

Feuille d'exercices n°2

D'après le cours, l'ensemble des solutions à un système d'équations linéaires en trois variables réelles est soit $\mathbf{R}^3$ tout entier, soit un plan, soit une droite, soit un singleton (solution unique), soit vide. Pour le moment, résoudre un tel système reviendra à identifier dans quel cas on se trouve, et suivant les cas, à caractériser d'une manière ou d'une autre ce plan, cette droite ou l'unique solution...

Exercice I

(1) Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ y - 2z = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

(2) Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 1 \\ y + 5z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(3) Un des deux systèmes d'équations ci-dessus était-il un peu plus facile à résoudre ? Si oui, quelle est la propriété qui rend sa résolution plus facile ?

Exercice II

Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ x - y - 2z = 6 \end{cases}$$

Exercice III

On considère la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par le paramétrage $M(t) = (2t + 1, -t + 2, 3t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

- (1) Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_1$ où $\mathcal{P}_1$ est le plan d'équation $x + y + z = 2$.
- (2) Donner les équations cartésiennes de deux plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ tels que $\mathcal{D} = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
- (3) Est-il vrai que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_4$ où $\mathcal{P}_4$ est le plan d'équation $x - y - z = -1$?
- (4) Est-il vrai que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_5$ où $\mathcal{P}_5$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$?

Exercice IV

- (1) Déterminer un paramétrage $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}^3$ passant par les points $A = (1, 1, 1)$ et $B = (2, 3, 4)$.
- (2) On note $\mathcal{P}$ le plan dans l'espace défini par l'équation $x + y + z = 15$. Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.
- (3) On note $\mathcal{P}'$ le plan dans l'espace défini par l'équation $x + y = z$. Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}'$.
- (4) On note $\mathcal{P}''$ le plan dans l'espace défini par l'équation $4x + y - 2z = 3$. Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}''$.

Exercice V

On considère la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par le paramétrage $M(t) = (3t + 1, 2t + 2, t + 3)$ pour $t \in \mathbf{R}$, ainsi que la droite $\mathcal{D}'$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par le paramétrage $N(t) = (t, 2t + 3, t + 2)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

- (1) Si $(t, u) \in \mathbf{R}^2$, reformuler l'assertion « $M(t) = N(u)$ » sous la forme d'un système d'équations faisant intervenir les variables t et u .
- (2) Résoudre le système. Décrire $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.
- (3) Plus généralement, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites quelconques dans l'espace $\mathbf{R}^3$, quelles sont les possibilités pour l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$?

Exercice VI

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz = d$ dans $\mathbf{R}^3$ où $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ sont des coefficients fixés tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Supposons que $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ sont des points distincts de $\mathcal{P}$.

- (1) Rappeler une formule donnant un paramétrage $M(t)$ de la droite (AB) .
- (2) Montrer que $(AB) \subset \mathcal{P}$.

Exercice VII

Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 3x + 10y - z = -3 \\ x + 5y + 4z = 6 \end{cases}$$

Exercice VIII

On note $A = (0, 0, 2)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$. On cherche à déterminer une équation $ax + by + cz = d$ d'un plan $\mathcal{P}$ qui contienne les trois points A , B et C .

(1) Reformuler l'appartenance $A \in \mathcal{P}$ sous la forme d'une formule exprimant d en fonction de a , b et c .

À partir de maintenant, on remplace d par l'expression obtenue ci-dessus.

(2) Reformuler l'appartenance $B \in \mathcal{P}$ sous la forme d'une formule exprimant c en fonction de a et b .

À partir de maintenant, on remplace c par l'expression obtenue ci-dessus.

(3) Reformuler l'appartenance $C \in \mathcal{P}$ sous la forme d'une formule exprimant b en fonction de a .

(4) Montrer qu'il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant les points A , B et C . Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice IX

Si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on considère l'application $P: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $P(t) = xt^2 + yt + z$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

(1) Reformuler sous la forme d'un système d'équations linéaires en les variables x , y et z le système suivant :

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(2) = 4 \\ P(3) = 8 \end{cases}$$

(2) Montrer que le système obtenu précédemment possède une unique solution, et déterminer l'expression $P(t)$ associée.

Exercice X

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la surface S d'équation $x^2 - (y + z)^2 = 0$. Décrire S .

Exercice XI

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la surface S' d'équation $z^2 = x^2 + y^2$. Existe-t-il une application $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que S' soit la surface d'équation $z = f(x, y)$?

Exercice XII

Supposons que $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est fixé. Introduisons l'application $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(t) = xe^t + ye^{-t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

On cherche à trouver $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui soient tels que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ (où f' est la dérivée de f).

(1) Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de x et y .

(2) Reformuler les égalités $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ sous la forme d'un système d'équations en les variables x et y .

(3) Résoudre le système précédent, et conclure.

Exercice XIII

Introduisons les matrices réelles suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) Pour chacune des matrices A , B , C , X et Y , indiquer le couple d'entiers (m, n) tel que la matrice appartienne à $M_{m,n}(\mathbf{R})$.

(2) Parmi les expressions suivantes AX , AY , BX , BY , CX , CY , quelles sont les produits qui ont un sens (c'est-à-dire sont définis)? Calculer ceux qui ont un sens.