intersection de (AB) et (CD) et F celui de (AC) et (BD) , déterminer une équation de la droite (EF) .

Parmi les méthodes possibles, on peut commencer par déterminer un vecteur directeur de (EF) : $\overrightarrow{FE} = (5 - \frac{13}{5}, 3 - \frac{11}{5}) = (\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$. On en déduit que le coefficient directeur de (EF) est $\frac{1}{3}$. L'équation cartésienne réduite de (EF) est donc de la forme $y = \frac{1}{3}x + q$ avec $q \in \mathbf{R}$ un coefficient à déterminer. Pour calculer q , on utilise que $E = (5, 3) \in (EF)$, c'est-à-dire que $3 = \frac{5}{3} + q$, autrement dit $q = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$. L'équation réduite de (EF) est donc $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. De façon équivalente, une équation cartésienne de (EF) est $-x + 3y - 4 = 0$.

Exercice VII

- (1) Représenter graphiquement la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 4y = 12$.
 (2) Déterminer une équation cartésienne de la parallèle $\mathcal{D}'$ à $\mathcal{D}$ passant par le point $A = (1, 2)$.

Les parallèles à $\mathcal{D}$ ont une équation cartésienne de la forme $3x + 4y = c$ pour $c \in \mathbf{R}$. En exigeant que $A = (1, 2)$ appartienne à $\mathcal{D}'$, on obtient $c = 11$, donc $\mathcal{D}'$ admet pour équation cartésienne $3x + 4y = 11$.

- (3) Déterminer un paramétrage de $\mathcal{D}'$. $X(t) = 1 + 4t$, $Y(t) = 2 - 3t$

Exercice VIII

On note $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x + y = -3$ et $\mathcal{D}_2$ celle d'équation $x - y = -5$. Déterminer $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Les équations réduites de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont respectivement $y = -3x - 3$ et $y = x + 5$. Il s'agit de déterminer d'abord les solutions éventuelles à l'équation d'une variable $-3x - 3 = x + 5$, c'est-à-dire $4x = -8$, autrement dit $x = -2$. Pour conclure, on calcule par exemple $y = -3 \cdot (-2) - 3 = 3$. Le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est $(-2, 3)$.

Exercice IX

On note $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $x + 4y = 8$ et $\mathcal{D}_2$ celle d'équation $3x + 2y = 14$. Déterminer $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. $\{(4, 1)\}$

On pourrait appliquer la même méthode que dans l'exercice précédent. Une nouvelle méthode consiste à faire des manipulation sur les équations du système suivant :

$$\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

Si on note E_1 la première équation et E_2 la deuxième, on peut faire disparaître la variable x de la deuxième équation en faisant l'opération $E_2 \leftarrow E_2 - 3E_1$, c'est-à-dire quand on retranche aux membres de gauche et de droite de E_2 les membres correspondant de E_1 multipliés par 3. Ici, $(3x + 2y) - 3(x + 4y) = -10y$ et $14 - 3 \cdot 8 = -10$. On obtient ainsi un système équivalent :

$$\begin{cases} x + 4y = 8 \\ -10y = -10 \end{cases}$$

Manifestement, $y = 1$ est l'unique solution à la deuxième équation, et on peut alors substituer cette valeur dans la première équation :

$$\begin{cases} x + 4 = 8 \\ y = 1 \end{cases}$$

On peut conclure que $(4, 1)$ est l'unique solution, donc le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est $(4, 1)$.

Exercice X

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

$\{(1, -2)\}$

Exercice XI

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 3x + 5y = -5 \end{cases}$$

C'est l'ensemble vide.

Exercice XII

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x + 5y = -4 \\ 6x + 7y = -5 \end{cases}$$

$$\{(\frac{3}{2}, -2)\}$$

Exercice XIII

(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ contenant le point $A = (2, 3)$ et de vecteur directeur $v = (2, 1)$. $x - 2y = -4$. (Méthode : déterminer l'équation $x - 2y = 0$ de la droite vectorielle contenant v , puis remarquer que l'on cherche l'équation d'une parallèle à cette droite, donc il n'y a qu'à ajuster la valeur du coefficient constant pour déterminer l'équation de $\mathcal{D}$.)

(2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ contenant le point $B = (-1, 6)$ et de vecteur directeur $v = (5, -2)$. $2x + 5y = 28$

(3) Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

$$\{(4, 4)\}$$

Exercice XIV

Supposons que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient deux droites sécantes d'équations cartésiennes $F_1(x, y) = 0$ et $F_2(x, y) = 0$ respectivement, où $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ sont des applications $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de la forme $F_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1$ et $F_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2$. On note A le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$.

(1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. On pose $F_3(x, y) := \lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y)$. Montrer que « $F_3(x, y) = 0$ » est l'équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}_3$ passant par A .

(2) Dans le cas particulier où $A = (x_A, y_A)$, $F_1(x, y) = x - x_A$ et $F_2(x, y) = y - y_A$, montrer que réciproquement, si $\mathcal{D}_3$ est une droite passant par A , alors elle admet une équation de la forme $\lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y) = 0$ comme dans la question précédente.

Exercice XV

On considère la droite $\mathcal{D}_1$ donnée par le paramétrage $M_1(t) = (t + 2, t + 3)$ et la droite $\mathcal{D}_2$ donnée par le paramétrage $M_2(t) = (2t, 2t + 1)$.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles égales ?

Oui, parce qu'elles ont toutes les deux pour équation cartésienne $y = x + 1$.

Exercice XVI

On considère la droite $\mathcal{D}$ donnée par le paramétrage $M(t) = (2 + t, 3 - t)$.

Déterminer un paramétrage de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par le point $(1, 1)$.

Les droites ayant un paramétrage de la forme $M'(t) = (t + a, -t + b)$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sont parallèles à $\mathcal{D}$. Pour $t := 0$, on obtient $M'(0) = (a, b)$, donc en posant $a = b = 1$, on obtient un paramétrage $(t + 1, 1 - t)$ de la droite $\mathcal{D}'$.

Exercice XVII

On fixe deux paramètres $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On considère le système d'équations, d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} 4x + 3y = a \\ 3x + 2y = b \end{cases}$$

(1) Déterminer un système d'équations équivalent au précédent et qui soit de la forme :

$$\begin{cases} 4x + 3y = a \\ y = \beta \end{cases}$$

où β est un nombre réel à déterminer. $\beta = 3a - 4b$

(2) Montrer que le système possède une unique solution (x, y) , à exprimer en fonction de a et b . $x = -2a + 3b, y = 3a - 4b$