École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2025/2026

L1 MP/MI, LDD STAPS
MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°6

Exercice I

(1) En utilisant la formule directe d'inversion (particulière aux matrices carrées de taille 2), déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -9 & -17 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

> On rappelle que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, alors A est inversible si et seulement si $\det A = ad - bc \neq 0$, et alors l'inverse est la matrice
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
>
> On obtient ainsi :
>
> $$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
> $$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$
> $$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -17 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer les solutions éventuelles à l'équation matricielle $A_i X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in M_{2,1}(\mathbf{R})$.

> Comme A_i est inversible, la solution est unique : $X = A_i^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient ainsi la solution X est faisant la somme des deux vecteurs-colonnes de A_i.
>
> Pour $i = 1$, l'unique solution est $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
>
> Pour $i = 2$, l'unique solution est $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
>
> Pour $i = 3$, l'unique solution est $X = \begin{pmatrix} -19 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Exercice II

On considère la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer A^2.

> On obtient $A^2 = \mathbf{I}_3$.

(2) Déterminer A^{-1}.
(3) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $A_\lambda := A + \lambda \mathbf{I}_3$. Montrer que si $\lambda \neq \pm 1$, alors A_λ est une matrice inversible. (Indication : chercher l'inverse de A_λ sous la forme $\alpha A + \beta \mathbf{I}_3$.)

> Fixons $\lambda \in \mathbf{R}$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Calculons :
>
> $$\begin{aligned} A_\lambda \cdot (\alpha A + \beta \mathbf{I}_3) &= (A + \lambda \mathbf{I}_3) \cdot (\alpha A + \beta \mathbf{I}_3) \\ &= \alpha A^2 + (\lambda\alpha + \beta) A + \lambda\beta \mathbf{I}_3 \\ &= (\lambda\alpha + \beta) A + (\alpha + \lambda\beta) \mathbf{I}_3 \end{aligned}$$
>
> Pour que $\alpha A + \beta \mathbf{I}_3$ soit l'inverse de la matrice A, il suffit que (α, β) soit une solution du système d'équations suivant :
>
> $$\begin{cases} \lambda\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \lambda\beta = 1 \end{cases}$$
>
> Le déterminant $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$ est bien non nul si $\lambda \neq \pm 1$, donc le système considéré possède une solution (α, β), ce qui montre l'existence d'un inverse à la matrice A_λ.

Exercice III

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre $t \in \mathbf{R}$ pour que le système d'équations suivant possède une unique solution :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & tx_3 & = & 3 \\ tx_1 & - & 2tx_2 & - & x_3 & = & -t \end{array}\right.$$

L'existence d'une solution unique ne dépend pas du membre de droite dans les équations, donc il s'agit ici de savoir pour quelles valeurs de t la matrice des coefficients du système homogène associé est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & t \\ t & -2t & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - tL_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & t-4 \\ 0 & -5t & -2t-1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - tL_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & t-4 \\ 0 & 0 & -t^2+2t-1 \end{pmatrix}$$

Suivant que $-t^2+2t-1 = -(t-1)^2$ soit nul ou non, il y a deux ou trois pivots. La matrice considérée est donc inversible si et seulement si $t \neq 1$. Le système possède une unique solution si et seulement si $t \neq 1$.

Exercice IV

Soit $P \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que $P^2 = P$. On note $S := \mathbf{I}_n - 2P$.

(1) Dans cette question, on suppose que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1a) Vérifier que $P^2 = P$.

(1b) Calculer S.

$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1c) Calculer S^{-1}.

On remarque que $S^2 = \mathbf{I}_2$, donc S est inversible et $S^{-1} = S$.

(2) Dans le cas général, montrer que S est inversible et déterminer S^{-1}.

En général, on a :

$$\begin{aligned} S^2 &= (\mathbf{I}_n - 2P)\cdot(\mathbf{I_n} - 2P) \\ &= \mathbf{I_n} - 2P - 2P + 4P^2 \\ &= \mathbf{I}_n - 4(P - P^2) \\ &= \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

On obtient donc que S est inversible et que $S^{-1} = S$.

(3) Notons $Q := \mathbf{I}_n - P$.

(3a) Montrer que $Q^2 = Q$.

$$\begin{aligned} Q^2 &= (\mathbf{I}_n - P)\cdot(\mathbf{I}_n - P) \\ &= \mathbf{I_n} - P - P + P^2 \\ &= \mathbf{I_n} - 2P + P^2 \\ &= \mathbf{I_n} - 2P + P \\ &= \mathbf{I_n} - P \\ &= Q \end{aligned}$$

(3b) Montrer que $PQ = QP = \mathbf{0}$.

On a : $PQ = P(\mathbf{I}_n - P) = P - P^2 = \mathbf{0}$. De même, $QP = (\mathbf{I}_n - P)P = P - P^2 = \mathbf{0}$.

(4) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$.

(4a) Montrer qu'il existe d'uniques vecteurs-colonnes X_1 et X_2 tels que $X = X_1 + X_2$, $PX_1 = X_1$ et $QX_2 = X_2$.

Si X_1 et X_2 conviennent, on a :

$$\begin{aligned} PX &= P(X_1 + X_2) \\ &= PX_1 + PX_2 \\ &= X_1 + P(QX_2) \\ &= X_1 + (PQ)X_2 \\ &= X_1 \end{aligned}$$

Donc, nécessairement $X_1 = PX$. De même, on vérifie que $X_2 = QX$.

Réciproquement, vérifions que $X_1 := PX$ et $X_2 := QX$ conviennent. On a $PX_1 = PPX = P^2X = PX = X_1$ et $QX_2 = QQX = Q^2X = QX = X_2$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= PX + QX \\ &= PX + (\mathbf{I}_n - P)X \\ &= PX + X - PX \\ &= X \end{aligned}$$

On a vérifié que le couple (PX, QX) convient bien.

(4b) Expliciter cette décomposition dans le cas où P est la matrice considérée à la question (1).

Dans ce cas, on vérifie que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors la décomposition $X = X_1 + X_2$ précédente est donnée par

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Exercice V

Déterminer l'inverse de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut résoudre, pour tout $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{R}^4$, le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & y_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & y_2 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & y_3 \\ & & & & & & x_4 & = & y_4 \end{array} \right.$$

L'unique solution (x_1, x_2, x_3, x_4) est

$$\begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 \\ y_3 - y_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

avec $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $A^{-1} = B$.

Exercice VI

Déterminer l'inverse de la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_2 & \longleftarrow & -L_2 \\ L_3 & \longleftarrow & \frac{1}{2}L_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_2 \longleftarrow L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On en déduit l'égalité :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice VII

(1) Déterminer la matrice A de l'application $f\colon M_{5,1}(\mathbf{R}) \to M_{5,1}(\mathbf{R})$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, on a bien $AX = f(X)$ pour tout $X \in M_{5,1}(\mathbf{R})$.

(2) Pour tout $Y \in M_{5,1}(\mathbf{R})$ (on notera $y_1, \dots, y_5$ les coefficients de Y), déterminer explicitement un $X \in M_{5,1}$ tel que $f(X) = Y$. On notera $g\colon M_{5,1}(\mathbf{R}) \to M_{5,1}(\mathbf{R})$ l'application qui à Y associe un tel X.

Il est évident que

$$X = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

convient.

(3) Calculer la matrice B de g.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Est-il vrai que $B = A^{-1}$?

> Par construction, pour tout $Y \in M_{5,1}(\mathbf{R})$, si on pose $X := g(Y) = BY$, on a $Y = f(X) = AX$, donc, $Y = ABY$. Autrement dit, l'application linéaire $Y \longmapsto ABY$ coïncide avec l'identité de $M_{5,1}(\mathbf{R})$, donc $AB = \mathbf{I}_5$. Comme il s'agit de matrices carrées, on peut conclure que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

(5) Montrer que $A^5 = \mathbf{I}_5$.

> Pour tout $X \in M_{5,1}(\mathbf{R})$, il est évident que $f(f(f(f(f(X))))) = X$, donc f^5 est l'identité, c'est-à-dire que $A^5 = \mathbf{I}_5$.

Exercice VIII

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ une matrice inversible. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbf{R})$.

On considère le système d'équations formulé matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec $X \in M_{2,1}(\mathbf{R})$. On cherche à déterminer une formule explicite pour l'unique solution X à cette équation.

On introduit les deux matrices A' et A'' :

$$A' = \begin{pmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A' est la matrice obtenue en partant de la matrice A et en remplaçant la première colonne par Y, tandis que A'' est celle obtenue en remplaçant la deuxième colonne de A par Y.

Montrer l'identité suivante :

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A' \\ \det A'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det A'}{\det A} \\ \frac{\det A''}{\det A} \end{pmatrix}$$

(Il s'agit de la formule de Cramer, dont vous verrez au deuxième semestre une généralisation pour des matrices carrées de taille arbitraire. Il n'est pas forcément recommandé de l'apprendre par cœur.)

Exercice IX

(1) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & -15 & -1 \end{pmatrix}$$

> On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice suivante :
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -15 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
>
> $$\sim \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1$$
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 14 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
>
> $$\sim \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2$$
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$
>
> $$\sim \quad \begin{bmatrix} L_1 \longleftarrow -L_1 \\ L_3 \longleftarrow -L_3 \end{bmatrix}$$
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right)$$
>
> $$\sim \quad \begin{bmatrix} L_1 \longleftarrow L_1 + 5L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 5L_3 \end{bmatrix}$$
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -16 & -15 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -14 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right)$$
>
> $$\sim \quad L_1 \longleftarrow L_1 + 4L_2$$
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -76 & -71 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -14 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right)$$
>
> L'inverse est donc $\begin{pmatrix} -76 & -71 & -25 \\ -15 & -14 & -5 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) Déterminer explicitement un vecteur colonne $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'unique possibilité est $X := M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(3) En calculant coefficient par coefficient le produit matriciel MX, *vérifier* que le vecteur X trouvé à la question précédente satisfait bien la condition demandée.
(4) Déterminer des coefficients réels a, b et c tels que :

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il suffit de calculer

$$M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'unique possibilité est $a = 20$, $b = 4$, $c = 1$.

Exercice X

Fixons $\lambda \in \mathbf{R}$. Considérons un vecteur-colonne quelconque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Notons $f(X) = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer la matrice A de l'application linéaire f.
(2) Soit $M \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ une matrice. Décrire les lignes de la matrice AM.
(3) Plus généralement, déterminer une matrice $B \in M_n(\mathbf{R})$ telle que pour toute matrice $M \in M_{n,m}(\mathbf{R})$, le produit BM soit obtenu en effectuant l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ sur la matrice M.