Invariants et semi-invariants

Exercice 1. Au centre du jardin d'Eden il y a un arbre magique qui produit des bananes et des ananas. Au début il y a 15 bananes et 17 ananas sur cet arbre. Chaque matin, pour son petit déjeuner avec Adam, Eve cueille deux fruits. Si elle prend deux bananes ou deux ananas, le lendemain un ananas pousse sur l'arbre magique. Si Eve prend une banane et un ananas, le lendemain l'arbre produit une banane. Un jour Eve découvre qu'il ne reste qu'un seul fruit sur l'arbre magique. Lequel? Et s'il y avait 16 bananes et 17 ananas au début?

Exercice 2. Juliette refuse d'épouser Romeo et désespéré, il quitte Vérone pour la ville la plus éloignée de celle-là (appelons-là B). N'ayant pas trouvé son bonheur à B, il part de nouveau et se dirige cette fois vers la ville la plus éloignée de B qui s'avère être plus loin de B que Vérone. Ainsi il voyage, chaque fois allant d'une ville X à la ville la plus éloignée de X qui s'avère être différente de la ville visitée avant X. Montrer que Romeo ne retournera plus à Vérone.

Exercice 3. La somme de nombres dans chaque ligne et dans chaque colonne d'une table est égale à 1. Montrer que la table est carrée.

Exercice 4.

1. Une table 8×8 est coloriée en blanc sauf une case de coin qui est noire. A chaque étape on peut changer la couleur de toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne (c.-à-d. on peut colorier toutes les cases blanches d'une ligne/colonne en noir et toutes les cases noires de la même ligne/colonne en blanc). Peut-on obtenir ainsi une table complètement blanche?
2. La même question pour une table 3×3.
3. La même question pour une table 8×8, mais avec 4 cases de coins coloriées en noir au début.

Exercice 5. Il y a 7 verres retournés sur la table. A chaque étape on peut retourner 4 entre eux. Peut-on ainsi mettre tous les 7 verres en position normale?

Exercice 6. Les nombres $1, 2, 3, \ldots, 20$ sont ècrits sur le tableau. Chaque fois on peut effacer deux nombres a et b et les remplacer par $ab + a + b$. Quel nombre peut-on obtenir ainsi à la fin?

Exercice 7.

1. Dans le jardin de Luxembourg il y a 6 bouleaux alignés, à une distance d'un mètre entre eux. Sur chaque bouleau il y a un joyeux merle. De temps en temps deux merles changent d'arbres. Ils volent la même distance, mais dans le sens opposé. Est-ce que, à un certain moment, tous les merles peuvent se retrouver sur le même bouleau? Et s'il y avait 7 bouleaux?
2. Dans le parc de Versailles il y a 44 peupliers situés autour d'un pond. Sur chaque peuplier il y a un joyeux merle. De temps en temps deux merles changent d'arbres. Chacun passe de son arbre à l'arbre voisin, mais l'un vole dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre vole dans le sens opposé. Est-ce que tous les merles peuvent se retrouver sur le même peuplier?

Exercice 8. Sur l'Ile de la Réunion habitent 13 caméléons bleus, 15 caméléons blancs et 17 caméléons rouges. Si deux caméléons de couleurs x et y différentes se rencontrent, ils prennent la troisième couleur z. Peut-il arriver qu'à un certain moment tous les caméléons sur l'Ile de la Réunion sont de la même couleur?

Exercice 9. Est-ce que le cavalier peut faire le tour d'une table $4 \times N$ en passant par chaque case une seule fois et revenir sur la même case d'où il est parti?

Exercice 10. Sur la table il y a deux carafes, une carafe blanche avec de l'eau et une carafe rouge avec du vin. Il y a la même quantité de liquide dans chaque carafe. On peut verser du liquide d'une carafe à l'autre. Peut-on obtenir plus de 50% de vin dans la carafe blanche?

Exercice 11. Dans chaque de n pays c'est soit le parti gauche, soit le parti droite qui est au pouvoir. De temps en temps le pouvoir dans un des pays change. Ça peut se passer seulement si dans la majorité des pays voisins le pouvoir est entre les mains du parti adverse. Montrer que le pouvoir ne peut pas changer infiniment.

Exercice 12.

1. Au début de l'année dans la salle Henri Cartan Igor a écrit une équation $x^2 + px + q = 0$ sur le tableau, avec p et q coefficients entiers non nuls. Chaque samedi avant la séance de Parismaths club les élèves remplaçaient l'équation sur le tableau par l'équation quadratique dont les racines étaient les coefficients de l'équation remplacée. Le 31 mai ils se sont rendu compte que l'équation écrite sur le tableau coïncide avec l'équation écrite par Igor. Quelle équation Igor a écrit sur le tableau?

2. Au début de l'année suivante Igor a écrit deux nombres sur le tableau: 1 et 2. Chaque samedi avant la séance les étudiants remplaçaient les deux nombres a et b sur le tableau par leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ et leur moyenne harmonique $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Un jour Igor a vu que l'un des nombres écrit sur le tableau était 941664/665857. Quel était l'autre nombre? Est-ce qu'un jour on verra 35/24 écrit sur le tableau?

Exercice 13.

1. Peut-on découper un disque en plusieurs parties et en composer un carré? Il est permis de découper le disque le long des droites et des arcs des cercles.

2. Archimède a découpé un disque en plusieurs parties (en utilisant le même type de coupes que dans la question précédente) et en a composé une figure convexe. Laquelle?

Exercice 14. Montrer qu'un polyèdre convexe ne peut pas être découpé en un nombre fini des quadrilatères non convexes.