La conjecture de Manin pour une famille de variétés en dimension supérieure

By KEVIN DESTAGNOL
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche,
UMR 7586, Université Paris Diderot-Paris 7,
Case postale 6052, Bâtiment Sophie Germain,
75205, Paris Cedex 13, France
`kevin.destagnol@imj-prg.fr`
`webusers.imj-prg.fr/~kevin.destagnol/`

Subjclass :11D45, 11N37
Keywords : Conjecture de Manin, constante de Peyre, méthodes de descente, torseurs, comptage de points rationnels sur des variétés algébriques.

(*Received* 26 *January* 2017; *revised* 19 *January* 2018)

Abstract

English.– Inspired by a method of La Bretèche relying on some unique factorisation, we generalize work of Blomer, Brüdern, and Salberger to prove Manin's conjecture in its strong form conjectured by Peyre for some infinite family of varieties of higher dimension. The varieties under consideration in this paper correspond to the singular projective varieties defined by the following equation

$$x_1y_2y_3\cdots y_n + x_2y_1y_3\cdots y_n + \cdots + x_ny_1y_2\cdots y_{n-1} = 0$$

in $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{2n-1}$ for all $n \geqslant 3$. This paper comes with an Appendix by Per Salberger constructing a crepant resolution of the above varieties.

Français.– En s'inspirant d'une méthode due à La Bretèche reposant sur une factorisation unique, nous généralisons des travaux récents de Blomer, Brüdern, et Salberger en établissant la conjecture de Manin sous sa forme forte conjecturée par Peyre pour une famille infinie de variétés en dimension supérieure. Les variétés considérées dans cet article correspondent aux variétés projectives singulières définies par l'équation suivante

$$x_1y_2y_3\cdots y_n + x_2y_1y_3\cdots y_n + \cdots + x_ny_1y_2\cdots y_{n-1} = 0$$

dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{2n-1}$ pour tout $n \geqslant 3$. Cet article est accompagné d'une Annexe de Per Salberger où une résolution crépante des variétés ci-dessus est construite.

Sommaire

1. *Introduction et principaux résultats*

1·1. *Introduction*

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et W_n l'hypersurface normale projective de $\mathbb{P}^{2n-1}_{\mathbb{Q}}$ définie par l'équation

$$x_1y_2y_3\cdots y_n + x_2y_1y_3\cdots y_n + \cdots + x_ny_1y_2\cdots y_{n-1} = 0 \tag{1.1}$$

où $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ désignent des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^{2n-1}_{\mathbb{Q}}$. Lorsque $n = 2$, la variété W_2 est lisse tandis que pour $n \geqslant 3$, la variété W_n est singulière, le lieu singulier étant donné par la réunion des sous-espaces fermés définis par les équations

$$y_i = y_j = y_k = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$$

ou

$$y_i = y_j = x_i = x_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

On pose U_n l'ouvert de Zariski de W_n défini par la condition $y_1y_2\cdots y_n \neq 0$. Sur cet ouvert, on peut réécrire l'équation (1.1) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = 0.$$

On constate alors que toutes les sous-variétés accumulatrices et les points singuliers de W_n sont inclus dans $W_n \smallsetminus U_n$ (voir [**3**]). La variété W_n possède la structure algébrique suivante qui s'avérera très utile dans la suite. On considère le groupe algébrique

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \; : \; (a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^* \right\}$$

ainsi que

$$\Psi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} H^n & \longrightarrow & \mathbb{G}_a \\ \left(\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \end{array} \right.$$

et $G_n = \mathrm{Ker}(\Psi_n)/\mathbb{G}_m$ où l'on utilise le plongement

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m & \hookrightarrow & H^n \\ b & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) \end{array}.$$

Il vient alors que $G_n \cong U_n$. En effet, tout point de U_n admet un unique représentant de la forme $[x_1 : \dots : x_n : 1 : y_2 : \dots : y_n]$ et de même tout point de G_n possède une unique représentation du type $\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \right)$ si bien que

$$\begin{array}{ccc} U_n & \longrightarrow & G_n \\ [x_1 : \dots : x_n : 1 : y_2 : \dots : y_n] & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_n & x_n \\ 0 & y_n \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

est un isomorphisme qui munit U_n d'une structure de groupe commutatif lorsque la multiplication de deux points $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ et $(x_1', \dots, x_n', y_1', \dots, y_n')$ est donnée par

$$(x_1 y_1' + x_1' y_1, \dots, x_n y_n' + x_n' y_n, y_1 y_1', \dots, y_n y_n').$$

On obtient alors une immersion ouverte naturelle $j : G_n \hookrightarrow W_n$ et une action naturelle $\alpha : G_n \times W_n \to W_n$ de G_n sur W_n. Ce groupe

$$G_n \cong (\mathbb{G}_a)^{n-1} \times (\mathbb{G}_m)^{n-1}$$

est un produit direct de groupes additifs et multiplicatifs et les techniques d'analyse harmonique utilisées par exemple dans [**1**] et [**9**] ne s'adaptent pas *directement* à ce cas même s'il est possible qu'elles puissent s'y généraliser. La méthode utilisée dans cet article repose sur une approche différente de la conjecture de Manin, à savoir une descente sur le torseur versel et avec [**3**], il s'agit vraisemblablement du seul exemple de groupe de ce type pour lequel les conjectures de Manin-Peyre sont établies. Dans [**3**], Blomer, Brüdern et Salberger établissent la conjecture de Manin sous sa forme forte conjecturée par Peyre pour la variété W_3 pour la hauteur anticanonique

$$H([x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3]) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} \max(|x_i|, |y_i|)^3$$

lorsque $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ sont des entiers premiers entre eux. Leur méthode repose sur la construction d'une résolution crépante $X \to W_3$ de W_3 puis sur une descente sur le torseur versel de X. Le problème se réduit alors à un problème de comptage de points d'un réseau de dimension 10 dans une région dont la frontière rend le traitement difficile. Ce problème de géométrie des nombres est alors traité à l'aide de séries de Dirichlet multiples et de transformations de Mellin multidimensionnelles. La résolution crépante construite n'est plus valable lorsque $n \geqslant 4$ et leur méthode de comptage se complique considérablement dès que $n \geqslant 4$. Il est cependant à noter que, pour $n = 3$, leur formule asymptotique ([**3**, theorem 1]) est plus précise que la conjecture de Manin à proprement parler puisqu'ils obtiennent un terme principal de la forme $BQ(\log(B))$ avec Q un polynôme de degré 4 dont le coefficient dominant correspond à la constante de Peyre. Enfin, pour $n \geqslant 4$, les auteurs indiquent dans [**3**] sans donner de détails que leur méthode de comptage peut se généraliser afin de donner l'équivalent prédit par la conjecture de Manin sans terme d'erreur. On donne dans cet article une démonstration des conjectures de Manin-Peyre pour tout $n \geqslant 3$ en utilisant une méthode de comptage différente adaptée à la combinatoire du problème.

Comme remarqué dans ce même article [**3**, section 1.3], l'équation (1.1) définit également pour $n \geqslant 3$ une variété singulière $\widehat{W_n} \subset \left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\right)^n$ pour laquelle il est intéressant d'étudier les conjectures de Manin et Peyre pour la hauteur anticanonique

$$\widehat{H}\left([x_1 : y_1], \dots, [x_n : y_n]\right) = \prod_{i=1}^{n} \max(|x_i|, |y_i|)$$

lorsque (x_i, y_i) sont deux entiers premiers entre eux pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. À la connaissance de l'auteur, ces deux conjectures ne sont connues pour aucune valeur de $n \geqslant 4$ pour les variétés $\widehat{W}_n$, le cas $n = 3$ étant traité dans un article à venir de l'auteur en collaboration avec Bettin. Ces dernières ont pourtant un intérêt arithmétique puisqu'elles interviennent dans la détermination du cardinal des matrices stochastiques à coefficients rationnels tous de hauteur inférieure à une certaine borne $B \geqslant 1$. Dans [**26**], Shparlinski obtient une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour ce cardinal et dans [**7**], La Bretèche parvient à en obtenir une formule asymptotique en déterminant le nombre de points rationnels de hauteur inférieure à B sur $\widehat{W}_n$ lorsque $n \geqslant 3$ pour la hauteur

$$\widehat{H}_n\left([x_1 : y_1], \dots, [x_n : y_n]\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \max\{|x_i|, |y_i|\}$$

lorsque (x_i, y_i) sont deux entiers premiers entre eux pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Il est cependant important de noter que cette hauteur n'est pas anticanonique et qu'ainsi les conjectures de Manin et Peyre ne s'appliquent pas dans ce cas.

Enfin, l'équation (1.1) définit également pour $n \geqslant 3$ une variété singulière biprojective $\widetilde{W}_n \subset \left(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{Q}}\right)^2$ pour laquelle il peut également être intéressant d'étudier les conjectures de Manin et Peyre par rapport à la hauteur anticanonique

$$\widetilde{H}\left([x_1 : \dots : x_n], [y_1 : \dots : y_n]\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^{n-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$$

lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux n-uplets d'entiers premiers entre eux. Il est à noter que, contrairement au cas de W_n, la variété $\widetilde{W}_n$ ne peut pas être écrite de façon naturelle comme la compactification équivariante d'un groupe. Dans le cas de W_n, c'est un aspect essentiel de la preuve des conjectures de Manin et Peyre de [**3**] et du présent travail. Le seul cas pour lequel un résultat est connu est le cas $n = 3$. La variété $\widetilde{W}_3$ est alors une cubique de dimension 3 et Blomer et Brüdern obtiennent dans un premier temps dans [**2**] le bon ordre de grandeur pour le problème de comptage associé avant de parvenir récemment avec Salberger à obtenir une formule asymptotique et les conjectures de Manin et Peyre dans [**4**]. Les méthodes utilisées présentent des similarités avec celles de [**3**] et reposent là encore sur une descente sur le torseur versel associée à une résolution crépante de $\widetilde{W}_n$. Blomer, Brüdern et Salberger font en revanche appel à des techniques d'analyse de Fourier pour compter les points entiers sur ce torseur. La différence principale en termes de géométrie de la résolution crépante provient de l'absence de structure naturelle de groupe.

1·2. *Résultats*

L'objet de cet article est de démontrer les conjectures de Manin et Peyre dans le cas de W_n pour tout $n \geqslant 4$. Puisque W_2 est une variété torique lisse, le cas $n = 2$ est inclus dans les travaux généraux de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques lisses [**1**] et le cas $n = 3$ est couvert par le résultat de [**3**]. Cet article est accompagné d'une annexe de Per Salberger qui explicite une résolution crépante pour la variété W_n pour tout $n \geqslant 3$.

Pour tout $n \geqslant 3$ et pour un point $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{2n-1}$ représenté par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ premiers entre eux, on considère la hauteur

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \max\{|x_i|, |y_i|\}^n$$

qui est une hauteur anticanonique naturelle sur W_n comme remarqué dans [**3**]. Enfin, pour tout $B \geqslant 1$, on pose

$$N(B; U_n) = \#\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_n(\mathbb{Q}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant B\}.$$

Lorsque $n \geqslant 3$, notre résultat principal est alors le suivant.

Théorème 1·1. *Soient $B \geqslant 2$ et $n \geqslant 3$. La variété W_n est "presque de Fano" au sens de* [**23**, Définition 3.1] *et il existe une constante $c_n > 0$ telle que*

$$N(B; U_n) = c_n B (\log B)^{2^n - n - 1} + O\left(B (\log B)^{2^n - n - 2} \log(\log B)\right).$$

De plus, l'expression de la constante c_n est en accord avec la conjecture de Peyre.

Remarques.

- Une expression explicite de la constante c_n est donnée par la formule (3.31) en section 3.2.
- Le Théorème 1·1 permet de retrouver l'équivalent asymptotique qui découle de [**3**, Theorem 1] pour $n = 3$. La démonstration donnée ici est en revanche différente de celle de [**3**].
- Une adaptation simple de la démonstration de ce théorème conduirait à l'étude des conjectures de Manin-Peyre sur l'hypersurface $W_{\mathbf{a},n}$ de $\mathbb{P}^{2n-1}$ définie par l'équation

  $$a_1 x_1 y_2 y_3 \cdots y_n + a_2 x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots + a_n x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0,$$

  pour un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers tous non nuls. On constate clairement que l'hypersurface $W_{\mathbf{a},n}$ est isomorphe à W_n et par conséquent on ne détaillera pas cet aspect dans cet article.

Remerciements.– L'auteur tient à exprimer ici toute sa gratitude à son directeur de thèse, Régis de la Bretèche, pour ses conseils, son soutien et ses relectures tout au long de ce travail, ainsi qu'à Marc Hindry et Tim Browning pour quelques discussions éclairantes. L'auteur tient également à remercier chaleureusement Per Salberger pour lui avoir communiqué ses résultats concernant la résolution crépante de W_n qui figurent en annexe et pour avoir été à l'origine de nombreux éclaircissements ainsi que Valentin Blomer et Jörg Brüdern.

2. *Notations*

On introduit dans cette section des notations qui seront utilisées tout au long de cet article. On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs non nuls, $\mathrm{pgcd}(m,n)$ le pgcd de deux entiers m et n, $[m,n]$ leur ppcm et, lorsqu'il existe, $\overline{n}^a$ l'inverse de n modulo un entier a. On omettra la dépendance en a et on notera plutôt $\overline{n}$ dans les cas où aucune ambiguïté n'est possible sur l'entier a. Enfin, on notera pour tout entier n, $[\![1,n]\!]=[1,n]\cap\mathbb{Z}$.

Pour $n\geqslant 2$, on considère l'entier $N=2^n-1$ ainsi que pour tout $h\in[\![1,N]\!]$, son développement en base 2

$$h=\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\varepsilon_j(h)2^{j-1},$$

avec $\varepsilon_j(h)\in\{0,1\}$. On notera $s(h)=\sum_{j\geqslant 1}\varepsilon_j(h)$ la somme des chiffres en base 2 de h.

Dans la suite de cet article, on utilise la variante de la définition des ensembles de décomposition unique de [**18**] et [**8**] introduite dans [**7**] et on dira qu'un entier h est dominé par ℓ (respectivement strictement dominé) si pour tout $j\in\mathbb{N}$, on a $\varepsilon_j(h)\leqslant\varepsilon_j(\ell)$ (respectivement $\varepsilon_j(h)<\varepsilon_j(\ell)$). On notera alors $h\preceq\ell$ (respectivement $h\prec\ell$). On dira enfin qu'un $N-$uplet $(z_1,\dots,z_N)$ de $[\![1,n]\!]$ est réduit si $\mathrm{pgcd}(z_h,z_\ell)=1$ lorsque $h\not\preceq\ell$ et $\ell\not\preceq h$. On a alors le lemme fondamental suivant.

LEMME 2·1. *Il existe une bijection entre l'ensemble des $n-$uplets $(y_1,\cdots,y_n)$ de $\mathbb{N}^n$ et les $N-$uplets réduits de $\mathbb{N}^N$ tels que*

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\quad y_j=\prod_{1\leqslant h\leqslant N}z_h^{\varepsilon_j(h)}\quad et\quad [y_1,\dots,y_n]=\prod_{1\leqslant h\leqslant N}z_h. \tag{2.1}$$

Démonstration– Il suffit de définir les z_h à $s(h)$ décroissant. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. On pose $z_N=\mathrm{pgcd}(y_1,\dots,y_n)$ et supposons les z_h construits pour $s(h)\geqslant k+1$. On pose alors pour h tel que $s(h)=k$

$$z_h=\mathrm{pgcd}\left(\frac{y_j}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant N,s(\ell)\geqslant k+1\\ \varepsilon_j(\ell)=1}}z_\ell}\quad:\quad\varepsilon_j(h)=1\right).$$

Il est alors facile de vérifier que le N-uplet $(z_1,\dots,z_N)$ de $\mathbb{N}N$ est réduit et vérifie (2.1). □

3. *Démonstration du Théorème* 1·1

Cette section est consacrée à la démonstration de la formule asymptotique du Théorème 1·1. On montrera ensuite que la variété W_n est "presque de Fano" au sens de [**23**, Définition 3.1] et que la constante c_n obtenue est en accord avec la conjecture de Manin dans sa forme forte conjecturée par Peyre en section 4. La méthode employée, qui consiste à compter d'abord les $\mathbf{x}$ à $\mathbf{y}$ fixés n'est valable que lorsque la borne sur les x_i est plus grande que celle sur les y_i pour $i\in[\![1,n]\!]$. C'est en particulier pourquoi elle ne s'adapte pas, en tout cas directement, aux variétés $\widehat{W_n}$ et $\widetilde{W_n}$ définies lors de l'introduction.

3·1. *Réduction au cas $y_i \geqslant 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$*

Quitte à changer le signe des x_i pour $i \in [\![1,n]\!]$, on peut supposer les y_i positifs pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et obtenir l'égalité

$$N(B;U_n) = 2^{n-1}\#\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}^n \quad : \quad \begin{array}{c} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \max\{|x_i|, y_i\} \leqslant B^{1/n}, \\ (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = 1, \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ vérifie } (1.1) \end{array}\right\}.$$

Une inversion de Möbius fournit alors

$$N(B;U_n) = 2^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)N\left(\frac{B}{k^n}\right)$$

où

$$\begin{aligned} N(B) &= \#\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}^n \quad : \quad \begin{array}{c} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \max\{|x_i|, y_i\} \leqslant B^{1/n}, \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ vérifie } (1.1) \end{array}\right\} \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n \\ 1\leqslant y_i \leqslant \sqrt[n]{B}}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right), \end{aligned}$$

avec, pour tous $\mathbf{y} \in \mathbb{N}^n$ et $X \geqslant 1$,

$$N_{\mathbf{y}}(X) = \#\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \quad : \quad \begin{array}{c} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant X, \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ vérifie } (1.1) \end{array}\right\}. \tag{3.1}$$

3·2. *Utilisation du Lemme* 2·1

On se place ici dans le cas où $\mathbf{y} \in \mathbb{N}^n$ est fixé. L'équation (1.1) peut se réécrire en utilisant le Lemme 2·1 sous la forme

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j = 0 \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad d_i = \prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}. \tag{3.2}$$

On obtient ainsi la relation de divisibilité $z_{2^{j-1}} \mid x_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Mais contrairement au cas de [**7**], on ne peut pas ici en déduire que $z_{2^{j-1}} = 1$ puisqu'on n'a pas les conditions $\mathrm{pgcd}(x_j,y_j) = 1$.

On considère alors, pour $X \geqslant 1$, l'ensemble

$$\mathcal{A}(\mathbf{y};X) = \left\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n \quad : \quad \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \sum_{i=1}^n d_i\alpha_i = 0\right\}.$$

On définit pour tout $r \geqslant 1$, l'ensemble $\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X)$ comme étant donné par

$$\left\{(\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-r} \quad : \quad \max_{r+1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \sum_{i=r+1}^n d_i\alpha_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d_{1,r})\right\} \tag{3.3}$$

où l'on a posé

$$\forall r \in [\![2,n]\!], \quad d_{1,r} = \prod_{\varepsilon_1(h)=\cdots=\varepsilon_r(h)=0} z_h. \tag{3.4}$$

De plus, on introduit les notations

$$d_1' = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \quad \text{et} \quad \forall r \in [\![2,n]\!], \quad d_1^{(r-1)} = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=\cdots=\varepsilon_{r-1}(h)=0\\ \varepsilon_r(h)=1}} z_h \tag{3.5}$$

de sorte que $d_{1,r-1} = d_{1,r}d_1^{(r-1)}$. Enfin, on pose

$$\forall r \in [\![2,n]\!], \quad d_r' = \prod_{\substack{\varepsilon_r(h)=0\\ \varepsilon_1(h)+\cdots+\varepsilon_{r-1}(h)\neq 0}} z_h. \tag{3.6}$$

On obtient ainsi que $d_r = d_{1,r}d_r'$ et on constate en utilisant la section 2 que pour tout $2 \leqslant r \leqslant n$, on a pgcd $\left(d_1^{(r-1)}, d_r'\right) = 1$.

On démontre alors les lemmes suivants qui permettent d'estimer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbf{y};X)$ pour tout $X \geqslant 1$.

LEMME 3·1. *Soient* $1 \leqslant r \leqslant n-1$ *et* $X \geqslant 1$. *Avec les notations* (3.3) *et* (3.5), *on a l'estimation*

$$\#\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X) = 2^{n-r}\prod_{j=r+1}^{n}\frac{X}{d_1^{(j-1)}} + O\left(X^{n-r-1}\right).$$

Démonstration– Soit $r \geqslant 1$. L'idée principale de la preuve, inspirée de [**7**], est de relier le cardinal de $\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y},X)$ à celui de $\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X)$. Démontrons pour ce faire que pour tout $1 \leqslant r \leqslant n-2$, on a

$$\#\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X) = \left(\frac{2X}{d_1^{(r)}} + O(1)\right)\#\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y},X). \tag{3.7}$$

En effet, pour un point $(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_n)$ de $\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X)$, $(\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_n)$ appartient à $\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y},X)$. D'autre part, considérons $(\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_n)$ appartenant à $\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y},X)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\sum_{i=r+2}^{n} d_i\alpha_i = d_{1,r+1}k. \tag{3.8}$$

Le $(n-r-1)$-uplet $(\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_n)$ provient de la projection sur les $n-r-1$ dernières coordonnées d'un $(n-r)$-uplet $(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_n)$ de $\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X)$ si, et seulement s'il existe un entier $|\alpha_{r+1}| \leqslant X$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\sum_{i=r+1}^{n} d_i\alpha_i = d_{1,r}\ell.$$

Grâce à (3.8), on en déduit la relation

$$d_{r+1}\alpha_{r+1} + d_{1,r+1}k = d_{1,r}\ell,$$

qui, au vu de (3.5) et (3.6), se réécrit sous la forme

$$\ell d_1^{(r)} - \alpha_{r+1}d_{r+1}' = k.$$

On en déduit que $d'_{r+1} \mid k-\ell d_1^{(r)}$, autrement dit que $\ell\equiv \overline{d_1^{(r)}}k \left(\bmod\, d'_{r+1}\right)$ et puisque $\alpha_{r+1}=\frac{\ell d_1^{(r)}-k}{d'_{r+1}}$, on a également

$$\frac{k-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant \ell\leqslant \frac{k+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}.$$

Réciproquement, les relations (3.8) et (3.5) fournissent les égalités

$$\forall \ell\in\mathbb{Z},\qquad \sum_{i=r+2}^{n} d_i\alpha_i=d_{1,r}\ell+d_{1,r+1}\left(k-\ell d_1^{(r)}\right),$$

si bien que pour ℓ vérifiant

$$\ell\equiv \overline{d_1^{(r)}}k\left(\bmod\, d'_{r+1}\right)\quad \text{et}\quad \frac{k-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant \ell\leqslant \frac{k+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}, \tag{3.9}$$

on obtient que $(\alpha_{r+2},\dots,\alpha_n)$ provient de $(\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n)\in\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X)$ avec $\alpha_{r+1}=\frac{\ell d_1^{(r)}-k}{d'_{r+1}}$. Ainsi, on en déduit bien la formule (3.7). Or, par définition

$$\mathcal{A}_{n-1}(\mathbf{y},X)=\{\alpha_n\in\mathbb{Z}\quad:\quad |\alpha_n|\leqslant X,\quad d_n\alpha_n\equiv 0\,(\bmod\, d_{1,n-1})\}.$$

On constate que $d_{1,n-1}=d_1^{(n-1)}$ et que $\operatorname{pgcd}(d_{1,n-1},d_n)=1$ de sorte que

$$\#\mathcal{A}_{n-1}(\mathbf{y},X)=\frac{2X}{d_1^{(n-1)}}+O(1).$$

Le lemme suit alors par récurrence.

□

Lemme 3·2. *Soit $n\geqslant 3$. Pour tout $X\geqslant 1$ et $\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n$, on a*

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y};X)=\frac{X^{n-1}}{d_1}\left(b(\mathbf{y})+O\left(\frac{1}{X}\sum_{j=2}^{n-1}d_1^{(j-1)}\right)\right)$$

avec les notations (3.5) et où

$$b(\mathbf{y})=\operatorname{vol}\left\{(\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in[-1,1]^{n-1}\quad:\quad\left|\sum_{i=2}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1\right\}. \tag{3.10}$$

Démonstration– La démonstration proposée ne repose pas sur des arguments de géométrie des nombres mais suit les grandes lignes de la preuve du lemme 2.3 de [**7**]. On a l'égalité

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y};X)=\#\left\{(\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^{n-1}\ :\ \max_{2\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|\leqslant X,\quad \begin{array}{c}\sum_{i=2}^{n}d_i\alpha_i\equiv 0\,(\bmod\, d_1)\,,\\ \left|\sum_{i=2}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\end{array}\right\}.$$

En raisonnant comme pour établir la formule (3.9) lors de la démonstration du Lemme 3·1, on obtient alors que la cardinal de $\mathcal{A}(\mathbf{y};X)$ est donné par

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_2(\mathbf{y},X)}\#\left\{\frac{k_2-Xd'_2}{d'_1}\leqslant\ell\leqslant\frac{k_2+Xd'_2}{d'_1}\ :\ \begin{array}{c}\ell\equiv-\overline{d'_1}k_2\,(\bmod\, d'_2)\,,\\ \left|d_{1,2}\,(\ell d'_1-k_2)+\sum_{i=3}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\end{array}\right\}, \tag{3.11}$$

avec $k_2=\sum\limits_{j=3}^n d_j\alpha_j/d_{1,2}$, où $d_{1,2}$ a été défini en (3.5). Or, on a

$$\#\left\{\frac{k_2-Xd_2'}{d_1'}\leqslant\ell\leqslant\frac{k_2+Xd_2'}{d_1'}\ :\ \begin{array}{c}\ell\equiv-\overline{d_2'}k_2\,(\mathrm{mod}\ d_2')\,,\\ \left|d_{1,2}\left(\ell d_1'-k_2\right)+\sum\limits_{i=3}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{d_2'}\mathrm{vol}\left\{t\in\left[\frac{k_2-Xd_2'}{d_1'},\frac{k_2+Xd_2'}{d_1'}\right]\ :\ \left|d_{1,2}\left(td_1'-k_2\right)+\sum_{i=3}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}+O(1).$$

Le changement de variable $\alpha_2=\frac{td_1'-k_2}{d_2'}$ fournit alors

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y};X)=\frac{1}{d_1'}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_2(\mathbf{y},X)}\mathrm{vol}\left\{\alpha_2\in[-X,X]\ :\ \left|\sum_{i=2}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}+O\left(\#\mathcal{A}_2(\mathbf{y},X)\right).$$

D'après le Lemme 3·1, on aboutit à la formule

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y};X)=\frac{1}{d_1'}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_2(\mathbf{y},X)}\mathrm{vol}\left\{\alpha_2\in[-X,X]\ :\ \left|\sum_{i=2}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}+O\left(\prod_{j=3}^n\frac{X}{d_1^{(j-1)}}\right).$$

On pose ensuite

$$S_r(\mathbf{y};X)=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X)}\mathrm{vol}\left\{(\alpha_2,\dots,\alpha_r)\in[-X,X]^{r-1}\quad:\quad\left|\sum_{i=2}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}.$$

Avec les notations (3.5) et pour tout $2\leqslant r\leqslant n-1$, on montre alors l'estimation

$$S_r(\mathbf{y};X)=\frac{1}{d_1^{(r-1)}}S_{r+1}(\mathbf{y};X)+O\left(X^{r-1}\prod_{j=r+2}^n\frac{X}{d_1^{(j-1)}}\right).\tag{3.12}$$

En effet, en raisonnant de manière analogue à (3.11), on obtient que $S_r(\mathbf{y};X)$ est donné par

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y},X)\\ \frac{k_{r+1}-Xd_{r+1}'}{d_1^{(r)}}\leqslant\ell\leqslant\frac{k_{r+1}+Xd_{r+1}'}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv-\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\mathrm{mod}\ d_{r+1}'\right)}}\mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}\ :\ \left|d_{1,r}(\ell d_{r+1}'-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}$$

avec $k_{r+1}=\sum\limits_{j=r+2}^n d_j\alpha_j/d_{1,r+1}$. On écrit alors

$$\mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}\ :\ \left|d_{1,r}(\ell d_{r+1}'-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}$$
$$=\int_{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}}\mathbb{1}_{\left|(\ell d_{r+1}'-k_{r+1})+\sum\limits_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^n d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X}(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\alpha_2\cdots\mathrm{d}\alpha_r$$

et on obtient ensuite en intervertissant la sommation sur ℓ avec l'intégrale

$$\sum_{\substack{\frac{k_{r+1}-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant \ell\leqslant \frac{k_{r+1}+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv -\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\bmod d'_{r+1}\right)}}\mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}\ :\ \left|d_{1,r}(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq 3}}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}$$

$$=\int_{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}}\sum_{\substack{\frac{k_{r+1}-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant \ell\leqslant \frac{k_{r+1}+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv -\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\bmod d'_{r+1}\right)}}\mathbb{1}_{\left|(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X}(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\alpha_2\cdots\mathrm{d}\alpha_r.$$

Le raisonnement précédent fournit alors

$$\sum_{\substack{\frac{k_{r+1}-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant \ell\leqslant \frac{k_{r+1}+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv -\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\bmod d'_{r+1}\right)}}\mathbb{1}_{\left|(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X}(\boldsymbol{\alpha})$$

$$=\frac{1}{d_1^{(r)}}\int_{\alpha_{r+1}\in[-X,X]}\mathbb{1}_{\left|\sum_{i=2}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant X|d_1|}\mathrm{d}\alpha_{r+1}+O(1).$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 3·1, on obtient bien (3.12). Pour conclure, en itérant (3.12), il vient

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y};X)=\frac{1}{d_1}\mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^n\quad :\quad \left|\sum_{i=2}^{n}d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}+O\left(\sum_{r=2}^{n}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq r}}^{n}\frac{X}{d_1^{(j-1)}}\right),$$

puisque l'on a l'égalité

$$d_1=\prod_{j=2}^{n}d_1^{(j-1)}. \tag{3.13}$$

Le résultat en découle après le changement de variables $\boldsymbol{\alpha}'=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{X}$ et grâce au fait que, d'après (3.13), l'on ait

$$\forall r\in[\![2,n]\!],\qquad \frac{d_1}{\prod_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq r}}d_1^{(j-1)}}=d_1^{(r-1)}.$$

□

3·3. *Une borne supérieure*

LEMME 3·3. *Lorsque* $1\leqslant y_i\leqslant X$ *pour tout* $i\in[\![1,n]\!]$, *on a l'estimation*

$$N_{\mathbf{y}}(X)\ll\frac{X^{n-1}}{||\mathbf{d}||_2}$$

où $N_{\mathbf{y}}(X)$ *a été défini en* (3.1) *et* $||.||_2$ *désigne la norme euclidienne usuelle sur* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration– Soit $X\geqslant 1$. Par symétrie, on peut supposer que $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$ si bien que

$$N_{\mathbf{y}}(X) \leqslant \# \left\{ (\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-1} \quad : \quad \max_{2 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \sum_{i=2}^{n} d_i \alpha_i \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\ d_1) \right\}.$$

En utilisant le Lemme 3·1 et (3.13), on obtient bien

$$N_{\mathbf{y}}(X) \ll \frac{X^{n-1}}{d_1} \ll \frac{X^{n-1}}{||\mathbf{d}||_2}. \qquad \square$$

Remarque.– Comme mentionné dans [**7**], il est ici important de voir que $||\mathbf{d}||_2$ peut être plus grand que B et par conséquent l'estimation du Lemme 3·3 est meilleure que l'estimation triviale en $O\left(\frac{B^{n-1}}{||\mathbf{d}||_2} + B^{n-2}\right)$. Cette estimation découlerait également de résultats de géométrie des nombres.

Quitte à appliquer une permutation de $[\![1, n]\!]$, il vient ensuite que

$$N(B) = n! N_1(B) + R(B), \tag{3.14}$$

avec

$$N_1(B) = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{B}}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right) \tag{3.15}$$

et

$$R(B) = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leqslant y_i \leqslant \sqrt[n]{B} \\ \exists i \neq j,\ y_i = y_j}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right) - n! \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{B} \\ \exists i \neq j,\ y_i = y_j}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right).$$

Le lemme suivant fournit une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour la quantité $N_1(B)$.

LEMME 3·4. *Lorsque $B \geqslant 2$, on a $N_1(B) \ll B(\log B)^{2^n - n - 1}$.*

Démonstration– Lorsque $B \geqslant 2$, on a

$$N_1(B) \leqslant \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{B}}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right) \ll B^{1-\frac{1}{n}} \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{B}}} \frac{1}{d_1}$$

d'après le Lemme 3·3. On traduit à présent les conditions sur $\mathbf{y}$ en termes de conditions sur $\mathbf{z}$. Lorsque $1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{B}$, on a en particulier $d_j \geqslant d_{j+1}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n-1$. Pour $j \in [\![2, n-1]\!]$, cette dernière condition se réécrit

$$\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=0}} z_h \leqslant \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h. \tag{3.16}$$

On constate alors en posant $H_0 = \left\{ h_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} : 2 \leqslant \ell \leqslant n-1 \right\}$, que dans l'inégalité (3.16), seule la variable h_j de H_0 apparaît et que (3.16) se réécrit par conséquent

$$z_{h_j} \leqslant Z_{h_j} := \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=0 \\ h \neq h_j}} z_h^{-1}.$$

La condition $d_1 \geqslant d_2$ est équivalente à

$$\prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h \geqslant \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1}} z_h. \tag{3.17}$$

En notant $H_1 := \{5\}$ si $n \geqslant 4$ et $H_1 := \{1\}$ si $n = 3$, elle peut se réécrire

$$z_{h_1} := z_5 \leqslant Z_{h_1} := \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1}$$

dans le cas $n \geqslant 4$ et

$$z_{h_1} := z_1 \leqslant Z_{h_1} := \frac{z_2 z_6}{z_5}$$

lorsque $n = 3$. Enfin, notant $H_2 = \left\{ h_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \right\}$, on remarque que la seule condition faisant apparaître z_{h_n} est $y_n \leqslant \sqrt[n]{B}$. On peut ainsi réécrire cette condition sous la forme

$$z_{h_n} \leqslant Z_{h_n} \quad \text{avec} \quad Z_{h_n} := \sqrt[n]{B} \prod_{\substack{\varepsilon_n(h)=1\\ h\neq h_n}} z_h^{-1}.$$

Par conséquent, en négligeant les conditions de coprimalité provenant du fait que $\mathbf{z}$ est réduit, on obtient

$$N_1(B) \ll B^{1-\frac{1}{n}} \sum_{\substack{z_h \leqslant B^{1/n}\\ d_n \leqslant \cdots \leqslant d_1\\ z_{h_n} \leqslant Z_{h_n}}} \frac{1}{d_1}.$$

La contribution des z_h pour $h \in H_0$ est alors majorée par

$$\ll \frac{B^{1-\frac{1}{n}}}{d_1} \prod_{2\leqslant j\leqslant n-1} Z_{h_j} = \frac{B^{1-\frac{1}{n}}}{d_1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1}.$$

En effet, pour $j \in [\![2, n-2]\!]$, on a

$$Z_{h_j} Z_{h_{j+1}} = \frac{\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h}{\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0}} z_h} = \frac{\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h}{\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1}} z_h} = \frac{\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1\\ \varepsilon_j(h)=0}} z_h}{\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1}} z_h}$$

$$= \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0\\ h\notin\{h_j,h_{j+1}\}}} z_h^{-1}$$

et il suffit d'itérer ce calcul pour obtenir l'expression

$$\prod_{2\leqslant j\leqslant n-1} Z_{h_j} = \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1}.$$

Remplaçant d_1 par son expression, il vient une contribution des z_h avec $h \in H_0$

$$\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\varepsilon_1(h)=0} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1}. \tag{3.18}$$

On remarque que z_5 intervient dans Z_3 et Z_7 mais disparaît dans le produit des Z_{h_j} et que z_5 n'intervient pas dans l'expression de d_1 lorsque $n \geqslant 4$. Sommant alors sur z_{h_1}, on aboutit à une contribution des z_h pour $h \in H_0 \cup H_1$

$$\begin{aligned}
&\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\varepsilon_1(h)=0} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1}\\
&\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=\varepsilon_n(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1}\\
&\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=\varepsilon_n(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1} = B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\substack{\varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0\cup H_1}} z_h^{-1}.
\end{aligned}$$

Une dernière sommation sur la variable z_{h_n} fournit de manière similaire une contribution des z_h avec $h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2$

$$\ll B \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1}. \tag{3.19}$$

Si $n = 3$, c'est la variable $z_{h_1} = z_1$ qui n'intervient pas et on somme alors sur z_1 puis sur $z_{h_3} = z_7$ pour obtenir

$$\ll B \sum_{z_2,z_4,z_5,z_6 \leqslant \sqrt[3]{B}} \frac{1}{z_2 z_4 z_5 z_6}.$$

Dans tous les cas, il reste alors $2^n - n - 1$ variables $z_h \leqslant \sqrt[n]{B}$ à sommer. En effet, si $1 \leqslant y_i \leqslant \sqrt[n]{B}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors on a également $1 \leqslant z_j \leqslant \sqrt[n]{B}$ pour tout $j \in [\![1, N]\!]$ si bien qu'on obtient finalement

$$N_1(B) \ll B(\log B)^{2^n-n-1}.$$

□

On utilise alors ce résultat pour démontrer que la quantité $R(B)$ apparaissant dans (3.14) est bien un terme d'erreur.

LEMME 3·5. *Pour tout $B \geqslant 2$, on a $R(B) \ll B(\log B)^{2^{n-1}-n-1}$, où $R(B)$ a été défini en (*3.14*).*

Démonstration– Quitte à réordonner, on obtient

$$R(B) \ll \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n\\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}\\ \exists i,\ y_i=y_{i+1}}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right).$$

De plus, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, la condition $y_i = y_{i+1}$ se réécrit

$$\prod_{\substack{\varepsilon_i(h)=1\\ \varepsilon_{i+1}(h)=0}} z_h = \prod_{\substack{\varepsilon_i(h)=0\\ \varepsilon_{i+1}(h)=1}} z_h. \tag{3.20}$$

Puisque deux entiers h et ℓ de $[\![1,N]\!]$ tels que $\varepsilon_i(h)=\varepsilon_{i+1}(\ell)=1$ et $\varepsilon_{i+1}(h)=\varepsilon_i(\ell)=0$ ne sont pas comparables pour la relation d'ordre $\preceq$ introduite en section 2, on en déduit que $\operatorname{pgcd}(z_h,z_\ell)=1$. Il s'ensuit que

$$\forall h\in[\![1,N]\!] \quad \text{tel que} \quad \varepsilon_i(h)+\varepsilon_{i+1}(h)=1, \quad z_h=1. \tag{3.21}$$

En particulier, on a $Z_{h_i}=z_{h_i}=1$.

Supposons alors que $y_i=y_{i+1}$ pour un certain $i\in[\![1,n-1]\!]$. Une sommation sur les z_h pour $h\in H_0$ suivie d'une sommation sur z_{h_1} et z_{h_n} fournit une contribution

$$\ll B\sum_{\substack{z_h\leqslant\sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\\ \varepsilon_i(h)+\varepsilon_{i+1}(h)\neq 1}}\ \prod_{\substack{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\\ \varepsilon_i(h)+\varepsilon_{i+1}(h)\neq 1}} z_h^{-1}\ll B\,(\log B)^{2^{n-1}-n-1},$$

au vu de (3.19) et (3.21) et puisque le nombre de $h\in[\![1,N]\!]$ vérifiant $\varepsilon_i(h)+\varepsilon_{i+1}(h)\neq 1$ est de $2^{n-1}-1$. $\square$

3·4. *Démonstration de l'asymptotique*

Estimons désormais le cardinal $N_1(B)$ défini en (3.15). D'après le Lemme 3·4, on a

$$N_1(B)\ll B(\log B)^{2^n-n-1}.$$

Pour $A>0$ fixé, on peut supposer que

$$z_h>\log(B)^A \quad \text{pour} \quad h\notin H_0\cup H_1\cup H_2$$

avec les notations de la section précédente. En effet, en reprenant l'inégalité (3.19), on obtient une contribution complémentaire (c'est-à-dire pour laquelle il existe au moins un $z_h\leqslant\log(B)^A$ pour $h\notin H_0\cup H_1\cup H_2$) majorée par

$$\ll B\log(B)^{2^n-n-2}\log(\log B).$$

Cela est suffisant pour donner lieu à un terme d'erreur acceptable en vue du Théorème 1·1. Cette réduction du domaine de comptage permet de contrôler le terme d'erreur du Lemme 3·2 de la façon suivante

$$\forall j\in[\![2,n-1]\!],\quad \frac{d_1^{(j-1)}}{B^{1/n}}\leqslant\frac{d_1^{(j-1)}}{y_j}=\prod_{\substack{\varepsilon_1(h)+\cdots+\varepsilon_{j-1}(h)\neq 0\\ \varepsilon_j(h)=1}} z_h^{-1}\leqslant\log(B)^{-A}$$

puisqu'on a $y_j\leqslant\sqrt[n]{B}$ et que tous les indices des variables intervenant dans le produit ci-dessus ne sont pas dans $H_0\cup H_1\cup H_2$. Par le Lemme 3·2, il s'ensuit l'estimation

$$N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right)=\frac{B^{1-1/n}}{d_1}b(\mathbf{y})+O\left(\frac{B^{1-1/n}}{d_1}\log(B)^{-A}\right)$$

puis grâce au Lemme 3·4

$$N_1(B)=B^{1-1/n}\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n\\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant\sqrt[n]{B}}}\frac{b(\mathbf{y})}{d_1}+O\left(B(\log B)^{2^n-n-2}\log(\log B)\right).$$

On a ici remplacé la somme

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n\\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant\sqrt[n]{B}\\ z_h>\log(B)^A,\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\frac{b(\mathbf{y})}{d_1}$$

par la somme

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n\\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} \frac{b(\mathbf{y})}{d_1}$$

au prix d'une contribution négligeable en raisonnant à nouveau comme dans la démonstration du Lemme 3·4 puisque $b(\mathbf{y})\ll 1$. On effectue alors la sommation dans le même ordre que lors de la preuve du Lemme 3·4. Lorsque $n\geqslant 4$, les conditions $Z_{h_j}\geqslant 1$ ne font intervenir la variable z_5 que dans Z_3 et Z_7. Comme on souhaite sommer sur les z_h avec $h\in H_0$ puis sur z_5 puis sur z_{h_n}, on restreint le domaine de comptage de façon à ne plus avoir cette dépendance en z_5 dans Z_3 et Z_7. Posant

$$Z_5' = \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ h\neq 3}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1},$$

la condition $Z_3=z_5/Z_5'\geqslant 1$ se réécrit $z_5\geqslant Z_5'$. D'une part, puisque $z_5\leqslant Z_{h_1}$, on a $Z_5'\leqslant Z_{h_1}$. D'autre part, la contribution des $\mathbf{z}$ tels que $z_5<Z_5'$ est négligeable. En effet, de la même manière que lors de la preuve du Lemme 3·3, on montre que ces $\mathbf{z}$ contribuent pour

$$\ll B \sum_{\substack{z_h\leqslant \sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1}\times \frac{Z_5'}{Z_{h_1}}. \tag{3.22}$$

Si l'on considère alors la quantité indépendante de la variable z_9 définie par $Z_9:=\frac{Z_{h_1}z_9}{Z_5'}$, on écrit $\frac{Z_5'}{Z_{h_1}}=\frac{z_9}{Z_9}$ (avec $9\notin H_0\cup H_1\cup H_2$) si bien que la contribution de (3.22) est

$$\ll B \sum_{\substack{z_h\leqslant \sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\\ z_9\leqslant Z_9}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\cup\{9\}} z_h^{-1}\times \frac{1}{Z_9}\ll B\log(B)^{2^n-n-2}.$$

On peut donc remplacer la condition $Z_3\geqslant 1$ par $Z_5'\leqslant Z_{h_1}$. De la même façon, en posant

$$Z_5'' = \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_4(h)=0\\ h\neq 5,7}} z_h^{-1},$$

la condition $Z_7=Z_5''/z_5\geqslant 1$ se réécrit $z_5\leqslant Z_5''$. Si l'on a $Z_{h_1}\leqslant Z_5''$, alors puisque $z_5\leqslant Z_{h_1}$, on a $z_5\leqslant Z_5''$.

Montrons alors que la condition $Z_7\geqslant 1$ peut être remplacée par la condition $Z_{h_1}\leqslant Z_5''$. Pour cela, il suffit de voir que la contribution des $\mathbf{z}$ tels que $Z_5''<Z_{h_1}$ est négligeable. Si l'on suppose $Z_5''<Z_{h_1}$, puisque $z_5\leqslant Z_5''$, le raisonnement ci-dessus fournit alors une contribution

$$\ll B \sum_{\substack{z_h\leqslant \sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1}\times \frac{Z_5''}{Z_{h_1}}.$$

De même, on écrit alors $\frac{Z_5''}{Z_{h_1}}=\frac{z_9}{Z_9'}$ avec $Z_9'=\frac{Z_{h_1}z_9}{Z_5''}$ si bien que cette contribution est

$$\ll B \sum_{\substack{z_h\leqslant \sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\\ z_9\leqslant Z_9'}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\cup\{9\}} z_h^{-1}\times \frac{1}{Z_9'}\ll B\log(B)^{2^n-n-2},$$

ce qui est bien négligeable. Pour finir, on remarque que lorsque $n = 3$, la condition $Z_{h_2} \geqslant 1$ ne fait pas intervenir la variable z_{h_1}. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer de telles restrictions au domaine de sommation dans ce cas-là.

On introduit ensuite la fonction $\tilde{b} : \mathbb{N}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{b}(\mathbf{z}) = \mathrm{vol}\left\{(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in [-1,1]^{n-1} \quad : \quad \left|\sum_{i=2}^{n} d_i \alpha_i\right| \leqslant d_1\right\}.$$

On constate en particulier que si $\mathbf{z}$ est réduit, alors $\tilde{b}(\mathbf{z}) = b(\mathbf{y})$ pour $\mathbf{y}$ l'unique n-uplet associé à $\mathbf{z}$ à travers la bijection explicitée dans le Lemme 2·1 et où b a été définie en (3.10). On considère également la fonction multiplicative $g : \mathbb{N}^N \to \mathbb{R}$, indicatrice de l'ensemble des N-uplets $\mathbf{z}$ réduits. Il s'agit ainsi, lorsque $n \geqslant 4$, de sommer $\frac{g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z})}{d_1}$ sur le domaine $\mathcal{V}$ suivant

$$\begin{cases} \forall j \in [\![4,n]\!] \cup \{1\}, \quad Z_{h_j} \geqslant 1, \\ Z'_5 \leqslant Z_{h_1} \leqslant Z''_5, \quad \text{et} \quad z_h \leqslant Z_h \quad \text{pour} \quad h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2, \end{cases} \tag{3.23}$$

le N-uplet $\mathbf{z}$ étant réduit. À une contribution négligeable près de l'ordre de

$$O\left(B(\log B)^{2^n-n-2}\log(\log B)\right),$$

on peut, comme dans [**7**, section 4], se restreindre au domaine $\mathcal{V}'$ suivant

$$\begin{cases} \forall j \in [\![4,n]\!] \cup \{1\}, \quad Z_{h_j} > \log(B)^5, \quad Z'_5(\log(B))^6 \leqslant Z_{h_1} \leqslant \dfrac{Z''_5}{\log(B)^6}, \quad \text{et} \\ z_h \leqslant Z_h \quad \text{pour} \quad h \in H_0 \cup H_2 \quad \text{et} \quad \dfrac{Z_{h_1}}{\log(B)} < z_5 \leqslant Z_{h_1}, \end{cases} \tag{3.24}$$

en utilisant la formule (3.19) établie lors de la démonstration du Lemme 3·4. En particulier, on a $Z_3 > \log(B)^5$ et $Z_7 > \log(B)^5$. Lorsque $n = 3$, il s'agit de sommer $\frac{g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z})}{d_1}$ sur le domaine $\mathcal{V}$ suivant

$$Z_h \geqslant 1 \quad \text{et} \quad z_h \leqslant Z_h \quad \text{pour} \quad h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2, \tag{3.25}$$

le N-uplet $\mathbf{z}$ étant réduit. À une contribution négligeable près de l'ordre de

$$O\left(B(\log B)^3 \log(\log B)\right),$$

on peut également se restreindre au domaine $\mathcal{V}'$ suivant

$$Z_3, Z_7 > \log(B)^5, \quad z_h \leqslant Z_h \quad \text{pour} \quad h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2. \tag{3.26}$$

On utilise alors les deux lemmes suivants. Le premier traduit le fait que la fonction g soit très proche, au sens de la convolution, de la fonction constante égale à 1 et le second est tiré de [**7**].

LEMME 3·6. *La série de Dirichlet*

$$\forall \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N), \quad G(\mathbf{s}) = \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{N}^N \\ \mathbf{z} \text{ réduit}}} \frac{1}{\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h^{s_h}}$$

est convergente sur le domaine $\mathfrak{Re}(s_h) > 1$ pour tout $h \in [\![1,N]\!]$. De plus, la fonction *définie par*

$$\forall \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N), \quad F(\mathbf{s}) = G(\mathbf{s}) \prod_{h=1}^{N} \zeta(s_h)^{-1} \tag{3.27}$$

admet un prolongement holomorphe à la région $\mathfrak{Re}(s_h) > \frac{1}{2}$ *pour tout* $h \in [\![1, N]\!]$.

Démonstration– On constate que la variable z_N n'est soumise à aucune condition de coprimalité et que toutes les autres variables z_h sont soumises à au moins une condition de coprimalité. On note alors E_n l'ensemble des couples (k, ℓ) de $[\![1, N-1]\!]^2$ tels que, si $\mathbf{z}$ est réduit, $\mathrm{pgcd}(z_k, z_\ell) = 1$. Pour tout $\mathbf{s}$ tel que $\mathfrak{Re}(s_h) > 1$ pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, on a ainsi

$$\begin{aligned} G(\mathbf{s}) &= \zeta(s_N) \prod_p \left(1 + \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_{N-1}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{N-1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \\ \nu_i \nu_j = 0 \text{ avec } (i,j) \in E_n}} \frac{1}{p^{\nu_1 s_1 + \dots + \nu_{N-1} s_{N-1}}} \right) \\ &= \zeta(s_N) \prod_p \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{p^{s_i}} + \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_{N-1}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{N-1} \\ \nu_i \nu_j = 0 \text{ avec } (i,j) \in E_n \\ \nu_1 + \dots + \nu_{N-1} \geqslant 2}} \frac{1}{p^{\nu_1 s_1 + \dots + \nu_{N-1} s_{N-1}}} \right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ainsi,

$$F(\mathbf{s}) = \prod_p \left(\prod_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{p^{s_i}} \right) \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{p^{s_i}} + \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_{N-1}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{N-1} \\ \nu_i \nu_j = 0 \text{ avec } (i,j) \in E_n \\ \nu_1 + \dots + \nu_{N-1} \geqslant 2}} \frac{1}{p^{\nu_1 s_1 + \dots + \nu_{N-1} s_{N-1}}} \right).$$

Le produit de droite étant convergent lorsque $\mathfrak{Re}(s_h) > \frac{1}{2}$ pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, on obtient bien le résultat annoncé. □

LEMME 3·7. *Soient f une fonction multiplicative en une variable dont la série de Dirichlet est absolument convergente pour* $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \frac{2}{3}$ *et v une fonction bornée et dérivable sur* $[0, 1]$. *On a alors pour tout* $Z \geqslant 1$

$$\sum_{z \leqslant Z} (\mathbb{1} * f)(z) v\left(\frac{z}{Z}\right) = Z \sum_{k \geqslant 1} \frac{f(k)}{k} \int_0^1 v(u) du + O\left(Z^{2/3} \sum_{k \geqslant 1} \frac{|f(k)|}{k^{2/3}} \int_0^1 |v'(u)| \, u^{2/3} du \right).$$

Démonstration– La démonstration de ce lemme s'obtient aisément à l'aide d'une sommation d'Abel (voir [**7**, section 4]). □

On notera dans la suite $f : \mathbb{N}^N \to \mathbb{R}$ la fonction arithmétique associée à la série de Dirichlet F. Autrement dit, pour tout $\mathbf{s}$ tel que $\mathfrak{Re}(s_h) > 1$ pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, on a

$$F(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{N}^N} \frac{f(\mathbf{z})}{\prod_{h=1}^{N} z_h^{s_h}}.$$

et $g = \mathbb{1} * f$. Une application des Lemmes 3·6 et 3·7 en sommant d'abord sur les z_h pour $h \in H_0$ et le fait que d_1 ne fasse intervenir aucune variable z_{h_j} pour $j \in [\![2, n-1]\!]$ fournit alors

$$\sum_{\substack{z_{h_j} \leqslant Z_{h_j} \\ h_j \in H_0}} g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z}) = Z^{(0)}\beta\left(\frac{z_{h_1}}{Z_{h_1}}\right)\left(\sum_{\substack{k_h \mid z_h \\ h \notin H_0}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h \in H_0} k_h} + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h \mid z_h \\ h \notin H_0}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h \in H_0} k_h^{2/3}}\right)\right)$$

avec $Z^{(0)} = \prod_{j=2}^{n-1} Z_{h_j}$ et

$$\beta(u_1) = \int_{[0,1]^{n-2}} \mathrm{vol}\left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [-1,1]^n \ : \ \left|\sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{\ell=1}^{i-1} u_\ell\right)\alpha_i\right| \leqslant 1\right\} \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}.$$

En effet, on a les égalités

$$\forall 2 \leqslant \ell \leqslant n-1, \quad \frac{d_{\ell+1}}{d_\ell} = \frac{z_{h_\ell}}{Z_{h_\ell}} \quad \text{et} \quad \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_{h_1}}{Z_1}$$

et, pour tout $\mathbf{z}$,

$$\begin{aligned}\tilde{b}(\mathbf{z}) &= \mathrm{vol}\left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [-1,1]^n \quad : \quad \left|\sum_{i=2}^{n} \frac{d_i}{d_1}\alpha_i\right| \leqslant 1\right\} \\ &= \mathrm{vol}\left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [-1,1]^n \quad : \quad \left|\sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{\ell=1}^{i-1} \frac{d_{\ell+1}}{d_\ell}\right)\alpha_i\right| \leqslant 1\right\}\end{aligned}$$

est une fonction différentiable à dérivées partielles bornées sur $[0,1]$ si bien que chacun des termes

$$\int_0^1 |v'(u)|\, u^{2/3}\mathrm{d}u \ll 1.$$

De plus, grâce aux conditions (3.24), dans le terme d'erreur du Lemme 3·7, on a bien

$$\left(Z^{(0)}\right)^{2/3} = Z^{(0)}\left(Z^{(0)}\right)^{-1/3} \ll \frac{Z^{(0)}}{\log(B)^{5(n-2)/3}} \ll \frac{Z^{(0)}}{\log(B)}.$$

On pourra noter que $Z^{(0)}$ ne dépend pas de Z_{h_1} d'après (3.18). On effectue alors la sommation par rapport à z_{h_1} pour obtenir

$$\sum_{\substack{z_h \leqslant Z_h \\ h \in H_0 \cup H_1}} g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z}) =$$

$$Z^{(1)}\tilde{\beta}\left(\sum_{\substack{k_h \mid z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1} k_h} + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h \mid z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1} k_h^{2/3}}\right)\right),$$

où $Z^{(1)} = Z^{(0)} Z_{h_1}$ et

$$\tilde{\beta} = \int_0^1 \beta(u_1)\mathrm{d}u_1. \tag{3.29}$$

Les quantités $Z^{(1)}$ et d_1 étant indépendantes de z_{h_n}, en sommant sur z_{h_n}, il vient

$$\sum_{\substack{z_{h_j}\leqslant Z_{h_j}\\ h_j\in H_0\cup H_1\cup H_2}} g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z}) = Z^{(2)}\tilde{\beta}\left(\sum_{\substack{k_h\mid z_h\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\sum_{\substack{k_h\geqslant 1\\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}}\frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h}\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{1}{\log(B)}\sum_{\substack{k_h\mid z_h\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\sum_{\substack{k_h\geqslant 1\\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}}\frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h^{2/3}}\right)\right),$$

avec $Z^{(2)} = Z^{(1)}Z_{h_n}$. On a ainsi

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n\\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant\sqrt[n]{B}/k}}\frac{b(\mathbf{y})}{d_1} = \sqrt[n]{B}\tilde{\beta}\sum_{\substack{z_h\in\mathcal{V}',\ z_h\leqslant\sqrt[n]{B}/k\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1}\times$$
$$\left(\sum_{\substack{k_h\mid z_h\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\sum_{\substack{k_h\geqslant 1\\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}}\frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h}+O\left(\frac{1}{\log(B)}\sum_{\substack{k_h\mid z_h\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\sum_{\substack{k_h\geqslant 1\\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}}\frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h^{2/3}}\right)\right).$$

Dans un premier temps, on remarque que l'on peut sommer sur $\mathcal{V}$ défini en (3.23) lorsque $n\geqslant 4$ et en (3.25) lorsque $n=3$ quitte à rajouter une contribution négligeable. En effet, considérons $(z_h)_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}\in\mathcal{V}\smallsetminus\mathcal{V}'$. S'il existe $4\leqslant \ell\leqslant n-1$ ou $\ell=1$ tel que $Z_{h_\ell}\leqslant \log(B)^5$, alors

$$\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0\\ h\neq h_j}} z_h^{-1}\leqslant \log(B)^5\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h^{-1}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{z_h\in\mathcal{V}\smallsetminus\mathcal{V}',\ z_h\leqslant\sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1} &\ll \log(B)^5\sum_{\substack{z_h\leqslant\sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}}\prod_{\substack{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\\ \varepsilon_j(h)=\varepsilon_{j+1}(h)}} z_h^{-1}\prod_{\substack{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\\ \varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h^{-2}\\ &\ll \log(B)^5 B^{2^{n-2}-1}\frac{1}{B^{2^{n-2}}}\log(B)^{2^n-n-1-2^{n-1}-1}\\ &\ll \frac{\log(B)^{2^{n-1}-n+2}}{B}\ll 1.\end{aligned}$$

De même, si $Z_5\leqslant Z_5'(\log(B))^6$, on a

$$\frac{Z_5}{Z_5'} = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5}} z_h\prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ h\neq 3,5}} z_h^{-1}$$

et lorsque $Z_5 > \frac{Z_5''}{\log(B)^6}$, il vient

$$\frac{Z_5''}{Z_5} = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_4(h)\neq 1\text{ ou }\varepsilon_3(h)\neq 0}} z_h\prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_4(h)\neq 0\text{ ou }\varepsilon_3(h)\neq 1}} z_h\prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)\neq 0\text{ ou }\varepsilon_2(h)\neq 1}} z_h^{-1}\prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)\neq 1\text{ ou }\varepsilon_2(h)\neq 0\\ h\neq 5}} z_h^{-1}$$

de sorte que le même raisonnement permet de conclure à une contribution $\ll 1$. On traite de manière complètement analogue la condition $z_5 \leqslant \frac{Z_{h_1}}{\log(B)}$ et par conséquent, on a

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} \frac{b(\mathbf{y})}{d_1} = \sqrt[n]{B}\tilde{\beta} \sum_{\substack{z_h\in\mathcal{V},\ z_h\leqslant\sqrt[n]{B} \\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1}\times$$

$$\left(\sum_{\substack{k_h|z_h \\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \sum_{\substack{k_h\geqslant 1 \\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h} + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h|z_h \\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \sum_{\substack{k_h\geqslant 1 \\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h^{2/3}} \right)\right).$$

Le domaine $\mathcal{V}$ se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=0 \\ h\neq h_j}} z_h \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad 4\leqslant j\leqslant n-1, \\ \prod_{\substack{\varepsilon_n(h)=1 \\ h\neq h_n}} z_h \leqslant \sqrt[n]{B}, \quad \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_3(h)=1}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1 \\ \varepsilon_3(h)=0 \\ h\neq 3}} z_h \leqslant 1, \quad \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1 \\ \varepsilon_2(h)=0 \\ h\neq 5}} z_h \leqslant 1 \\ \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1 \\ \varepsilon_2(h)=0 \\ h\neq 5}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=1 \\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=0 \\ \varepsilon_3(h)=1 \\ h\neq 5,7}} z_h \leqslant 1, \\ z_h \leqslant \sqrt[n]{B} \quad \text{pour} \quad h\notin H_0\cup H_1\cup H_2. \end{cases}$$

lorsque $n\geqslant 4$ et

$$\begin{cases} \frac{z_2}{z_4 z_5} \leqslant 1, \\ z_4 z_5 z_6 \leqslant \sqrt[3]{B}, \quad \frac{z_5}{z_2 z_6} \leqslant 1, \\ z_h \leqslant \sqrt[3]{B} \quad \text{pour} \quad h\notin H_0\cup H_1\cup H_2. \end{cases}$$

lorsque $n=3$. En écrivant $z_h = B^{\frac{t_h}{n}}$ avec $t_h\geqslant 0$ pour tout $h\notin H_0\cup H_1\cup H_2$, on obtient que l'ensemble des $(t_h)_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}$ vérifie

$$\begin{cases} \sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=1 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=0 \\ h\neq h_j}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} t_h \quad \text{pour} \quad 4\leqslant j\leqslant n-1, \\ \sum_{\substack{\varepsilon_n(h)=1 \\ h\neq h_n}} t_h \leqslant 1, \quad \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1 \\ \varepsilon_3(h)=0 \\ h\neq 3}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_3(h)=1}} t_h, \quad \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1 \\ \varepsilon_2(h)=0 \\ h\neq 5}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_2(h)=1}} t_h \\ \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_2(h)=1}} t_h + \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0 \\ \varepsilon_3(h)=1 \\ h\neq 5,7}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1 \\ \varepsilon_2(h)=0 \\ h\neq 5}} t_h + \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1 \\ \varepsilon_3(h)=0}} t_h, \\ t_h \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad h\notin H_0\cup H_1\cup H_2, \end{cases}$$

lorsque $n\geqslant 4$ et

$$\begin{cases} t_2 \leqslant t_4+t_5 \\ t_4+t_5+t_6\leqslant 1, \quad t_5\leqslant t_2+t_6, \\ t_2,t_4,t_5,t_6\leqslant 1 \end{cases}$$

si $n=3$ si bien que dans tous les cas, il est bien inclus dans $[0,1]^{2^n-n-1}$. Une application directe de [**5**, lemma 8] fournit alors l'estimation

$$N\left(\frac{B}{k^n}\right)=\frac{2^{n-1}n!}{n^{2^n-n-1}k^n}\tilde{\beta}VF(\mathbf{1})B\log(B)^{2^n-n-1}+O\left(\frac{B}{k^n}(\log B)^{2^n-n-2}\log(\log B)\right),$$

avec

$$V=\mathrm{vol}\left\{(t_h)\in[0,1]^{2^n-n-1}\quad:\quad\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0\\ h\neq h_j}}t_h\leqslant\sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}}t_h\quad\text{pour}\quad 4\leqslant j\leqslant n-1,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_n(h)=1\\ h\neq h_n}}t_h\leqslant 1,\qquad\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ h\neq 3}}t_h\leqslant\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1}}t_h,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}}t_h\leqslant\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}}t_h,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}}t_h+\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}}t_h\leqslant\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}}t_h+\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}}t_h\end{array}\right\}\tag{3.30}$$

lorsque $n\geqslant 4$ et

$$V=\mathrm{vol}\left\{(t_2,t_4,t_5,t_6)\in[0,1]^4\quad:\quad\begin{array}{l}t_2\leqslant t_4+t_5\\ t_4+t_5+t_6\leqslant 1,\quad t_5\leqslant t_2+t_6\end{array}\right\}$$

si $n=3$. Finalement, il vient

$$N(B;U_n)=\frac{2^{n-1}n!\tilde{\beta}V}{n^{2^n-n-1}\zeta(n)}F(\mathbf{1})B\log(B)^{2^n-n-1}+O\Big(B(\log B)^{2^n-n-2}\log(\log B)\Big).\tag{3.31}$$

Remarque.– Géométriquement, on a transformé le problème de comptage sur la variété W_n en un problème de comptage de points sur la sous-variété de $\mathbb{A}^{2^n+n-1}$ définie par

$$\sum_{j=1}^{n}d_jx_j=0\quad\text{avec}\quad\forall i\in[\![1,n]\!],\quad d_i=\prod_{1\leqslant h\leqslant N}z_h^{1-\varepsilon_i(h)}\tag{3.32}$$

soumis à certaines conditions de coprimalité et de positivité. On montrera plus tard que cette variété est liée au torseur versel d'une résolution crépante de W_n. Cela est cohérent avec les résultats et le torseur versel obtenus dans [**3**].

4. *Vérification de la conjecture de Peyre pour W_n*

4·1. *Résolution crépante des singularités de W_n et forme conjecturale de la constante de Peyre*

On s'appuie ici sur le travail de Per Salberger présenté en Annexe de cet article. L'objet de cette partie est de construire à partir de cette Annexe, une résolution crépante des singularités de W_n puis de détailler tous les éléments de la géométrie de cette résolution crépante nécessaires à la vérification du fait que $c_n=c_{\text{Peyre}}$ pour tout $n\geqslant 3$ où c_n est la constante obtenue dans le Théorème 1·1 et c_{Peyre} est définie en (4.12) *infra* ou par [**22**, formule 5.1].

4·1·1. *Une résolution crépante de W_n*

On reformule dans cette section le résultat principal de l'Annexe de Salberger en utilisant les notations de cet article sans détailler aucune démonstration. On renvoie le lecteur intéressé par ces dernières à cette Annexe en fin d'article.

On rappelle ici que $N = 2^n - 1$ et l'on introduit pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, l'espace $\mathbb{P}^{(h)} \times \mathbb{P}^{(h)}$ comme étant l'espace biprojectif $\mathbb{P}^{s(h)-1} \times \mathbb{P}^{s(h)-1}$ de coordonnées bihomogènes

$$\left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) = \left(Y_{i_1}^{(h)}, \dots, Y_{i_{s(h)}}^{(h)}; Z_{i_1}^{(h)}, \dots, Z_{i_{s(h)}}^{(h)}\right)$$

pour $\varepsilon_{i_1}(h) = \dots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$ et $B^{(h)} \subseteq \mathbb{P}^{(h)} \times \mathbb{P}^{(h)}$ la sous-variété fermée définie par les équations

$$Y_{i_1}^{(h)} Z_{i_1}^{(h)} = \dots = Y_{i_{s(h)}}^{(h)} Z_{i_{s(h)}}^{(h)} \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \dots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1. \tag{4.1}$$

On pose également $B_{0,n}$ comme étant la sous-variété fermée de $\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} B^{(h)}$ définie par les équations

$$\begin{cases} Y_i^{(h)} Y_j^{(\ell)} = Y_j^{(h)} Y_i^{(\ell)} \quad \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, & (4.2) \\ Z_i^{(h)} Z_j^{(\ell)} = Z_j^{(h)} Z_i^{(\ell)} \quad \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1. & (4.3) \end{cases}$$

On a un morphisme évident donné par la projection sur le dernier facteur $p_0 : B_{0,n} \to B^{(N)}$ défini par $\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) \mapsto \left(\mathbf{Y}^{(N)}; \mathbf{Z}^{(N)}\right)$.

On définit également la sous-variété fermée $X_{0,n} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbb{P}^{(h)} \times \mathbb{P}^{(h)}$ de coordonnées multihomogènes

$$\left(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)$$

définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} Y_{i_1}^{(h)} Z_{i_1}^{(h)} = \dots = Y_{i_{s(h)}}^{(h)} Z_{i_{s(h)}}^{(h)} \text{ pour } h \in [\![1, N]\!] \text{ et } \varepsilon_{i_1}(h) = \dots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1, & (4.4) \\ Y_i^{(h)} Y_j^{(\ell)} = Y_j^{(h)} Y_i^{(\ell)} \quad \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, & (4.5) \\ Z_i^{(h)} Z_j^{(\ell)} = Z_j^{(h)} Z_i^{(\ell)} \quad \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, & (4.6) \\ x_1 Z_1^{(N)} + \dots + x_n Z_n^{(N)} = 0, & (4.7) \\ y_i Y_j^{(N)} - y_j Y_i^{(N)} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n. & (4.8) \end{cases}$$

Enfin, on introduit $C_n \subseteq \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbb{P}^{(h)}$, la variété torique de Coxeter de $\mathfrak{S}_n$ de coordonnées multihomogènes $\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}\right)$ définie par les équations (4.4). Le résultat principal de l'Annexe, due à Per Salberger, est alors le suivant et permet d'obtenir une résolution crépante de W_n.

Théorème 4·1 (Salberger, [Annexe]). *Soit $n \geqslant 1$. La restriction de la projection sur le premier facteur*

$$pr_1 : \mathbb{P}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbb{P}^{(h)} \times \mathbb{P}^{(h)} \to \mathbb{P}^{2n-1}$$

à la variété $X_{0,n}$ définie par les équations (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8) fournit alors une résolution crépante $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ des singularités de W_n. De plus, $X_{0,n}$ est une $\mathbb{P}^{n-1}$–fibration sur une variété $B_{0,n}$ isomorphe à la variété torique de Coxeter C_n de $\mathfrak{S}_n$.

On rappelle également que dans le cas $n=3$ une résolution crépante est construite dans [**3**]. Cette dernière est isomorphe à celle fournie par le Théorème 4·1 comme le remarque Salberger à la suite du théorème 1 de son Annexe. Cette résolution crépante est une $\mathbb{P}^2$–fibration sur la variété torique $B^{(3)}$. Plus généralement, Blomer, Brüdern et Salberger considèrent dans [**3**] la variété triprojective $X_n \subseteq \mathbb{P}^{2n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ de coordonnées multihomogènes $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;Y_1,\dots,Y_n;Z_1,\dots,Z_n)$ définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} x_1Z_1+\cdots+x_nZ_n=0, & (4.9)\\ y_iY_j-y_jY_i=0 \quad \text{pour} \quad 1\leqslant i<j\leqslant n, & (4.10)\\ Y_1Z_1=\cdots=Y_nZ_n. & (4.11)\end{cases}$$

Il est alors établi dans [**3**] que la projection $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{P}^{2n-1}\times\mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{P}^{n-1}\to\mathbb{P}^{2n-1}$ donne lieu par restriction à un morphisme propre, G_n-équivariant et crépant $f_n : X_n \to W_n$. Le morphisme f_3 est alors la résolution crépante obtenue pour $n=3$ dans [**3**]. Malheureusement, X_n n'est en revanche pas lisse dès que $n\geqslant 4$.

4·1·2. *Les hypersurfaces W_n sont "presque de Fano"*

La proposition suivante permet de justifier que la formule empirique [**23**, formule 5.1] de Peyre s'applique bien dans le cas des variétés W_n pour $n\geqslant 3$.

PROPOSITION 4·1. *La variété $X_{0,n} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}\times\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}^{(h)}\times\mathbb{P}^{(h)}$ définie par les équations* (4.4)*,* (4.5)*,* (4.6)*,* (4.7) *et* (4.8) *est "presque de Fano" au sens de* [**23**, Définition 3.1].

Démonstration.– Le Lemme 4·1 entraîne aisément, de la même façon que dans [**3**, lemma 6], que le groupe de Picard géométrique de $X_{0,n}$ est sans torsion et que la classe anticanonique est dans l'intérieur de $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})$. Il ne reste donc qu'à justifier le fait que

$$H^1(X_{0,n},O_{X_{0,n}})=H^2(X_{0,n},O_{X_{0,n}})=\{0\}.$$

On utilise alors le fait que

$$H^1(B_{0,n},O_{B_{0,n}})=H^2(B_{0,n},O_{B_{0,n}})=\{0\}$$

d'après [**6**, section 3.3] et le fait que $X_{0,n}$ soit un $\mathbb{P}^{n-1}$-fibré sur $B_{0,n}$ permet de conclure. □

4·1·3. *Forme conjecturale de la constante de Peyre*

Les conjectures originales de Manin [**13**] et de Peyre [**22**] sur les variétés de Fano non singulières ne s'appliquent pas directement au problème de comptage associé à W_n puisque cette dernière est une hypersurface singulière pour $n\geqslant 3$. Néanmoins, puisque $f_{0,n} : X_{0,n}\to W_n$ est une résolution crépante de W_n dont la restriction à $X_0^\circ \to U_n$ est un isomorphisme où $X_{0,n}^\circ$ est l'ouvert de $X_{0,n}$ défini par les conditions $y_1\cdots y_n\neq 0$, alors on a

$$N(B;U_n)=\#\left\{x\in X_{0,n}^\circ(\mathbb{Q}) \ : \ (H\circ f_{0,n})(x)\leqslant B\right\}$$

où la hauteur $H\circ f_{0,n}$ est une hauteur anticanonique puisque $f_{0,n}$ est crépante. Comme d'après la Proposition 4·1, la variété $X_{0,n}$ est une variété "presque de Fano" au sens de [**23**, Définition 3.1], alors la conjecture de Manin prend la forme suivante où la constante de Peyre est donnée par la formule empirique [**23**, formule 5.1]

$$N(B;U_n)=c_{\mathrm{Peyre}}B\left(\log(B)\right)^{\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))-1}(1+o(1))$$

avec

$$c_{\mathrm{Peyre}} = \alpha(X_{0,n})\beta(X_{0,n})\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right) \tag{4.12}$$

où

$$\beta(X_{0,n}) = \# H^1\left(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}),\mathrm{Pic}(\overline{X_{0,n}})\right) = \mathrm{Coker}\big(\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Br}(X_{0,n})\big), \tag{4.13}$$

$\alpha(X_{0,n})$ est le volume d'un certain polytope dans le dual du cône effectif et la quantité $\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right)$ est un nombre de Tamagawa que l'on détaillera en section 4.3.

4·1·4. *Le facteur $\beta(X_{0,n})$*

En raisonnant comme dans [**3**], on obtient que le groupe de Brauer cohomologique de $X_{0,n}$, à savoir $\mathrm{Br}(X_{0,n}) = H^2_{\text{ét}}(\overline{X}_0,\mathbb{G}_m)$, est trivial. En effet, c'est un invariant birationnel (voir [**17**]) et on combine alors le fait que l'hypersurface W_n considérée soit rationnelle avec le fait que $\mathrm{Br}\big(\mathbb{P}^r_{\mathbb{Q}}\big) = \{0\}$ pour tout $r \geqslant 1$ pour obtenir le résultat. Il s'ensuit alors de (4.13) que $\beta(X_{0,n}) = 1$.

4·1·5. *Le facteur $\alpha(X_{0,n})$*

Dans le but de calculer le facteur $\alpha(X_{0,n})$ apparaissant dans la constante de Peyre, il est nécessaire de décrire un peu plus précisément le géométrie de $X_{0,n}$ et notamment son groupe de Picard et son cône pseudo-effectif. On s'appuie pour ce faire sur [**3**] où ce travail est effectué dans le cas $n = 3$ et sur les résultats de Salberger présentés en Annexe. On démontre pour commencer la proposition suivante. Les arguments reposent essentiellement sur le fait que la variété W_n soit la compactification équivariante d'un groupe algébrique, ce qui nous permet d'exploiter les résultats de [**29**].

Proposition 4·2. *Le morphisme $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ défini en Annexe et en section 4.1 est un morphisme propre, G_n-équivariant d'une variété normale $X_{0,n}$ vers W_n. De plus, il s'agit d'une résolution crépante de W_n.*

Démonstration.– Le fait qu'il s'agisse d'une résolution crépante résulte du théorème 4 de l'Annexe de Salberger et le fait que $X_{0,n}$ soit normale résulte du fait que $X_{0,n}$ soit lisse. On tire aussi de la construction par Salberger de $f_{0,n}$ en Annexe le fait que $f_{0,n} = p_{X_n} \circ f_n$ avec

$$p_{X_n} : X_{0,n} \to X_n \quad \text{et} \quad f_n : X_n \to W_n$$

définis en [**3**, section 3]. D'après le théorème 6 de [**3**], il vient que f_n est un morphisme propre et G_n-équivariant. Il suffit donc de démontrer que p_{X_n} est un morphisme propre et G_n-équivariant afin de conclure. Pour ce faire on s'inspire de la démonstration de ce théorème 6 de [**3**]. On considère ainsi

$$U_n = j_n(G_n) = \{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in W_n \ : \ y_1 \cdots y_n \neq 0\}$$

pour $j_n : G_n \hookrightarrow W_n$. On a alors $f_{0,n}^{-1}(U_n) \subseteq B_0^*$ et $f_{0,n}$ est un isomorphisme de $f_{0,n}^{-1}(U_n)$ sur U_n. En effet, l'application inverse est donnée par

$$(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in U_n \longmapsto \left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n; \prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{y}^{(h)};\frac{1}{\mathbf{y}^{(h)}}\right)\right) \in f_{0,n}^{-1}(U_n),$$

où

$$\mathbf{y}^{(h)} = \left(y_{i_1},\dots,y_{i_{s(h)}}\right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\frac{1}{\mathbf{y}^{(h)}}=\left(\frac{1}{y_{i_1}},\dots,\frac{1}{y_{i_{s(h)}}}\right)\quad\text{pour}\quad\varepsilon_{i_1}(h)=\dots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1.$$

On peut donc considérer G_n comme un ouvert de $X_{0,n}$ et que $X_{0,n}$ est muni d'une G_n-action naturelle $\beta_0 : G_n\times X_{0,n}\to X_{0,n}$ pour laquelle

$$\left(\begin{pmatrix} b_1 & a_1\\ 0 & b_1\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} b_n & a_n\\ 0 & b_n\end{pmatrix}\right)\cdot\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{Y}^{(h)};\mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)$$

est donné par

$$\left(b_1x_1+a_1y_1,\dots,b_nx_n+a_ny_n,b_1y_1,\dots,b_ny_n;\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{b}\mathbf{Y}^{(h)};\frac{\mathbf{Z}^{(h)}}{\mathbf{b}}\right)\right),$$

où l'on note

$$\mathbf{b}\mathbf{Y}^{(h)}=\left(b_{i_1}Y_{i_1}^{(h)},\dots,b_{i_{s(h)}}Y_{i_{s(h)}}^{(h)}\right)\quad\text{pour}\quad\varepsilon_{i_1}(h)=\dots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1$$

et

$$\frac{\mathbf{Z}^{(h)}}{\mathbf{b}}=\left(\frac{Z_{i_1}^{(h)}}{b_{i_1}},\dots,\frac{Z_{i_{s(h)}}^{(h)}}{b_{i_{s(h)}}}\right)\quad\text{pour}\quad\varepsilon_{i_1}(h)=\dots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1.$$

La restriction de β_0 à $G_n\times f_{0,n}^{-1}(U_n)$ donne simplement la loi de groupe de G_n et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} C_n\times X_{0,n} \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "(\mathrm{Id},f_{0,n})"'] & X_{0,n} \arrow[d, "f_{0,n}"] \\ G_n\times W_n \arrow[r, "\alpha"'] & W_n \end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui permet de compléter la preuve de la proposition. □

Passons maintenant à une description du groupe de Picard de $X_{0,n}$ et de son cône pseudo-effectif. De la même façon que dans [**3**], le fait que $X_{0,n}$ soit une compactification équivariante de G_n nous permet d'exploiter le résultat de [**29**] suivant.

PROPOSITION 4·3 ([**29**, proposition 1.1]). *Soient Y une compactification équivariante lisse et propre d'un groupe algébrique linéaire connexe et résoluble G, $\mathrm{Div}_{Y\smallsetminus G}(Y)$ le groupe abélien libre des diviseurs à support dans $Y\smallsetminus G$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(Y)\subseteq\mathrm{Pic}(Y)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ le cône pseudo-effectif engendré par les classes de diviseurs effectifs. Alors la frontière*

$$D=Y\smallsetminus G=\bigcup_{\iota\in I}D_\iota,$$

où I indexe les composantes irréductibles de D et D_ι est une composante irréductible de D pour $\iota\in I$, est un diviseur de Weil à croisements normaux. De plus,

(i)On a une suite exacte $0\to\mathrm{Hom}(G,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{Div}_{Y\smallsetminus G}(Y)\to\mathrm{Pic}(Y)\to 0.$

(ii)On a $\mathrm{Pic}(Y)=\bigoplus_{\iota\in I}\mathbb{Z}D_\iota$.

(iii)On a $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(Y)=\sum_{\iota\in I}\mathbb{R}_{\geqslant 0}D_\iota$.

Démonstration.– La preuve se trouve dans [**29**, proposition 1.1]. □

On écrira dans toute la suite $[D]$ pour la classe dans $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ d'un diviseur D de $X_{0,n}$, $\left[-K_{X_{0,n}}\right]$ pour la classe anticanonique, $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$ pour le faisceau anticanonique et $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n}) \subseteq \mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ le cône pseudo-effectif engendré par les classes de diviseurs effectifs. On introduit alors D_N la sous-variété de $X_{0,n}$ définie par les équations $y_1 = \cdots = y_n = 0$ et, pour tout $h \in [\![1, N-1]\!]$, on pose également D_h comme étant la sous-variété de $X_{0,n}$ définie par les équations

$$\forall \ell \in [\![1,N]\!] \text{ tel que } \ell \not\preceq h \text{ et } \ell \not\preceq N-h : \begin{cases} Y_i^{(\ell)} = 0 \text{ si } \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_i(h) = 1 \\ Z_j^{(\ell)} = 0 \text{ si } \varepsilon_j(\ell) = 1 \text{ et } \varepsilon_j(h) = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

On remarque en particulier que la condition $\ell \not\preceq h$ implique l'existence d'un $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\varepsilon_{i_0}(\ell) = 1$ et $\varepsilon_{i_0}(h) = 0$ et la condition $\ell \not\preceq N-h$ implique l'existence d'un $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\varepsilon_{j_0}(\ell) = \varepsilon_{j_0}(h) = 1$ si bien que les conditions (4.14) sont bien définies. On démontre alors le lemme essentiel suivant, inspiré du lemme 4 de [**3**].

Lemme 4·1.

(i)On a $X_{0,n} \smallsetminus G_n = \bigcup_{1 \leqslant h \leqslant N} D_h$ *et* $\mathrm{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n}) = \bigoplus_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbb{Z} D_h$.

(ii)Le morphisme canonique de $\mathrm{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n})$ *vers* $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ *est surjectif de noyau engendré par*

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h)=1}} D_h - \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_1(h)=1}} D_h \quad \textit{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

En particulier $\mathrm{rang}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})) = 2^n - n$.

(iii)On a

$$\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n}) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbb{R}_{\geqslant 0} D_h.$$

(iv)Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$*, le diviseur*

$$n \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h)=1}} D_h$$

est un diviseur anticanonique.

Remarque.– On déduit alors du point (ii) du Lemme 4·1 (et plus particulièrement du fait que $\mathrm{rang}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})) = 2^n - n$) que la puissance de log obtenue dans le Théorème 1·1 est bien conforme à la prédiction de Manin.

Démonstration.– Commençons par le point (i). Par définition, on a

$$X_{0,n} \smallsetminus G_n = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} (Y^h; Z^h) \right) \in X_{0,n} \ : \ y_1 \cdots y_n = 0 \right\}.$$

L'inclusion

$$\bigcup_{1 \leqslant h \leqslant N} D_h \subseteq X_{0,n} \smallsetminus G_n$$

est claire. Supposons que

$$P = \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} (\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}) \right) \in X_{0,n} \smallsetminus G_n.$$

On a alors deux cas. Soit $y_1 = \cdots = y_n = 0$, auquel cas on a immédiatement $P \in D_N$. Soit il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $y_{i_1} = \cdots = y_{i_k} = 0$ pour $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [\![1, n]\!]$ et $y_j \neq 0$ pour $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Alors, d'après (4.8) et (4.7), on a $Y_{i_1}^{(N)} = \cdots = Y_{i_k}^{(N)} = 0$ et $Z_i^{(N)} = 0$ pour tout $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Grâce aux équations (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8), on en déduit que $P \in D_h$ pour $h = \sum_{j=1}^k 2^{i_j - 1}$. Il suffit alors de constater que chacune des variétés D_h pour $h \in [\![1, N]\!]$ est irréductible et on peut alors conclure grâce à la Proposition 4·3.

Passons au point (*ii*). Le point (*i*) de la Proposition 4·3 permet d'obtenir la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(G_n, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n}) \to \mathrm{Pic}(X_{0,n}) \to 0$$

où l'application $\mathrm{Hom}(G_n, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n})$ est l'application diviseur des fonctions rationnelles. Comme dans [**3**, Lemma 4.(*i*)], on obtient que $\mathrm{Hom}(G_n, \mathbb{G}_m)$ est le groupe abélien libre engendré par les $\frac{y_i}{y_1} = \frac{Y_i^{(N)}}{Y_1^{(N)}}$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. Il vient alors facilement que

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad \mathrm{div}\left(\frac{Y_i^{(N)}}{Y_1^{(N)}} \right) = \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h) = 1}} D_h - \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_1(h) = 1}} D_h \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

ce qui permet de conclure la démonstration de (*ii*).

Le point (*iii*) résulte immédiatement du point *(iii)* de la Proposition 4·3.

Enfin, démontrons le point (*iv*). Comme $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ est crépante et que $\omega_{W_n} \cong O_{W_n}(-n)$, d'après [**19**, II.6.17.1], il suffit d'établir que le sous-schéma fermé défini par $y_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ donne lieu au diviseur

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h) = 1}} D_h.$$

Comme remarqué dans [**3**, lemma 4], il est facile de voir que y_i a multiplicité 1 le long de D_0 et on est par conséquent ramené à établir que le sous-schéma fermé défini par $Y_i = 0$ donne lieu au diviseur

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N-1 \\ \varepsilon_i(h) = 1}} D_h,$$

ce qui est clair au vu de (4.14). □

On est désormais en mesure de calculer, de façon analogue à [**3**], le facteur $\alpha(X_{0,n})$ défini dans [**22**]. On introduit $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^\vee \subseteq \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$, le cône dual de $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})$ constitué de toutes les applications linéaires $\Lambda : \mathrm{Pic}(X_{0,n})^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lambda([D]) \geqslant 0$ pour tout diviseur effectif D de $X_{0,n}$. Considérons de plus ℓ :

$\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ l'application linéaire définie par

$$\Lambda\in\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\mathbb{R})\longmapsto\Lambda\left(\left[-K_{X_{0,n}}\right]\right).$$

On munit alors $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}s$ normalisée telle que $L=\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n}),\mathbb{Z})$ soit de covolume 1. On munit ainsi l'hyperplan $\mathcal{H}=\ell^{-1}(\{1\})$ de la mesure $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)}$. En particulier, si $z_1,\dots,z_r$ sont des coordonnées de $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\mathbb{R})$ correspondant à une $\mathbb{Z}-$base de L et si $\ell(z_1,\dots,z_r)=\alpha_1z_1+\dots+\alpha_rz_r$ pour $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r$, alors, dès que $\alpha_i\neq0$,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)}=\frac{\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_{i-1}\widehat{\mathrm{d}z_i}\mathrm{d}z_{i+1}\cdots\mathrm{d}z_r}{|\alpha_i|}=\frac{\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_{i-1}\mathrm{d}z_{i+1}\cdots\mathrm{d}z_r}{|\alpha_i|}.\tag{4.15}$$

On a alors, en accord avec [**22**],

$$\alpha(X_{0,n})=\mathrm{Vol}\left\{\Lambda\in\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^{\vee}\quad|\quad\Lambda\left(\left[-K_{X_{0,n}}\right]\right)=1\right\}=\int_{\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^{\vee}\cap\mathcal{H}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)}.$$

LEMME 4·2. *On a* $\alpha(X_{0,n})=\frac{1}{n^{2^n-n}}V$ *où* V *est défini en* (3.30)*.*

Démonstration.– Supposons que $n\geqslant4$, le cas $n=3$ étant couvert par [**3**, lemma 5]. Grâce au Lemme 4·1, on sait que $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ est engendré par les D_h pour $h\in[\![1,N]\!]$ avec les relations

$$\forall i\neq j\in[\![1,n]\!],\qquad\sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_i(h)=1}}D_h-\sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_j(h)=1}}D_h=0.$$

Ces dernières fournissent les relations

$$\forall4\leqslant j\leqslant n-1,\quad D_{h_j}=\sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_j(h)=0}}D_h-\sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1\\ h\neq h_j}}D_h\tag{4.16}$$

et

$$D_5=\sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}}D_h-\sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq5}}D_h\tag{4.17}$$

ainsi que

$$D_3=\sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}}D_h-\sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq3}}D_h\tag{4.18}$$

et enfin, en utilisant également la relation (4.17),

$$\begin{aligned}D_7&=\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}}D_h-\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq7}}D_h=\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}}D_h-D_5-\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq5,7}}D_h\\&=\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}}D_h+\sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq5}}D_h-\sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}}D_h-\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq5,7}}D_h.\end{aligned}\tag{4.19}$$

On note bien que chacun des membres de droite des relations (4.16), (4.17), (4.18) et (4.19) ne fait intervenir aucune des variables D_{h_j} pour $h_j\in H_0\cup H_1$. On en déduit que $(D_h)_{h\notin H_0\cup H_1}$ forme une $\mathbb{Z}$-base de $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$. On considère alors $(e_h)_{h\notin H_0\cup H_1}$ la $\mathbb{Z}$-base duale de L vérifiant $e_h([D_\ell]) = \delta_{h,\ell}$ pour tous $(h,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$ et on notera $(z_h)_{h\notin H_0\cup H_1}$ les coordonnées de $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\mathbb{R})$ relatives à cette base. Le Lemme 4·1 entraîne que $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^\vee$ est donné par

$$\left\{(z_h)_{h\notin H_0\cup H_1} \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0})^{2^n-n} \;:\; \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_j(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1\\ h\neq h_j}} z_h \geqslant 0, \quad 4\leqslant j\leqslant n-1, \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h \geqslant 0, \quad \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 3}} z_h \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h + \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} z_h \geqslant 0. \end{array}\right\}$$

et le point (iv) du Lemme 4·1 entraîne que $\mathcal{H}$ a pour équation

$$n\sum_{\varepsilon_n(h)=1} z_h = 0,$$

équation qui ne fait intervenir aucune variable z_h pour $h \in H_0\cup H_1$. D'après (4.15) et en éliminant z_N, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)} = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant h\leqslant N-1} \mathrm{d}z_h}{n}$$

si bien que

$$\alpha(X_{0,n}) = \frac{1}{n}\int_\Delta \prod_{1\leqslant h\leqslant N-1} \mathrm{d}z_h$$

où Δ est défini par

$$\left\{(z_h)_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0})^{2^n-n-1} \;:\; \begin{array}{c} \displaystyle n\sum_{\substack{\varepsilon_n(h)=1\\ h\neq h_n}} z_h \leqslant 1, \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_j(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1\\ h\neq h_j}} z_h \geqslant 0 \qquad 4\leqslant j\leqslant n-1, \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h \geqslant 0, \quad \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 3}} z_h \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h + \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} z_h \geqslant 0. \end{array}\right\}.$$

Le changement de variables $t_h = nz_h$ pour tout $h \notin H_0\cup H_1\cup H_2$ fournit alors immédiatement le résultat escompté. □

4·1·6. *Construction du torseur versel associé à* W_n

Soit $n \geqslant 3$. Si l'on note

$$\mathcal{W}_n = \left\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{Z}^{2n} \;:\; \begin{array}{c} y_1y_2\cdots y_n \neq 0, \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ vérifie } (1.1) \end{array}\right\} \tag{4.20}$$

et

$$\mathcal{A}_n=\left\{\left(\mathbf{x}';(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)\in\mathbb{Z}^n\times(\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\})^{2^n-1}\ :\ \begin{array}{c}(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\quad \text{réduit},\\ z_h>0\ \text{ si }\ s(h)\geqslant 2,\\ \sum_{j=1}^n\left(\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_j(h)}\right)z_{2^{j-1}}x'_j=0\end{array}\right\},$$

la section 3.2 et en particulier la relation (3.32) permet d'obtenir le lemme suivant, qui coïncide avec [**3**, Lemma 7] dans le cas $n=3$.

Lemme 4·3. *L'application $\mathcal{A}_n\to\mathbb{Z}^{2n}$ définie par*

$$\left(\mathbf{x}';(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)\in\mathcal{A}_n\longmapsto\left(z_1x'_1,\dots,z_{2^{n-1}}x'_n,\prod_{1\leqslant h\leqslant N}z_h^{\varepsilon_1(h)},\dots,\prod_{1\leqslant h\leqslant N}z_h^{\varepsilon_n(h)}\right) \tag{4.21}$$

réalise une bijection de $\mathcal{A}_n$ sur $\mathcal{W}_n$.

C'est ce paramètrage de W_n qui nous a permis d'obtenir le Théorème 1·1. On explicite maintenant le torseur versel $\mathcal{T}$ associé à la résolution crépante $X_{0,n}$ explicitée en section 4.2 et on établit de façon analogue à [**3**] que ce paramètrage du problème de comptage est en réalité une descente sur ce torseur versel $\mathcal{T}$. La constante de Peyre s'interprétera alors à la manière de [**25**] et [**3**] comme un volume adélique de $\mathcal{T}$. On renvoie à la section 4.2 de [**3**] et au Lemme 4·1 pour un rappel concernant la notion de torseur versel et la justification qu'il n'existe, à isomorphisme près, qu'un seul torseur versel pour la variété $X_{0,n}$.

On suit ici le schéma de la démonstration dans le cas $n=3$ de [**3**]. La variété $X_{0,n}$ est une hypersurface de la variété $\Xi_0\subseteq\mathbb{P}^{2n-1}\times\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}^{(h)}\times\mathbb{P}^{(h)}$ définie par les équations (4.4), (4.5), (4.6) et (4.8). De la même façon que pour $X_{0,n}$, il est facile de voir que la restriction à Ξ_0 de la projection $\mathbb{P}^{2n-1}\times\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}^{(h)}\times\mathbb{P}^{(h)}\to\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}^{(h)}\times\mathbb{P}^{(h)}$ donne lieu à un morphisme $\gamma:\Xi_0\to B_{0,n}$ qui munit la variété Ξ_0 d'une structure de $\mathbb{P}^n$–fibration sur $B_{0,n}$. On commence, comme dans [**3**], à décrire le torseur versel de Ξ_0. Pour ce faire, on tire parti du lemme fondamental suivant.

Lemme 4·4. *La variété Ξ_0 est une variété torique projective lisse et déployée. Le tore associé est l'ouvert U de Ξ_0 défini par*

$$x_1\cdots x_ny_1\cdots y_n\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \varepsilon_i(h)=1}}Y_i^{(h)}Z_i^{(h)}\neq 0.$$

Démonstration.– On considère T_1 le tore déployé de dimension $2n-1$ défini comme le quotient du tore $\mathbb{G}_m^{2n}$ par le plongement diagonal de $\mathbb{G}_m$ dans $\mathbb{G}_m^{2n}$. Lorsque la multiplication sur U est donnée par la multiplication coordonnée par coordonnée, l'application

$$\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{Y}^{(h)};\mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)\in U\longmapsto[(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)]\in T_1$$

est un isomorphisme de réciproque

$$[(t_1,\dots,t_n,u_1,\dots,u_n)]\in T_1\longmapsto\left(t_1,\dots,t_n,u_1,\dots,u_n;\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{U}^{(h)};\frac{1}{\mathbf{U}^{(h)}}\right)\right)\in U,$$

avec

$$\mathbf{U}^{(h)}=\left(u_{i_1},\dots,u_{i_{s(h)}}\right)\quad\text{pour}\quad\varepsilon_{i_1}(h)=\cdots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1$$

et

$$\frac{1}{\mathbf{U}^{(h)}}=\left(\frac{1}{u_{i_1}},\dots,\frac{1}{u_{i_{s(h)}}}\right)\quad\text{pour}\quad\varepsilon_{i_1}(h)=\cdots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1.$$

Le tore $\mathbb{G}_m^{2n}$ agit sur Ξ_0 par multiplication coordonnée par coordonnée, le produit

$$(t_1,\dots,t_n,u_1,\dots,u_n).\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{Y}^{(h)};\mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)$$

étant donné par

$$\left(t_1x_1,\dots,t_nx_n,u_1y_1,\dots,u_ny_n;\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{u}\mathbf{Y}^{(h)};\frac{\mathbf{Z}^{(h)}}{\mathbf{u}}\right)\right),$$

avec

$$\mathbf{u}\mathbf{Y}^{(h)}=\left(u_{i_1}Y_{i_1}^{(h)},\dots,u_{i_{s(h)}}Y_{i_{s(h)}}^{(h)}\right)\quad\text{pour}\quad\varepsilon_{i_1}(h)=\cdots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1$$

et

$$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{Z}^{(h)}}=\left(\frac{Z_{i_1}^{(h)}}{u_{i_1}},\dots,\frac{Z_{i_{s(h)}}^{(h)}}{u_{i_{s(h)}}}\right)\quad\text{pour}\quad\varepsilon_{i_1}(h)=\cdots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1.$$

Cela fournit après passage au quotient une action $\rho : T\times\Xi_0\to\Xi_0$ dont la restriction à U donne la loi de groupe de T et cela permet de conclure que Ξ_0 est un variété torique projective de dimension $2n-1$. Elle est lisse puisqu'il s'agit d'un $\mathbb{P}^n$-fibré sur $B_{0,n}$. □

Comme dans [**3**], on utilise alors, le résultat de [**25**] suivant qui permet de décrire le torseur versel d'une variété torique déployée projective lisse. Le torseur versel $\mathcal{T}$ de Ξ_0 est ainsi donné par le morphisme de Cox de la sous-variété torique $\mathbb{A}^n\smallsetminus F$ de $\mathbb{A}^n$ dans Ξ_0 décrit dans [**12**] où n est le nombre de cônes de dimension un (appelés arêtes) de l'éventail Δ de Ξ_0 (voir [**14**] pour plus de détails à ce sujet) et $F\subseteq\mathbb{A}^n$ est le sous-ensemble fermé défini par les monômes $t^\sigma=\prod_{\rho\notin\sigma(1)}t_\rho$ où t_ρ est un système de coordonnées de $\mathbb{A}^n$ lorsque ρ décrit l'ensemble des arêtes de Δ, $\sigma\in\Delta$ est un cône maximal et $\sigma(1)$ est l'ensemble des arêtes de σ. On applique alors ce résultat pour en déduire la proposition suivante.

PROPOSITION 4·4. *Soit $\Omega\subset\mathbb{A}^{2^n+n-1}$ l'ouvert de coordonnées $\left(\mathbf{x};(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ défini par les conditions*

$$z_{h_n}\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}}z_h\neq0\quad\textit{ou}\quad x_i\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}}z_h\neq0\tag{4.22}$$

pour $i \in [\![1,n]\!]$ *et* $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$ *tel que* $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ *et*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}} = \left\{ h_{1,\mathbf{j}} = 2^{j_1 - 1} \preceq \cdots \preceq h_{k,\mathbf{j}} = \sum_{s=1}^{k} 2^{j_s - 1} \preceq \cdots \preceq h_{n,\mathbf{j}} = N \right\}.$$

Le morphisme $\varphi : \Omega \to \Xi_0$ *défini par*

$$\Big(\mathbf{x}; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\Big) \longmapsto \left(x_1, \dots, x_n, \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_1(h)=1}} z_h, \dots, \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \Big(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\Big) \right) \tag{4.23}$$

où

$$\mathbf{Y}^{(h)} = \left(\frac{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=1}} z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ h \preceq \ell}} z_\ell}, \dots, \frac{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=1}} z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ h \preceq \ell}} z_\ell} \right) \quad \textit{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\mathbf{Z}^{(h)} = \left(\frac{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=0}} z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}} z_\ell}, \dots, \frac{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=0}} z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}} z_\ell} \right) \quad \textit{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

est alors le morphisme sous-jacent d'un torseur versel pour Ξ_0.

Démonstration.– On renvoie à [**3**] et [**14**] pour les trois résultats rappelés ci-dessous. Soient Δ l'éventail associé à la variété torique Ξ_0 et σ un cône de Δ. On notera alors O_σ l'orbite associée à σ et $V(\sigma) = \overline{O_\sigma}$. On a alors les trois résultats suivants qui vont s'avérer essentiels.

- *(i)* Tout d'abord, il existe une bijection entre les arêtes ρ de Δ et les composantes irréductibles de $\Xi_0 \smallsetminus U$.
- *(ii)* Ensuite, il existe également une bijection entre les cônes maximaux σ de Δ et les points fixes de $\Xi_0 \smallsetminus U$ sous l'action de U.
- *(iii)* Enfin, pour $\sigma \in \Delta$ et $\rho \in \Delta$ une arête, on a l'équivalence suivante:

$$\rho \in \sigma(1) \quad \Longleftrightarrow \quad V(\sigma) \subseteq D_\rho$$

  où D_ρ est la composante irréductible de $\Xi_0 \smallsetminus U$ associée à ρ.

Dans le cas de Ξ_0, les composantes irréductibles de $\Xi_0 \smallsetminus U$ s'obtiennent de la même façon que dans la démonstration du Lemme 4·1. On a $2^n + n - 1$ composantes irréductibles. Les n premières que l'on notera X_i dans la suite et à qui on associera la coordonnée ξ_i sont définies par l'équation $x_i = 0$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. On a également D_N, associé à la coordonnée z_N, définie par l'équation $y_1 = \cdots = y_n = 0$. Enfin, pour tout $h \in [\![1, N-1]\!]$, on a D_h, associé à la coordonnée z_h, définie par les équations

$$\forall \ell \in [\![1,N]\!] \text{ tel que } \ell \not\preceq h \text{ et } \ell \not\preceq N-h : \left\{ \begin{array}{l} Y_i^{(\ell)} = 0 \text{ si } \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_i(h) = 1 \\ Z_j^{(\ell)} = 0 \text{ si } \varepsilon_j(\ell) = 1 \text{ et } \varepsilon_j(h) = 0. \end{array} \right.$$

On déduit alors de [**25**] et de la propriété *(i) supra* qu'il existe un plongement naturel du torseur versel $\mathcal{T}$ de Ξ_0 dans l'espace affine $\mathbb{A}^{2^n+n-1}$ de coordonnées $\left(\boldsymbol{\xi};(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$.

Au vue de l'action de U sur Ξ_0, un point P de $\Xi_0 \smallsetminus U$ est fixé par cette action si, et seulement si, son image a exactement une coordonnée non nulle par chacune des projections suivantes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{2n-1}\times \prod\limits_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}^{(h)}\times\mathbb{P}^{(h)} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{2n-1} \\ \left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;\prod\limits_{1\leqslant h\leqslant N}(\mathbf{Y}^{(h)};\mathbf{Z}^{(h)})\right) & \longmapsto & (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \end{array}$$

et pour tout $h\in[\![1,N]\!]$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{2n-1}\times \prod\limits_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}^{(h)}\times\mathbb{P}^{(h)} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{(h)} \\ \left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;\prod\limits_{1\leqslant h\leqslant N}(\mathbf{Y}^{(h)};\mathbf{Z}^{(h)})\right) & \longmapsto & \left(\mathbf{Y}^{(h)}\right) \end{array}$$

ainsi que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{2n-1}\times \prod\limits_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}^{(h)}\times\mathbb{P}^{(h)} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{(h)} \\ \left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;\prod\limits_{1\leqslant h\leqslant N}(\mathbf{Y}^{(h)};\mathbf{Z}^{(h)})\right) & \longmapsto & \left(\mathbf{Z}^{(h)}\right). \end{array}$$

On en déduit que pour point $\Xi_0\smallsetminus U$ fixé par l'action de U, soit il existe $j_n\in[\![1,n]\!]$ tel que $y_{j_n}\neq 0$ soit il existe $\ell\in[\![1,n]\!]$ tel que $x_\ell\neq 0$.

On admet à présent dans la suite de ce paragraphe que dès qu'un indice $i\in[\![1,n]\!]$ a été fixé tel que $Y_i^{(h)}\neq 0$ pour un certain $1\leqslant h\leqslant N$ donné, alors pour tous les autres indices j tels que $\varepsilon_j(h)=1$, on a $Y_j^{(h)}=0$.

Plaçons-nous pour commencer dans le cas où $y_{j_n}\neq 0$. On a alors nécessairement $Y_{j_n}^{(N)}\neq 0$ d'après (4.8) et plus généralement, pour tout $h\in[\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{j_n}(h)=1$, on a $Y_{j_n}^{(h)}\neq 0$ d'après (4.5). De plus, il existe $\ell_n\in[\![1,n]\!]\smallsetminus\{j_n\}$ tel que $Z_{\ell_n}^{(N)}\neq 0$ et plus généralement, pour tout $h\in[\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=1$, on a $Z_{\ell_n}^{(h)}\neq 0$ au vu de (4.4) et de (4.6). On a donc que pour tout $h\in[\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=\varepsilon_{j_n}(h)=1$, $Y_{j_n}^{(h)}\neq 0$ et $Z_{\ell_n}^{(h)}\neq 0$.

Intéressons-nous à présent aux $h\in[\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=1$ et $\varepsilon_{j_n}(h)=0$. Pour ces h, on a nécessairement $Z_{\ell_n}^{(h)}\neq 0$. On pose alors $h_{n-1,\mathbf{j}}=N-2^{j_n-1}$. Puisque P est fixé sous l'action de U, il existe $j_{n-1}\in[\![1,n]\!]\smallsetminus\{j_n,\ell_n\}$ tel que $Y_{j_{n-1}}^{(h_{n-1,\mathbf{j}})}\neq 0$ et plus généralement pour tout $h\in[\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=1$ et $h\preceq h_{n-1,\mathbf{j}}$, on a $Y_{j_{n-1}}^{(h)}\neq 0$ d'après (4.4) et (4.5). On construit alors en itérant ce procédé $h_{2,\mathbf{j}},\dots,h_{n-1,\mathbf{j}}$ ainsi que $j_1,\dots,j_{n-1}$ tel que pour tout $r\in[\![2,n-1]\!]$,

$$h_{r,\mathbf{j}}=N-\sum_{s=r+1}^{n}2^{j_s-1}=\sum_{s=1}^{r}2^{j_s-1}$$

et

$$Y_{j_r}^{(h)}\neq 0\quad \forall h\in [\![1,N]\!]\quad \text{tel que}\quad h\preceq h_{r,\mathbf{j}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{j_r}(h)=1$$

et $j_r\in [\![1,n]\!]\smallsetminus\{j_n,\dots,j_{r+1},\ell_n\}$ (ce qui est bien toujours possible).

Passons à présent aux cas des $h\in [\![1,N]\!]$ tels que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=0$ et $\varepsilon_{j_n}(h)=1$. Pour ces h, on a nécessairement $Y_{j_n}^{(h)}\neq 0$ et on note que tout $h\in [\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=0$ et $\varepsilon_{j_n}(h)=1$ vérifie $h\not\preceq \ell$ et $\ell\not\preceq h$ pour tout $\ell\in [\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{j_n}(\ell)=0$ et $\varepsilon_{j_{n-1}}(\ell)=1$. On pose alors $h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}}=N-2^{\ell_n-1}$. Il existe ainsi $\ell_{n-1}\in [\![1,n]\!]\smallsetminus\{j_n,\ell_n\}$ tel que $Z_{\ell_{n-1}}^{(h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}})}\neq 0$ et plus généralement pour tout $h\in [\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=0$ et $h\preceq h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}}$, on a $Z_{\ell_{n-1}}^{(h)}\neq 0$. On construit alors $h'_{3,\boldsymbol{\ell}},\dots,h'_{n-2,\boldsymbol{\ell}}$ ainsi que $\ell_3,\dots,\ell_{n-1}$ tel que pour tout $r\in [\![3,n-1]\!]$,

$$h'_{r,\boldsymbol{\ell}}=N-\sum_{s=r+1}^{n}2^{\ell_s-1}$$

et

$$Z_{\ell_r}^{(h)}\neq 0\quad \forall h\in [\![1,N]\!]\quad \text{tel que}\quad h\preceq h'_{r,\boldsymbol{\ell}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\ell_r}(h)=1$$

et $j_r\in [\![1,n]\!]\smallsetminus\{\ell_n,\dots,\ell_{r+1},j_n,j_{n-1}\}$. Ensuite si l'on pose $h'_{2,\boldsymbol{\ell}}=h'_{3,\boldsymbol{\ell}}-2^{\ell_{n-2}-1}$, alors on a $Y_{j_n}^{(h'_{2,\boldsymbol{\ell}})}\neq 0$ et $Z_{j_{n-1}}^{(h'_{2,\boldsymbol{\ell}})}\neq 0$ car les chiffres de $h'_{2,\boldsymbol{\ell}}$ sont exactement j_n et j_{n-1}.

Reste alors à traiter le cas des $h\in [\![1,N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h)=0$ et $\varepsilon_{j_n}(h)=0$. Puisqu'on a $h_{2,\mathbf{j}}\preceq h_{3,\mathbf{j}}\preceq\cdots\preceq h_{n-1,\mathbf{j}}$ et $h'_{2,\boldsymbol{\ell}}\preceq h'_{3,\boldsymbol{\ell}}\preceq\cdots\preceq h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}}$, il existe r et s tels que $h\preceq h_{r,\mathbf{j}}$ et $h\preceq h'_{s,\boldsymbol{\ell}}$ et $h\not\preceq h_{i,\mathbf{j}}$ pour $i>r$ et $h\not\preceq h'_{j,\boldsymbol{\ell}}$ pour $j>s$. Il s'ensuit alors que $Y_{j_r}^{(h)}\neq 0$ et $Z_{\ell_s}^{(h)}\neq 0$. Par construction, $h_{i,\mathbf{j}}$ et $h'_{j,\boldsymbol{\ell}}$ ne sont pas comparables pour la relation $\preceq$ pour $i,j\geqslant 3$. On en déduit finalement que P n'appartient pas aux composantes irréductibles D_h avec $h\in [\![1,N-1]\!]$ telles que

$$\begin{cases}\varepsilon_{j_n}(h)=1\\ \text{ou}\quad h\prec h_{n-1,\mathbf{j}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{j_{n-1}}(h)=1\\ \text{ou}\quad h\prec h_{n-2,\mathbf{j}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{j_{n-2}}(h)=1\\ \qquad\qquad \vdots\\ \text{ou}\quad h\prec h_{2,\mathbf{j}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{j_2}(h)=1\end{cases}\tag{4.24}$$

ou

$$\begin{cases}\varepsilon_{\ell_n}(h)=0\\ \text{ou}\quad h\prec h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\ell_{n-1}}(h)=0\\ \text{ou}\quad h\prec h'_{n-2,\boldsymbol{\ell}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\ell_{n-2}}(h)=0\\ \vdots\\ \text{ou}\quad h\prec h'_{3,\boldsymbol{\ell}}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\ell_3}(h)=0.\end{cases}\tag{4.25}$$

Les seuls $h\in [\![1,n]\!]\smallsetminus\{h_{2,\mathbf{j}},\dots,h_{n-1,\mathbf{j}}\}$ qui ne vérifient pas les conditions (4.24) sont les h tels que $\varepsilon_{j_2}(h)=\varepsilon_{j_2}(h)=\cdots=\varepsilon_{j_n}(h)=0$. En effet, les conditions $\varepsilon_{j_n}(h)=\cdots=\varepsilon_{j_{n-k+1}}(h)=0$ pour $k\in [\![1,n-1]\!]$ impliquent que $h\prec h_{k,\mathbf{j}}$. Il s'ensuit que $h=2^{\ell_n-1}$ et les conditions (4.24) entraînent que P n'appartient pas aux D_h tels que $h\notin\{2^{\ell_n-1},h_{2,\mathbf{j}},\dots,h_{n-1,\mathbf{j}}\}$.

Les conditions (4.25) ne sont pas vérifiées par un élément $h\in\{2^{\ell_n-1},h_2,\dots,h_{n-1}\}$. En effet, un tel élément vérifie $\varepsilon_{\ell_n}(h)=1$ et ne vérifie jamais $h\preceq h'_{k,\boldsymbol{\ell}}$ pour tout $k\in [\![3,n-1]\!]$. Ainsi les conditions (4.25) impliquent que le point P n'appartient pas à D_h pour $h \in [\![1, N-1]\!] \smallsetminus \{2^{\ell_n - 1}, h_2, \dots, h_{n-1}\}$.

Le cas où $x_\ell \neq 0$ se traite de façon parfaitement analogue. Le sous-ensemble exceptionnel défini dans [**12**] et dans la discussion précédant la proposition est donc donné par les monômes

$$z_{h_n} \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \quad \text{ou} \quad x_i \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0$$

pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$ tel que $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ et

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}} = \left\{ h_{1,\mathbf{j}} = 2^{j_1 - 1} \preceq \dots \preceq h_{k,\mathbf{j}} = \sum_{s=1}^{k} 2^{j_s - 1} \preceq \dots \preceq h_{n,\mathbf{j}} = N \right\}.$$

Par conséquent, $\mathcal{T} = \mathbb{A}^{2^n + n - 1} \smallsetminus F$ est bien l'ouvert Ω défini dans l'énoncé de la Proposition 4·4.

Grâce à la description du morphisme $\varphi : \mathcal{T} \to \Xi_0$ rappelée dans [**3**] dans leur preuve du lemme 10, on sait que la restriction de φ à $\mathbb{G}_m^{2^n + n - 1}$ est le morphisme de tores $\mathbb{G}_m^{2^n + n - 1} \to U$ dual du morphisme "diviseur" $\mathbb{Q}[U]^*/\mathbb{Q}^* \to \mathrm{Div}_{\Xi_0 \smallsetminus U}(\Xi_0)$, où $\mathrm{Div}_{\Xi_0 \smallsetminus U}(\Xi_0)$ désigne le groupe abélien libre des diviseurs de Ξ_0 à support dans $\Xi_0 \smallsetminus U$. Le groupe $\mathbb{Q}[U]^*/\mathbb{Q}^*$ est engendré par $x_1/y_n, \dots, x_n/y_n, y_1/y_n, \dots, y_{n-1}/y_n$. Puisqu'on a

$$\mathrm{div}(x_i) = X_i, \quad \mathrm{div}(y_i) = \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h) = 1}} D_h \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!]$$

ainsi que pour tout $h \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\mathrm{div}\left(Y_i^{(h)}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell) = 1}} D_\ell - \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ h \preceq \ell}} D_\ell \quad \text{pour} \quad \varepsilon_i(h) = 1$$

et

$$\mathrm{div}\left(Z_i^{(h)}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell) = 0}} D_\ell - \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_j(\ell) = 0 \text{ si } \varepsilon_j(h) = 1}} D_\ell \quad \text{pour} \quad \varepsilon_i(h) = 1,$$

on obtient aisément que la restriction de φ à l'ouvert dense de Ω sur lequel chacune des coordonnées est non nulle est bien donnée par (4.23) et on conclut alors par densité la démonstration de cette proposition. □

On déduit de la Proposition 4·4 le théorème suivant de manière analogue à [**3**].

THÉORÈME 4·2. *Avec les notations de la Proposition 4·4, soit $O \subset \mathbb{A}^{2^n + n - 1}$ la sous-variété ouverte définie par*

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i \left(\prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \neq h_n \\ s(h) \geqslant 2}} z_h^{1 - \varepsilon_i(h)} \right) = 0. \tag{4.26}$$

et les conditions

$$z_{h_n} \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \quad \textit{ou} \quad x'_i z_{2^{i-1}} \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \tag{4.27}$$

pour $i \in [\![1,n]\!]$ *et* $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ *tel que* $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ *et*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}}=\left\{h_{1,\mathbf{j}}=2^{j_1-1}\preceq\cdots\preceq h_{k,\mathbf{j}}=\sum_{s=1}^{k}2^{j_s-1}\preceq\cdots\preceq h_{n,\mathbf{j}}=N\right\}.$$

Le morphisme $\varphi_O : O \to X_{0,n}$ *défini par*

$$\left(\mathbf{x}';(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)\longmapsto\left(z_1x'_1,\dots,z_{2^{n-1}}x'_n,\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_1(h)=1}}z_h,\dots,\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_n(h)=1}}z_h;\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\left(\mathbf{Y}^{(h)};\mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)\quad(4.28)$$

où

$$\mathbf{Y}^{(h)}=\left(\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=1}}z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ h\preceq\ell}}z_\ell},\dots,\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=1}}z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ h\preceq\ell}}z_\ell}\right)\quad \textit{pour}\quad \varepsilon_{i_1}(h)=\cdots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1$$

et

$$\mathbf{Z}^{(h)}=\left(\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=0}}z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}}z_\ell},\dots,\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=0}}z_\ell}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}}z_\ell}\right)\quad \textit{pour}\quad \varepsilon_{i_1}(h)=\cdots=\varepsilon_{i_{s(h)}}(h)=1$$

est alors le morphisme sous-jacent d'un torseur versel pour $X_{0,n}$*.*

Démonstration.– On obtient grâce à la suite spectrale de Leray (voir [**3**]) le diagramme commutatif de $\mathfrak{g}$-modules triviaux suivants

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{B}_0) \arrow[r, "\overline{\gamma}^*"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \mathrm{Pic}(\overline{\Xi}_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{B}_0) \arrow[r, "\overline{\lambda}^*"] & \mathrm{Pic}(\overline{X}_0) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{g}=\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$, $\overline{\lambda}^* : \overline{X}_0 \to \overline{B}_0$ et $\overline{\gamma}^* : \overline{\Xi}_0 \to \overline{B}_0$ sont les morphismes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ provenant respectivement des fibrations $\lambda : X_{0,n} \to B_{0,n}$ et $\gamma : \Xi_0 \to B_{0,n}$. La flèche $\mathrm{Pic}(\overline{\Xi}_0) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}_0)$ est un isomorphisme et on a une suite exacte duale de $\mathbb{Q}$-tores algébriques

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow 1$$

avec T le tore dont le groupe des caractères est $\hat{T}=\mathrm{Pic}(\overline{\Xi}_0)=\mathrm{Pic}(\overline{X}_0)$ et S le tore dont le groupe des caractères est $\hat{S}=\mathrm{Pic}(\overline{B}_0)$. De la fonctorialité de la suite exacte (voir [**10**])

$$0 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathbb{Q},T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X_{0,n},T) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T},\mathrm{Pic}\left(\overline{X}_0\right)\right)$$

par rapport à $X_{0,n} \to \Xi_0$, il s'ensuit que le T-torseur versel pour Ξ_0 se restreint au sous-ensemble $\varphi^{-1}(X_{0,n}) \subseteq \Omega$ à un T-torseur versel pour $X_{0,n}$. Le sous-ensemble $\varphi^{-1}(X_{0,n})$ est défini par l'équation (4.4). Après avoir remarqué que (4.29) et (4.4) sont équivalentes lorsque (4·1·6) est vérifiée et en utilisant la Proposition 4·4, cette dernière prend la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left(\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}\right)=0. \tag{4.29}$$

À la manière de [**3**], on définit les n fonctions régulières $x_1',\dots,x_n'$ sur $\varphi^{-1}(X_{0,n})$. Sur l'ouvert

$$\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}\neq 0$$

pour $i\in[\![1,n]\!]$ fixé, on pose

$$x_i'=-\frac{\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\xi_j\left(\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\neq z_{2^{i-1}}}} z_h^{1-\varepsilon_j(h)}\right)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}}\quad\text{et}\quad x_j'=\frac{\xi_j}{z_{2^{j-1}}}\quad\text{pour}\quad j\in[\![1,n]\!]\smallsetminus\{i\}. \tag{4.30}$$

Si l'on impose de plus $z_{2^{i-1}}\neq 0$, alors on vérifie aisément que $x_i'=\frac{\xi_i}{z_{2^{i-1}}}$, ce qui assure que les définitions sur les différents ouverts lorsque i varie dans $[\![1,n]\!]$ sont compatibles et se recollent pour donner des fonctions régulières bien définies sur $\varphi^{-1}(X_{0,n})$. Cela permet de conclure la démonstration de la proposition sans difficulté. $\square$

On adapte alors la fin de la section 4 de [**3**] pour obtenir des informations sur les points entiers qui seront nécessaires afin de calculer le nombre de Tamagawa apparaissant dans la constante de Peyre. Soit $\underline{X_{0,n}}\subseteq\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{2n-1}\times\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{(h)}\times\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{(h)}$ défini par les équations (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8) et $\underline{\Xi_0}\subseteq\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{2n-1}\times\prod_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{(h)}\times\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{(h)}$ défini par les équations (4.4), (4.5), (4.6) et (4.8). D'après [**14**, pages 22-23], on peut étendre le morphisme $\varphi:\Omega\to\Xi_0$ de la Proposition 4·4 en un morphisme $\underline{\varphi}:\underline{\Omega}\to\underline{\Xi_0}$ entre deux schémas toriques puisque le morphisme de Cox provient d'un morphisme d'éventails. Les arguments utilisés lors de la démonstration de la Proposition 4·4 mais sur $\mathbb{Z}$ fournissent que $\underline{\Omega}$ est le sous-schéma de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{2^n+n-1}$ de coordonnées $\left(\mathbf{x},(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ défini par les conditions (4·1·6) et le morphisme $\underline{\varphi}:\underline{\Omega}\to\underline{\Xi_0}$ est défini par (4.23) est le morphisme sous-jacent d'un torseur $\underline{\varphi}_{\underline{\mathcal{T}}}:\underline{\mathcal{T}}\to\underline{\Xi_0}$ sous un tore déployé sur $\mathbb{Z}$ que l'on notera $\underline{T}\cong\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}^{2^n-n}$ avec $H^1_{\text{ét}}(\mathbb{Z},\underline{T})$. Ainsi il y a une bijection entre les $\underline{T}(\mathbb{Z})$-orbites de points entiers de $\underline{\Omega}$ et les points entiers de $\underline{\Xi_0}$ (voir [**3**] et [**21**, III.4.9] pour plus de détails). De même, en restreignant $\underline{\varphi}$ au fermé $\underline{O}=\underline{\varphi}^{-1}(\underline{X_{0,n}})$ de $\underline{\Omega}$ défini par l'équation (4.7), on peut également introduire des coordonnées $\left(\mathbf{x}';(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ telles que $\underline{O}$ soit le sous-schéma localement fermé de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{2^n+n-1}$ défini par (4.29) et (4.27). On obtient également un morphisme $\underline{\varphi}_{\underline{O}}:\underline{O}\to\underline{X_{0,n}}$ donné par (4.28). On dispose alors du lemme suivant qui permet d'obtenir la Proposition 4·5 *infra*, équivalente au Lemme 4·3. Mais avant de pouvoir établir cette Proposition 4·5, on a besoin du lemme auxiliaire suivant.

LEMME 4·5. *La condition de coprimalité*

$$\operatorname*{pgcd}_{\mathbf{j}}\left(\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h\right)=1 \tag{4.31}$$

où $\mathbf{j}$ *décrit tous les* n*-uplets* $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ *tel que* $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ *et*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}}=\left\{h_{1,\mathbf{j}}=2^{j_1-1}\preceq\cdots\preceq h_{k,\mathbf{j}}=\sum_{s=1}^{k}2^{j_s-1}\preceq\cdots\preceq h_{n,\mathbf{j}}=N\right\} \tag{4.32}$$

est équivalente au fait que le N*-uplet* $(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}$ *soit réduit.*

Démonstration.– Pour simplifier les notations, on notera dans toute cette démonstration

$$P_{\mathbf{j}}=\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h$$

pour $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$.

Supposons dans un premier temps que la condition de coprimalité suivante

$$\operatorname{pgcd}(P_{\mathbf{j}}\ :\ \mathbf{j})=1$$

pour $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ comme en (4.32)) est vérifiée et considérons h et ℓ deux éléments de $[\![1,N-1]\!]$ non comparables, c'est-à-dire tels que $h\npreceq\ell$ et $\ell\npreceq h$. Soit $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$. On constate alors que soit $z_h\mid P_{\mathbf{j}}$ soit $z_\ell\mid P_{\mathbf{j}}$. En effet, supposons que $z_h\nmid P_{\mathbf{j}}$. Alors $h\in\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$. Clairement tous les éléments de $\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ sont alors comparables à h si bien que $\ell\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ et ainsi $z_\ell\mid P_{\mathbf{j}}$ d'après la définition de $P_{\mathbf{j}}$. On en déduit par conséquent que la condition de coprimalité (4.31) implique que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant N\leqslant N}$ soit réduit.

Réciproquement, supposons que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant N\leqslant N}$ soit réduit. Raisonnons alors par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre premier p tel que $p\mid P_{\mathbf{j}}$ pour tout $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ comme en (4.32). En particulier, $p\mid P_{\{1,3,\dots,n-1,2\}}$ et par conséquent il existe $H_1\in[\![1,N-1]\!]$ tel que

$$\exists i\in[\![1,n]\!],\quad z_{H_1}\prec h_{i,\{1,3,\dots,n-1,2\}}.$$

Posons $k=s(H_1)$ et $c_1<c_2<\cdots<c_k$ les chiffres de H_1 en base 2. Il existe alors $(n-k)!k!$ facteurs $P_{\mathbf{j}}$ qui ne sont pas divisibles par z_{H_1}. En effet, il s'agit des $\mathbf{j}$ tels que $\{j_1,\dots,j_k\}=\{c_1,\dots,c_k\}$. Soit alors un tel $\mathbf{j}$. Puisque $p\mid P_{\mathbf{j}}$, il existe $H_2\in[\![1,N-1]\!]\smallsetminus\{H_1\}$ tel que $p\mid z_{H_2}$ et

$$\exists i\in[\![1,n]\!],\quad z_{H_2}\prec h_{i,\mathbf{j}}.$$

On a alors deux cas. Puisque $p\mid(z_{H_1},z_{H_2})$ et que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant N\leqslant N}$ est réduit, on en déduit que H_1 et H_2 sont comparables. Supposons alors par exemple que $H_2\prec H_1$ et posons $\ell=s(H_2)<k=s(H_1)$. Le nombre de termes $P_{\mathbf{j}}$ qui ne sont ni divisibles par z_{H_1} ni divisibles par z_{H_2} est de $(n-k)!(k-\ell)!\ell!$. En effet, il s'agit des $\mathbf{j}$ tels que $j_1,\dots,j_\ell$ soient les chiffres de H_2 et $j_{\ell+1},\dots,j_k$ soient les chiffres de H_1 qui ne sont pas des chiffres de H_2. Le cas $H_1\prec H_2$ se traite de façon analogue.

En itérant ce procédé, on construit $H_1,H_2,\dots,H_{n-1}\in[\![1,N]\!]^{n-1}$ tels que

$$\exists\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1},\quad H_{\sigma(1)}\prec H_{\sigma(2)}\prec\cdots\prec H_{\sigma(n-1)}$$

et tel que le seul facteur $P_{\mathbf{j}_0}$ qui ne soit divisible par aucun des z_{H_i} pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ soit le n-uplet $\mathbf{j}_0$ tel que j_1 soit l'unique chiffre de $H_{\sigma(1)}$ puis pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, j_i soit l'unique chiffre de $H_{\sigma(i)}$ qui ne soit pas un chiffre de $H_{\sigma(i-1)}$. On pose alors j_n tel que $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$. Puisque $p \mid P_{\mathbf{j}_0}$, il existe un facteur z_h de $P_{\mathbf{j}_0}$ tel que $p \mid z_h$. Montrons alors que pour tout facteur z_h de $P_{\mathbf{j}_0}$, il existe un $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que h et H_i ne soient pas comparables. Soit h tel que $z_h \mid P_{\mathbf{j}_0}$. On a alors que

$$z_h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}_0} = \left\{ H_{\sigma(1)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(k)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(n-1)} \prec N \right\}.$$

Si $h \not\prec H_{\sigma(n-1)}$, alors z_h et $z_{H_{\sigma(n-1)}}$ ne sont pas comparables. On peut donc supposer que $h \prec H_{\sigma(n-1)}$. On n'a alors que $h \not\succ H_{\sigma(n-2)}$ car il n'existe aucun $r \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $z_r \succ H_{\sigma(n-2)}$ et $z_r \prec H_{\sigma(n-1)}$. Si maintenant h et $H_{\sigma(n-2)}$ ne sont pas comparable, alors on a le résultat. On peut donc désormais supposer que $h \prec H_{\sigma(n-2)}$. Alors de même soit h et $H_{\sigma(n-3)}$ ne sont pas comparables soit $h \prec H_{\sigma(n-3)}$ et de proche en proche, ce raisonnement permet de conclure que dans tous les cas, il existe un $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que h et H_i ne soient pas comparables. On obtient donc finalement un

$$h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}_0} = \left\{ H_{\sigma(1)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(k)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(n-1)} \prec N \right\}$$

et un $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $p \mid (z_h, z_{H_i})$. Mais puisque h et H_i ne sont pas comparables, on a une contradiction et finalement, on a bien la condition de coprimalité (4.31). Cela conclut la démonstration de ce lemme. □

PROPOSITION 4·5. *Soit $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des $2^n + n - 1$-uplets $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$ tels que $x_i' \in \mathbb{Z}$, $z_h \in \mathbb{N}$ si $s(h) > 1$ et $z_h \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ si $s(h) = 1$ vérifiant la relation*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \neq h_n \\ s(h) \geqslant 2}} z_h^{1-\varepsilon_i(h)} \right) = 0. \tag{4.33}$$

ainsi que les conditions de coprimalité

$$\operatorname{pgcd}\left(z_{h_n}, x_1' z_1, \dots, x_n' z_{2^{n-1}}\right) = 1 \tag{4.34}$$

et que le N-uplet $(z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}$ est réduit. Alors, l'application $\mathcal{A}_0 \to \mathbb{Z}^{2n}$ définie par (4.21) est une bijection entre $\mathcal{A}_0$ et l'ensemble des solutions entières primitives de (1.1). De plus, dans ce cas, la condition (4.34) est équivalente à la condition pgcd$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 1$.

Démonstration.– La démonstration est très fortement inspirée de celle de [**3**, lemma 11]. Soit $\underline{W_n} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{2n-1}$ le sous-schéma défini par l'équation (1.1) et $\underline{f} : \underline{X_{0,n}} \to \underline{W_n}$ le morphisme induit par la projection

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{(h)} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{(h)} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{2n-1},$$

provenant de $f : X_{0,n} \to W_n$ après changement de base. On a alors des bijections naturelles $\underline{X_{0,n}}(\mathbb{Z}) = X_{0,n}(\mathbb{Q})$, $\underline{W_n}(\mathbb{Z}) = W_n(\mathbb{Q})$ et $X_{0,n}^{\circ}(\mathbb{Q}) = W_n^{\circ}(\mathbb{Q})$ pour $X_{0,n}^{\circ} \subseteq X_{0,n}$ et $W_n^{\circ} \subseteq \underline{W_n}$ les deux ouverts définis par les conditions $y_1 y_2 \cdots y_n \neq 0$. Si l'on considère à présent les ouverts $\underline{X_{0,n}}^{\circ} \subseteq X_{0,n}$ et $\underline{W_n}^{\circ} \subseteq W_n$ provenant respectivement de $X_{0,n}^{\circ} \subseteq X_{0,n}$ et $W_n^{\circ} \subseteq W_n$, il vient la bijection $\underline{X_{0,n}}^{\circ}(\mathbb{Z}) = \underline{W_n}^{\circ}(\mathbb{Z})$. Enfin, on pose $O^{\circ} \subseteq O$ l'ouvert défini par la condition

$$\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h \neq 0.$$

On introduit alors $\underline{O}^\circ(\mathbb{Z}) \subseteq \underline{O}(\mathbb{Z})$ correspondant à $O^\circ(\mathbb{Q}) \subseteq O(\mathbb{Q})$ et tel qu'on ait une bijection $\underline{O}^\circ(\mathbb{Z}) = O^\circ(\mathbb{Q})$. Comme $\varphi^{-1}(W_n^\circ) = O^\circ$, il s'ensuit une bijection entre $\overline{\underline{X_{0,n}}^\circ}$ et les $\underline{T}(\mathbb{Z})$-orbites de $\underline{O}^\circ(\mathbb{Z})$. L'application de $\underline{O}^\circ(\mathbb{Z})$ vers $\underline{W_n}^\circ(\mathbb{Z})$ s'obtient grâce à $\overline{\underline{f}\circ\underline{\varphi}}$ donnée par (4.28)

Un point $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \in \underline{O}^\circ(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, il vérifie (4.33) et (4.29) modulo p pour tout nombre premier p, ce qui est bien équivalent à (4.33), (4.31) et (4.34). On obtient alors les conditions de coprimalité de l'énoncé de la proposition grâce au Lemme 4·5. On identifie alors à présent l'ensemble $\underline{X_{0,n}}^\circ(\mathbb{Z}) = \underline{W_n}^\circ(\mathbb{Z})$ avec l'ensemble des $(2n-1)$-uplets de la forme $\pm(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ à coordonnées premières entre elles et vérifiant (1.1) et $y_1\cdots y_n \neq 0$. Chaque $\underline{T}(\mathbb{Z})$-orbites de $\underline{O}^\circ(\mathbb{Z})$ comporte $2^{\dim(T)} = 2^{2^n-n}$ éléments qui ne diffèrent que par le signe de certaines composantes. Soit $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \in \underline{O}^\circ(\mathbb{Z})$ vérifiant (4.31) et (4.34). D'après le Lemme 4·5, cela équivaut au fait que $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ vérifie les conditions (4.31) et que $(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}$ est réduit. On a alors

$$\underline{f}\circ\underline{\varphi} = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in \underline{W_n}^\circ(\mathbb{Z})$$

avec $\mathrm{pgcd}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = 1$. D'après les propriétés générales des torseurs (voir [**27**, Chapter 2]), on sait que la $\underline{T}(\mathbb{Z})$-orbites de $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ est la fibre du point $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$. D'après le Lemme 2·1, les points de cette fibre ne diffèrent que par leurs signes. Étudions alors combien de points de $\underline{O}^\circ(\mathbb{Z})$ appartiennent à cette fibre. On commence par fixer $x'_1,\dots,x'_n$, ce qui fixe $z_1,z_2,\dots,z_{2^{n-1}}$ et donne 2^n choix. Il s'agit alors de déterminer les signes possibles de $(z_h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ s(h)\geqslant 2}}$ tels que

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\qquad \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_i(h)=1,\ h\neq 2^{i-1}}} z_h$$

soit de signe prescrit. Autrement dit, on cherche le cardinal des $(i_h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ s(h)\geqslant 2}} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^n-n-1}$ tels que

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\qquad \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_i(h)=1,\ h\neq 2^{i-1}}} i_h \equiv k_i \pmod 2$$

pour $(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ fixé. On peut choisir librement dans la première équation tous les i_h tels que $s(h)\geqslant 2$ et $\varepsilon_1(h)=1$ excepté i_{N-1} qui est alors fixé par l'équation, ce qui laisse

$$\#\{h\in[\![1,N]\!]\ :\ \varepsilon_1(h)=1\} - 2 = 2^{n-1}-2$$

choix. De même, dans la deuxième équation, on peut choisir librement tous les i_h tels que $s(h)\geqslant 2$, $\varepsilon_1(h)=0$ et $\varepsilon_2(h)=1$ excepté i_{N-2} qui est alors fixé par l'équation, ce qui laisse

$$\#\{h\in[\![1,N]\!]\ :\ \varepsilon_2(h)=1,\ \varepsilon_1(h)=0\} - 2 = 2^{n-2}-2$$

choix. De manière analogue, on peut choisir comme cela librement dans l'équation $k\in$

$[\![1, n-2]\!]$, $2^{n-k}-2$ variables i_h librement tels que $s(h) \geqslant 2$ et $\varepsilon_k(h) = 1$, $\varepsilon_1(h) = \cdots = \varepsilon_{k-1}(h) = 0$. On constate alors que toutes les variables des deux dernières équations sont fixée excepté $i_{2^{n-2}+2^{n-1}}$. Il y a alors deux cas de figure, soit cette variable ne peut pas être fixée de sorte que les équations $n-1$ et n soient vérifiées, soit il existe une unique valeur de $i_{2^{n-2}+2^{n-1}}$ telle que les deux dernières équations $n-1$ et n soient vérifiées. De plus, cette variable peut être fixée si, et seulement si,

$$\sum_{\substack{\varepsilon_{n-1}(h)=1,\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\neq 2^{n-2}}} i_h \equiv \sum_{\substack{\varepsilon_{n-1}(h)=0,\ \varepsilon_n(h)=1\\ h\neq 2^{n-2}}} i_h \pmod 2$$

où les variables en question dans les deux sommes ci-dessus ne font jamais intervenir les variables i_h pour $h = N - 2^{i-1}$ et $i \in [\![1, n-2]\!]$. On obtient ainsi

$$\left(\sum_{k=1}^{n-2} \left(2^{n-k}-2\right)\right) - 1 = 2^n - 2n - 1$$

choix. Finalement, on aboutit à 2^{2^n-n-1} éléments au-dessus de $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. On obtient donc 2^{2^n-n} éléments au-dessus du point $\pm(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de $\underline{W_n}^{\circ}(\mathbb{Z})$.

Si on considère à présent, les points d'une $\underline{T}(\mathbb{Z})$-orbites de $\underline{O}^{\circ}(\mathbb{Z})$ tels que $z_h \in \mathbb{N}^*$ dès que $s(h) > 1$, on obtient exactement deux points dont toutes les coordonnées sont égales mis à part les $(z_{2^{i-1}})_{1\leqslant i\leqslant n}$ qui sont opposés. De plus, ces deux points ont pour images par $\underline{f} \circ \underline{\varphi}$ exactement $\pm(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Cela permet bien d'obtenir le résultat de la proposition. □

4·1·7. *Le nombre de Tamagawa* $\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right)$

Cette construction, de manière complètement analogue à la section 5 de [**3**], permet alors de construire explicitement le nombre de Tamagawa

$$\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right) = \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbb{R})) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n-n} \mu_p(X_{0,n}(\mathbb{Q}_p))$$

et ainsi d'obtenir l'expression conjecturale complète de la constante de Peyre. On obtient notamment les deux lemmes suivants dont on ne détaillera pas tous les détails des démonstrations ici lorsque ces derniers découlent *mutatis mutandis* des démonstrations de la section 5 de [**3**].

LEMME 4·6. *La densité archimédienne* $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbb{R}))$ *est donnée par*

$$\int_{N_v} \frac{dt_1 \cdots dt_{n-1}\, dt_{n+1} \cdots dt_{2n-1}}{|t_{n+1}\cdots t_{2n-1}|_v \max\left(|t_1|_v^n, \ldots, |t_{n-1}|_v^n, \left|\frac{t_1}{t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|_v^n, |t_{n+1}|_v^n, \ldots, |t_{2n-1}|_v^n\right)}.$$

LEMME 4·7. *Avec* $\underline{C}_n$ *la variété torique de Coxeter de* $\mathfrak{S}_n$, *on a*

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n-n} \mu_p(X_{0,n}(\mathbb{Q}_p)) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) \frac{\left|\underline{C}_n(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{n-1}}.$$

Démonstration.– La démonstration est inspirée de la section 5 de [**3**] et de l'Annexe. On déduit de [**3**, Lemma 19] l'égalité

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n}\mu_p(X_{0,n}(\mathbb{Q}_p))=\frac{|\underline{O}(\mathbb{F}_p)|}{p^{\dim(O)}}.$$

Pour déterminer $|\underline{O}(\mathbb{F}_p)|$, on utilise le fait que le $\underline{X_{0,n}}_{\mathbb{F}_p}$-torseur $\underline{O}_{\mathbb{F}_p}$ sous $\underline{T}_{\mathbb{F}_p}$ est trivial si bien que

$$|\underline{O}(\mathbb{F}_p)|=|\underline{T}(\mathbb{F}_p)|\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right|.$$

Les égalités

$$|\underline{T}(\mathbb{F}_p)|=(p-1)^{2^n-n}$$

et

$$\dim(O)=\dim(X_{0,n})+\dim(T)=\dim(X_{0,n})+\mathrm{rg}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\right)$$

fournissent alors

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbb{Z}_p)\right)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))}\frac{\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{\dim(X_{0,n})}}.$$

On utilise alors pour finir le fait que $X_{0,n}$ soit un $\mathbb{P}^{n-1}$-fibré sur la variété torique C_n pour aboutir à l'expression

$$\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right|=\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|\left|\underline{\mathbb{P}}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p)\right|=\frac{p^n-1}{p-1}\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|.$$

Il s'ensuit

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbb{Z}_p)\right)=(p-1)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)\frac{\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))+\dim(X_{0,n})-n}}.$$

Comme on a

$$\dim(X_{0,n})-n=2n-2-n=n-2=\dim(C_n)-1,$$

on aboutit bien au résultat annoncé

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbb{Z}_p)\right)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)\frac{\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{n-1}}.$$

□

4·2. *Transformation de la constante obtenue par le Théorème* 1·1

L'objet de cette partie est de réécrire la constante c_n fournie par le Théorème 1·1 afin de vérifier que son expression coïncide avec la forme conjecturée par Peyre et explicitée en section 4.2.

4·2·1. *Mise sous forme de produit eulérien de la quantité* $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$

Lorsque le $N-$uplet $\mathbf{z}$ est réduit, la variable z_N n'est sujette à aucune condition de coprimalité tandis que toutes les autres variables sont sujettes à au moins une condition de coprimalité. On note alors A l'ensemble des couples (k,ℓ) d'un $N-$uplet $\mathbf{z}$ réduit tels que $\mathrm{pgcd}(z_k,z_\ell)=1$ ainsi que $S=\{1,\ldots,N-1\}$ de sorte que $G=(S,A)$ définisse un graphe pour lequel on peut appliquer [**3**, theorem 5] afin d'écrire $F(\mathbf{1})$ défini en (3.27) sous la forme d'un produit eulérien. Cette étape est capitale dans l'optique de démontrer la conjecture de Peyre puisque cette dernière prédit que le nombre de Tamagawa intervenant dans la constante est de la forme

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n} P_n\left(\frac{1}{p}\right)$$

avec P_n un polynôme à coefficients entiers.

THÉORÈME 4·3 ([**3**, Theorem 5]). *Pour tout $U \subset A$, on définit* $\mathrm{ver}(U) \subset A$ *comme étant l'ensemble des sommets qui sont adjacents à au moins une arête de U. On a alors*

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \sum_{k=0}^{2^n-2} \frac{b_k}{p^k}$$

avec, pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2^n-2$,

$$b_k = \sum_{\substack{U\subset A\\ \mathrm{ver}(U)=k}} (-1)^{\#U}.$$

De plus, on a $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -\#A = -2^{n-1}(2^n+1)+3^n$ et la relation

$$\sum_{k=0}^{2^n-2} b_k = 0.$$

Démonstration– On renvoie au théorème 5 de la section 2 de [**3**] pour une preuve de ce résultat valable pour n'importe quel graphe $G=(S,A)$. La quantité $\#A$ s'obtient grâce à des arguments élémentaires de combinatoire. □

Il n'apparaît pas évident *a priori* de déterminer explicitement les valeurs de b_k pour $k \geqslant 2$ pour des valeurs de n quelconques ni de montrer directement que le polynôme $\sum_{k=0}^{2^n-2} b_k X^k$ admet 1 comme racine de multiplicité au moins 2^n-n-1, comme cela est prévue par la conjecture de Peyre. On donne alors le lemme suivant qui permet d'expliciter un peu plus le produit eulérien définissant $F(\mathbf{1})$.

LEMME 4·8. *On a*

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-1}\left(1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{(k+1)^n-k^n}{p^k}\right).$$

Démonstration– Par définition de F dans l'énoncé du Lemme 3·6 et au vu de (3.28), on a

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-1} G_p,$$

où, pour tout nombre premier p, on a posé

$$G_p = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_N)\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^N\\ \nu_i\nu_j=0 \text{ avec } (i,j)\in E_n}} \frac{1}{p^{\nu_1+\cdots+\nu_N}}.$$

En utilisant la bijection décrite en section 2 par le Lemme 2·1, on obtient, pour tout nombre premier p, l'égalité

$$G_p = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{p^{\max_j k_j}}.$$

On s'inspire alors des calculs effectués en fin de section 4 de [**7**]. On regroupe la somme en fonction de la valeur $k := \max_j k_j$. Posant $r_1 = \#\{j \in [\![1,n]\!] : k_j = k\}$ et $r_2 = \#\{j \in [\![1,n]\!] : 1 \leqslant k_j \leqslant k-1\}$, on aboutit à l'expression

$$G_p = 1 + \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ 1\leqslant r_1\leqslant n\\ 0\leqslant r_2\leqslant n-r_1}} \frac{\rho(k,r_1,r_2)}{p^k},$$

avec $\rho(k,r_1,r_2)$ le nombre de $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\#\{j \in [\![1,n]\!] : k_j = k\} = r_1$ et $\#\{j \in [\![1,n]\!] : 1 \leqslant k_j \leqslant k-1\} = r_2$. Or, on a

$$\rho(k,r_1,r_2) = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}(k-1)^{r_2}$$

si bien qu'il s'ensuit immédiatement que

$$G_p = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{(k+1)^n - k^n}{p^k},$$

concluant ainsi la démonstration du lemme. □

On dispose alors du lemme suivant qui montre que le rapport $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ est de la forme conjecturée par Peyre.

Lemme 4·9. *Il existe un polynôme P_n unitaire de degré $n-1$ tel que*

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1} P_n\left(\frac{1}{p}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme est défini par la relation

$$P_n(X) = (1-X)^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} (k+1)^n X^k. \tag{4.35}$$

Démonstration– Grâce à un changement d'indice, on déduit du Lemme 4·8 l'expression

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n} \sum_{k\geqslant 0} \frac{(k+1)^n}{p^k}.$$

Une récurrence fournit alors l'existence de P_n unitaire (palindromique) de degré $n-1$ tel que

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{(k+1)^n}{p^k} = \frac{P_n\left(\frac{1}{p}\right)}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n+1}},$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(X) = (1-X)^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} (k+1)^n X^k.$$

Les polynômes $(P_n)_{n\geqslant 1}$ vérifient la relation de récurrence

$$P_{n+1}(X) = (1+nX)P_n(X) + X(1-X)P_n'(X)$$

et $P_1(X) = 1$. Cela permet de conclure la preuve du lemme. □

4·2·2. *Lien entre la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ et le nombre de Tamagawa associé à $X_{0,n}$*

On a prouvé lors du Lemme 4·9 que

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1} P_n\left(\frac{1}{p}\right),$$

où

$$P_n(X) = (1-X)^{n+1}\sum_{k\geqslant 0}(k+1)^n X^k$$

est un polynôme à coefficients entiers. D'après les remarques faisant suite au théorème 2 de Salberger présentes en Annexe et de manière plus rigoureuse d'après [**28**, page 315] et le Lemme 4·7, on obtient que le facteur p-adique du nombre de Tamagawa est donné par

$$\mu_p(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1} F\left(\mathfrak{S}_n,\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^n}\right),$$

où $F(\mathfrak{S}_n,t)$ est la fonction d'excédance de $\mathfrak{S}_n$ définie dans [**28**]. D'après [**28**, page 315], on a

$$F(\mathfrak{S}_n,X) = (1-X)^{n+1}\sum_{k\geqslant 0}(k+1)^n X^k$$

si bien qu'on en déduit que $P_n = F(\mathfrak{S}_n,.)$. Ainsi,

$$\frac{F(\mathbf{1})}{\zeta(n)} = \prod_p \mu_p(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})). \tag{4.36}$$

Pour conclure le traitement du nombre de Tamagawa

$$\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right) = \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))\prod_p \mu_p(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})),$$

il reste à calculer la densité archimédienne. En utilisant le Lemme 4·6, on obtient l'expression suivante de $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_{n+1}\cdots\mathrm{d}t_{2n-1}}{|t_{n+1}\cdots t_{2n-1}|\max\left(|t_1|^n,\ldots,|t_{2n-1}|^n,\left|\frac{t_1}{t_{n+1}}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|^n,1\right)}. \tag{4.37}$$

On démontre alors le résultat suivant.

LEMME 4·10. *On a $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})) = nn!2^{n-1}\tilde{\beta}$, où $\tilde{\beta}$ a été défini en (3.29).*

Démonstration.– On part de l'expression (4.37) et on notera $I_\infty = \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ dans la suite de la démonstration. Il vient immédiatement que I_∞ est donnée par

$$2^{n-1}\int_{\substack{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}\\ t_{n+1},\ldots,t_{2n-1}\geqslant 0}} \frac{\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_{n+1}\cdots\mathrm{d}t_{2n-1}}{t_{n+1}t_{n+2}\cdots t_{2n-1}\max\left(|t_1|^n,\ldots,t_{2n-1}^n,\left|\frac{t_1}{t_{n+1}}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|^n,1\right)}.$$

On utilise alors l'identité

$$\forall s \geqslant 1, \qquad \frac{1}{s} = \int_{t \geqslant s} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

pour obtenir l'expression suivante de I_∞

$$2^{n-1} \int_{\substack{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \\ t_{n+1}, \dots, t_{2n-1} \geqslant 0}} \int_{t \geqslant \max\left(|t_1|^n, \dots, |t_{2n-1}|^n, \left|\frac{t_1}{t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|^n, 1\right)} \frac{\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n-1} \mathrm{d}t_{n+1} \cdots \mathrm{d}t_{2n-1} \mathrm{d}t}{t_{n+1} t_{n+2} \cdots t_{2n-1} t^2}.$$

Le changement de variables suivant

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{u_{2n}^n}, \\ t_i = \dfrac{u_i}{u_{2n}} \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, 2n-1]\!] \smallsetminus \{n\}, \end{cases}$$

de jacobien

$$\left| \det \begin{pmatrix} -\frac{n}{u_{2n}^{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{u_1}{u_{2n}^2} & \frac{1}{u_{2n}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}^2} & 0 & \cdots & \frac{1}{u_{2n}} \end{pmatrix} \right| = \frac{n}{u_{2n}^{3n-1}}$$

fournit alors que I_∞ est égale à

$$n 2^{n-1} \int_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n, \ u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}, u_{2n} \geqslant 0 \\ 1 \geqslant \max\left(|u_2|, \dots, u_{2n-1}, u_{2n}, u_{2n}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}} + \cdots + \frac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right|\right)}} \frac{\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1} \mathrm{d}u_{n+1} \cdots \mathrm{d}u_{2n-1} \mathrm{d}u_{2n}}{u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{2n-1}}.$$

Établissons à présent que l'on peut supposer que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \cdots \leqslant u_{2n}$ dans l'intégrale ci-dessus quitte à la mutliplier par un facteur $n!$. Pour toute permutation σ de $[\![n+1, 2n]\!]$, on notera

$$I_{\infty,\sigma} = \int_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n, \ 0 \leqslant u_{\sigma(n+1)} \leqslant \cdots \leqslant u_{\sigma(2n)} \\ 1 \geqslant \max\left(|u_1|, \dots, u_{2n-1}, u_{2n}, u_{2n}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}} + \cdots + \frac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right|\right)}} \frac{\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1} \mathrm{d}u_{n+1} \cdots \mathrm{d}u_{2n-1} \mathrm{d}u_{2n}}{u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{2n-1}}.$$

Si $\sigma(2n) = 2n$, il est facile de voir que le changement de variables

$$\begin{cases} v_i = u_{\sigma(n+i)-n} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ v_i = u_{\sigma(n+i)} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ v_{2n} = u_{2n} \end{cases} \tag{4.38}$$

est de jacobien

$$\left| \det \begin{pmatrix} P_{\tilde{\sigma}} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\tilde{\sigma}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \varepsilon(\tilde{\sigma})^2 = 1,$$

où $\tilde{\sigma}$ est la permutation de $[\![n+1, 2n-1]\!]$ induite par σ, $P_{\tilde{\sigma}}$ est la matrice de permutation associée à $\tilde{\sigma}$ et $\varepsilon(\tilde{\sigma})$ est la signature de la permutation $\tilde{\sigma}$. Ce changement de variables fournit alors la relation $I_{\infty,\sigma} = I_{\infty,\mathrm{Id}}$. Supposons à présent que $\sigma(2n) < 2n$. Dans ce cas, on considère $m = \sigma(2n) - n \in [\![1, n-1]\!]$. On effectue alors le changement de variables

$$\begin{cases} v_i = u_i \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, 2n-1]\!] \smallsetminus \{n, m\} \\ v_m = -u_{2n}\left(\dfrac{u_1}{u_{n+1}} + \dfrac{u_2}{u_{n+2}} + \cdots + \dfrac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right) \end{cases}$$

de jacobien $\frac{u_m}{u_{2n}}$. Il s'ensuit alors que $I_{\infty,\sigma}$ est égale à

$$\int_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^n,\ 0\leqslant v_{\sigma(n+1)}\leqslant\cdots\leqslant v_{\sigma(2n)} \\ 1\geqslant M}} \frac{\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_{n-1}\mathrm{d}v_{n+1}\cdots\mathrm{d}v_{2n-1}\mathrm{d}v_{2n}}{v_{n+1}\cdots v_{m-1}v_{m+1}\cdots v_{2n}}$$

avec

$$M = \max\left(|v_1|, \ldots, v_{2n}, v_{n+m}\left|\frac{v_1}{v_{n+1}} + \cdots + \frac{v_{m-1}}{v_{n+m-1}} + \frac{v_m}{v_{2n}} + \frac{v_{m+1}}{v_{n+m+1}} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{v_{2n-1}}\right|\right)$$

car

$$|u_m| = u_{n+m}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}} + \cdots + \frac{u_{m-1}}{u_{n+m-1}} + \frac{v_m}{u_{2n}} + \frac{u_{m+1}}{u_{n+m+1}} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{v_{2n-1}}\right|.$$

Par choix de m, on se retrouve alors à nouveau dans un cas où

$$v_{n+m} = \max\{v_{n+i}\ :\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

et un changement de variables similaire à (4.38) permet d'obtenir l'égalité $I_{\infty,\sigma} = I_{\infty,\mathrm{Id}}$ également dans ce cas et ainsi de conclure que pour toute permutation σ de $[\![n+1, 2n]\!]$, on a $I_{\infty,\sigma} = I_{\infty,\mathrm{Id}}$. Par conséquent, il vient l'expression suivante de $I_\infty/(n2^{n-1}n!)$

$$\int_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^n,\ 0\leqslant u_{n+1}\leqslant\cdots\leqslant u_{2n} \\ 1\geqslant\max\left(|u_1|,\ldots,u_{2n-1},u_{2n},u_{2n}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}}+\cdots+\frac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right|\right)}} \frac{\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\mathrm{d}u_{n+1}\cdots\mathrm{d}u_{2n-1}\mathrm{d}u_{2n}}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{2n-1}}. \tag{4.39}$$

On effectue alors le dernier changement de variables suivant, à $(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_{2n})$ fixés,

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{u_{2n}}{u_{n+1}} \\ v_i = \dfrac{u_{n+i-1}}{u_{n+i}} \quad \text{pour} \quad i \in [\![2, n-1]\!] \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_{2n}}{v_1} \\ u_{n+i} = \dfrac{u_{2n}}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant i} v_k} \quad \text{pour} \quad i \in [\![2, n-1]\!] \end{cases}$$

de jacobien

$$\frac{u_{2n}^{n-1}}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} v_k^{n-k+1}}.$$

En effet, la matrice jacobienne est dans ce cas une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux

$$-\frac{u_{2n}}{v_i^2 \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1} v_k}$$

pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Par conséquent, commme

$$\frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{2n-1}} = \frac{u_{2n}^{n-1}}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} v_k^{n-k}},$$

il s'ensuit que l'intégrale apparaissant dans (4.39) est égale à

$$\int_{\substack{0\leqslant v_1,\dots,v_{n-1}\leqslant 1\\ 1\geqslant \max(|u_1|,\dots,|u_{n-1}|,|u_1v_1+\cdots+u_1v_1\cdots v_{n-1}|)}}\int_{0\leqslant u_{2n}\leqslant v_1v_2\cdots v_{n-1}}\frac{\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_{n-1}\mathrm{d}u_{2n}}{v_1v_2\cdots v_{n-1}}.$$

Or, cette dernière intégrale est égale à $\tilde{\beta}$ après intégration par rapport à u_{2n}. Cela permet de conclure à l'égalité $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))=n!2^{n-1}n\tilde{\beta}$ et achève la démonstration du lemme. □

4·3. *Le dénouement*

Les Lemmes 4·10, 4·2, la relation (4.36) ainsi que le Théorème 1·1 impliquent alors que la constante $c_n=c_{\text{Peyre}}$ est en accord avec la prédiction de Peyre et cela achève la démonstration des conjectures de Manin et Peyre pour les hypersurfaces projectives W_n.

RÉFÉRENCES

[**1**] V. Batyrev et Y. Tschinkel : Manin's conjecture for toric varieties. *J. Algebraic Geom.,* **7**, 15-53, (1998).

[**2**] V. Blomer et J. Brüdern : The density of rational points on a certain threefold. *Contribution to analytic and algebraic number theory, Springer Proceedings in Mathematics 9 (eds V. Blomer and P. Mihailescu)*, 1-15, (2016).

[**3**] V. Blomer, J. Brüdern et P. Salberger : On a certain senary cubic form. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 108:911–964, (2014).

[**4**] V. Blomer, J. Brüdern et P. Salberger : The Manin-Peyre conjecture for a certain biprojective cubic threefold. *Preprint arXiv:1609.02837,* `https://arxiv.org/pdf/1609.02837v1.pdf`, (2016).

[**5**] P. Le Boudec : Manin's conjecture for two quartic del Pezzo surfaces with $3A_1$ and A_1+A_2 singularity types. *Acta Arithmetica,* **151**, 109-163, (2016).

[**6**] D. Bourqui : *Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques non déployées.* Memoirs of the American Mathematical Society volume 211. American Mathematical Society, 2011.

[**7**] R. de la Bretèche : Sur le nombre de matrices aléatoires à coefficients rationnels. *À paraître*, (2016).

[**8**] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : Sur les processus arithmétiques liés aux diviseurs. *Advances in Applied Probability,* Spec. Vol. **48A**, (2016), (volume en l'honneur de Bingham).

[**9**] A. Chambert-Loir et Y. Tschinkel : On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups. *Invent. Math.,* **148**, 421-452, (2002).

[**10**] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc : La descente sur les variétés rationnelles, II. *Duke Math. J.,* **54**, 375-492, (1987).

[**11**] C. De Concini et C. Procesi : Wonderful models of subspace arrangements. *Selecta Math. (N.S.),* **1**, 459-494, (1995).

[**12**] D.A. Cox : The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Alg. Geom.,* **4**, 17-50, (1995).

[**13**] J. Franke, Y. Manin et Y. Tschinkel : Rational points on bounded height on Fano varieties. *Inv. Math. J.* **54**, 375-492, (1987).

[**14**] W. Fulton : *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, (1993).

[**15**] P. Griffiths et J. Harrus : *Principles of algebraic geometry.* Wiley, New York, 1978.

[**16**] A. Grothendieck : *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, **32**, 361 pp, (1967).

[**17**] A. Grothendieck : Le groupe de Brauer, III. Exemples et compléments. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Advanced studies in Pure Mathematics* **3**, *North Holland publishing Company 11*, 88-188, (1968).

[**18**] R.R Hall : Sets of multiples. *Cambridge Tracts in Mathematics 118, Cambridge University Press, Cambridge*, (1996).

[**19**] R. Hartshorne : *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52 (Springer, Berlin, 1977), (2008).

[**20**] A. HENDERSON : Rational cohomology of the real Coxeter toric variety of type A. *Preprint* *https://arxiv.org/pdf/1011.3860v1.pdf*, (2010).

[**21**] J.S. MILNE : Étale cohomology. *Princeton university Press, Princeton,* **NJ**, (1980).

[**22**] E. PEYRE : Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.* **79**, (1995), 101-218.

[**23**] E. PEYRE : Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa. *J. Théor. Nombres Bordeaux,* **15**, (2003), 319-349. Les XXIIèmes Journées Arithmétiques (Lilles, 2001).

[**24**] M. REID : *Chapter on algebraic surfaces.* Complex algebraic varieties, IAS/Park City Mathematics Series 3 (Éd. J.Kollar; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997).

[**25**] P. SALBERGER : Tamagawa numbers of universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque* **251**, 91-258, (1998).

[**26**] I. SHPARLINSKI : Linear equations with rational fractions of bounded height and stochastic matrices. *À paraître au Quart. J. Math.*, 2016.

[**27**] A. SKOROBOGATOV : *Torsors and rational points*, volume 16. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[**28**] J.R. STEMBRIDGE : Eulerian numbers, tableaux, and the Betti variety of a toric variety. *Discrete Mathematics,* **99**, *North Holland*, 302-320, (1992).

[**29**] S. TANIMOTO et Y. TSCHINKEL : Height zeta functions of equivariant compactifications of semi-direct products of algebraic groups. *Contemp. Math.,* **566**, 119-157, (2012).

[**30**] G. TENENBAUM : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Troisième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.

Annexe : A crepant resolution for W_n

By PER SALBERGER

Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology, SE-412 96
Göteborg, Sweden salberger@chalmers.se

Subjclass : 11G35, 14G05, 14J40
Keywords : toric variety, crepant resolution

(*Received* 26 *January* 2017; *revised* 19 *January* 2018)

In a previous paper with Blomer and Brüdern [**BBS14**], we constructed a partial resolution $f_n : X_n \to W_n$ of the projective hypersurface $W_n \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$ $(n \geqslant 1)$ with homogeneous coordinates

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

defined by the equation

$$x_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n + x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots = x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0.$$

The variety $X_n \subseteq \mathbb{P}^{2n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ is the triprojective variety with trihomogeneous coordinates $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; Y_1, \ldots, Y_n; Z_1, \ldots, Z_n)$ defined by the following equations

$$\begin{cases} x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n = 0, & (1) \\ y_i Y_j - y_j Y_i = 0 \quad \text{for} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, & (2) \\ Y_1 Z_1 = \cdots = Y_n Z_n. & (3) \end{cases}$$

In [**BBS14**], we proved that the projection $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{P}^{2n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{2n-1}$ restricts to a birational projective morphism $f_n : X_n \to W_n$ which is *crepant.* We have thus $f_n^* \omega_{W_n} \cong \omega_{X_n}$.

We also showed for $n \geqslant 1$ in [**BBS14**] that the restriction of $\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_3 : \mathbb{P}^{2n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ to X_n gives rise to a morphism $\lambda_n : X_n \to B_n$ such that X_n is a $\mathbb{P}^{n-1}$–bundle over the biprojective variety $B_n \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ with bihomogeneous coordinates $(Y_1, \ldots, Y_n; Z_1, \ldots, Z_n)$ defined by the equations (3). Note that for $n = 1$, there is no equation and $B_1 = \mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^0$ is a point.

Hence, X_n is non-singular for $n \leqslant 3$ as B_n is non-singular for $n \leqslant 3$. We have thus a crepant desingularisation $f_n : X_n \to W_n$ for $n \leqslant 3$. But for $n > 3$, both B_n and X_n are singular. The aim of this note is to construct a crepant resolution $p_{0,n} : B_{0,n} \to B_n$ for all $n \geqslant 1$. This will give a crepant desingularisation $p_{X_n} : X_{0,n} = B_{0,n} \times_{B_n} X_n \to X_n$ by pulling back $\lambda_n : X_n \to B_n$ along $p_{0,n}$ and hence a crepant resolution $p_{X_n} \circ f_n : X_{0,n} \to$

W_n for all $n \geqslant 1$.

For non-empty subsets $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, we write $\mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^I$ for the biprojective space $\mathbb{P}^{k-1} \times \mathbb{P}^{k-1}$ with bihomogeneous coordinates

$$\left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) = \left(Y^I_{i_1}, \dots, Y^I_{i_k}; Z^I_{i_1}, \dots, Z^I_{i_k}\right)$$

and $B^I \subseteq \mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^I$ for the closed subvariety defined by

$$Y^I_{i_1} Z^I_{i_1} = \cdots = Y^I_{i_k} Z^I_{i_k}. \tag{4}$$

In particular, $B^I = B_n$ for $I = [n] := \{1, \dots, n\}$. We will never allow $I = \varnothing$ in this note. For products $\prod_{I \subseteq [n]} V^I$ of varieties indexed by $I \subseteq [n]$, it will thus be understood that $I \neq \varnothing$.

Now let $B_{0,n}$ be the closed subvariety of $\prod_{I \subseteq [n]} B^I$ defined by the equations

$$\begin{cases} Y^I_k Y^J_\ell = Y^I_\ell Y^J_k \quad \text{for} \quad k, \ell \in J \subsetneq I \subseteq [n] & (5) \\ Z^I_k Z^J_\ell = Z^I_\ell Z^J_k \quad \text{for} \quad k, \ell \in J \subsetneq I \subseteq [n] & (6) \end{cases}$$

There is an obvious morphism $p_{0,n} : B_{0,n} \to B_n$ defined by

$$\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) \longmapsto \left(\mathbf{Y}^{[n]}; \mathbf{Z}^{[n]}\right).$$

We shall also consider the Coxeter toric variety $C_n \subseteq \prod_{I \subseteq [n]} \mathbb{P}^I$ of $\mathfrak{S}_n$ with multihomogeneous coordinates $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right)$ defined by the equations (5). It follows from a result of De Concini and Procesi (see [**CP95**, Theorem 4.2] and [**Hen10**, Prop. 2.9]) that C_n is a non-singular projective irreducible toric variety of dimension $n-1$.

PROPOSITION 1. *Let $B^*_n \subsetneq B_n$ be the open subset where we do not have $Y_k = Z_k = 0$ for any $k \in [n]$ and $B^*_{0,n} = p^{-1}_{0,n}(B^*_n)$. Then*

(a) The morphism $pr_1 : B_{0,n} \to C_n$, which sends $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right)$ to $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right)$ is an isomorphism.

(b) $B_{0,n}$ is a non-singular projective irreducible toric variety.

(c) $B_{0,n} \smallsetminus B^*_{0,n}$ is of codimension at least two in $B_{0,n}$.

(d) $p_{0,n}$ is surjective and maps $B^*_{0,n}$ isomorphically onto B^*_n.

Proof.– (a) The morphism $\mathrm{pr}_1 : B_{0,n} \to C_n$ is dominant as any $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right) \in C_n$ with $Y^I_k \neq 0$ for all $I \subseteq [n]$ and $k \in I$ is the image of $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}$ with $Z^I_k = 1/Y^I_k$ for all $I \subseteq [n]$ and $k \in I$. As C_n is integral, it is thus enough to show that pr_1 is a closed immersion and since pr_1 is proper and finitely presented that pr_1 is injective (see [**Gro67**, prop 8.11.5]). That is, we have to show that $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Z}^I\right) \in \prod_{I \subseteq [n]} \mathbb{P}^I$ is uniquely determined by $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right) \in \prod_{I \subseteq [n]} \mathbb{P}^I$ for $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}$.

To show this, we use induction with respect to n. If $n = 1$, then pr_1 is just the projection of $\mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^0$ onto $\mathbb{P}^0$ and the assertion is trivial. So suppose $n > 1$ and that $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}$. Then $\mathbf{Z}^I \in \mathbb{P}^I$ is uniquely determined by $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right) \in \prod_{I \subseteq [n]} \mathbb{P}^I$ for any $I \neq [n]$ by the induction hypothesis. Also, if $Y^{[n]}_i = 0$ for some $i \in [n]$, then $Z^{[n]}_j = 0$ for some $j \in [n]$. If, say $Z^{[n]}_n = 0$, then $\left(\mathbf{Z}^{[n]}\right) = \left(Z^{[n-1]}_1, \dots, Z^{[n-1]}_{n-1}, 0\right)$ in $\mathbb{P}^{n-1}$ by (6). Finally, if $Y^{[n]}_i \neq 0$ for all $i \in [n]$, then $\left(\mathbf{Z}^{[n]}\right) = \left(1/Y^{[n]}_1, \dots, 1/Y^{[n]}_n\right) \in$

$\mathbb{P}^{[n]}$. Hence $\left(\mathbf{Z}^{[n]}\right)$ is uniquely determined by $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I\right)$ also for points on $B_{0,n}$.

(b) This follows from *(a)* and the above result for the Coxeter variety C_n due to De Concini and Procesi [**CP95**].

(c) It suffices to show that the closed subset $F_k \subseteq B_{0,n}$ defined by the equations $Y_k^{[n]} = Z_k^{[n]} = 0$ is of codimension at least 2 in $B_{0,n}$ for all $k \in [n]$. But for such points in $B_{0,n}$, we see from (5) and (6), that $Y_k^I = Z_k^I = 0$ for all $I \subseteq [n]$ where $k \in I$ and $\#I \geqslant 2$. The projection from F_k to $\prod_{I\subseteq[n]\smallsetminus\{k\}} B^I$ is thus a closed immersion and, by *(a)*, isomorphic to a proper variety of the $(n-2)-$dimensional Coxeter subvariety of $\prod_{I\subseteq[n]\smallsetminus\{k\}} \mathbb{P}^I$ defined by (5) and (6) for $J \subsetneq I \subseteq [n] \smallsetminus \{k\}$. This proves that $\dim(F_k) \leqslant n-3$.

(d) It is clear that the open subset of $B_{0,n}$ with $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]} \neq 0$ is mapped isomorphically onto the open subset of B_n with $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]} \neq 0$ as $\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right) \in \mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^I$ is the projection of $\left(\mathbf{Y}^{[n]};\mathbf{Z}^{[n]}\right) \in \mathbb{P}^{[n]}\times\mathbb{P}^{[n]}$ for any $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}$ with $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]} = \cdots = Y_n^{[n]}Z_n^{[n]} \neq 0$. Hence $p_{0,n}\left(B_{0,n}^*\right)$ is dense in B_n^*. It is thus just as in *(a)* enough to show that the map from $B_{0,n}^*$ to B_n^* is injective. As we have already seen that $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}$ is uniquely determined by $\left(\mathbf{Y}^{[n]};\mathbf{Z}^{[n]}\right) \in \mathbb{P}^{[n]} \times \mathbb{P}^{[n]}$ if $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]} \neq 0$, suppose instead that $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]} = 0$. We may then, if $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}^*$, find a partition $[n] = J \cup K$ such that $Y_j^{[n]} = 0$ if, and only if, $j \in J$ and $Z_k^{[n]} = 0$ if, and only if, $k \in K$. It now follows from (5) and (6) that $\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right) \in \mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^I$ is uniquely determined by $\left(\mathbf{Y}^{[n]};\mathbf{Z}^{[n]}\right)$. If I is not contained in J, then $\mathbf{Y}^I \in \mathbb{P}^I$ is just the projection of $\mathbf{Y}^{[n]}$ and if $I \subseteq J$, then $\mathbf{Y}^I \in \mathbb{P}^I$ is represented by a tuple obtained by inverting the I-coordinates of $\mathbf{Z}^{[n]}$. Similarly, if I is not contained in K, then $\mathbf{Z}^I \in \mathbb{P}^I$ is just the projection of $\mathbf{Y}^{[n]}$ and if $I \subseteq K$, then $\mathbf{Z}^I \in \mathbb{P}^I$ is given by a tuple obtained by inverting the I-coordinates of $\mathbf{Y}^{[n]}$. This completes the proof. □

We now pull back the $\mathbb{P}^{n-1}$–bundle $\lambda_n : X_n \to B_n$ along $p_{0,n} : B_{0,n} \to B_n$. This gives us a $\mathbb{P}^{n-1}$–bundle $\lambda_{0,n} : B_{0,n} \times_{B_n} X_n \to B_{0,n}$. One can also describe $X_{0,n}$ more directly. It is the closed subvariety $X_{0,n} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1} \times \prod_{I\subseteq[n]} \mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^I$ with multihomogeneous coordinates

$$\left(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n;\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\right)$$

defined by (4), (5), (6) and (7) and (8) below

$$\begin{cases} x_1Z_1^{[n]} + \cdots + x_nZ_n^{[n]} = 0, & (7)\\ y_iY_j^{[n]} - y_jY_i^{[n]} = 0 \quad \text{for} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n. & (8)\end{cases}$$

Theorem 1. *The projection* $p_{X_n} : X_{0,n} = B_{0,n} \times_{B_n} X_n \to X_n$ *which sends*

$$\left(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n;\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\right) \longmapsto \left(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n;\mathbf{Y}^{[n]};\mathbf{Z}^{[n]}\right)$$

is a crepant desingularisation of X_n.

Proof.– The variety $X_{0,n}$ is non-singular as it is a $\mathbb{P}^{n-1}$–bundle over a non-singular variety $B_{0,n}$. It is also clear from the Proposition 1 that the open subset $X_{0,n}^* = \lambda_{0,n}^{-1}\left(B_{0,n}^*\right) \subseteq X_{0,n}$ is mapped isomorphically onto the open subset $X_n^* = \lambda_n^{-1}\left(B_n^*\right) \subseteq X_n$. Therefore, the restrictions of $\omega_{X_{0,n}}$ and $p_{X_n}^*\omega_{X_n}$ to $X_{0,n}^*$ are isomorphic. By the Proposition 1, we have also that $X_{0,n} \smallsetminus X_{0,n}^*$ is of codimension at least two in $X_{0,n}$ and hence the restriction from $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ to $\mathrm{Pic}\left(X_{0,n}^*\right)$ is injective (see proposition 6.5b and corollary II.6.16 in [**Har08**]). Hence $\omega_{X_{0,n}}$ and $p_{X_n}^*\omega_{X_n}$ are canonically isomorphic invertible sheaves on $X_{0,n}$. □

Remark.– If $n \leqslant 3$, then p_{X_n} is an isomorphism as $p_{0,n}$ is an isomorphism for such n.

We can now derive the main theorem of this note.

THEOREM 2. *Let $n \geqslant 1$ and $W_n \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$ be the projective hypersurface defined by the following equation*

$$x_1y_2\cdots y_{n-1}y_n + x_2y_1y_3\cdots y_n + \cdots = x_ny_1y_2\cdots y_{n-1} = 0.$$

Let $X_{0,n} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1} \times \prod_{I\subseteq[n]}\mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^I$ be the closed subvariety with multihomogeneous coordinates

$$\left(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n;\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\right)$$

defined by the equations (4), (5), (6), (7) and (8). Then the projection $pr_1 : \mathbb{P}^{2n-1} \times \prod_{I\subseteq[n]}\mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}^{2n-1}$ restricts to a morphism $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ which is a crepant resolution of singularities of W_n. Moreover, $X_{0,n}$ is a $\mathbb{P}^{n-1}$–bundle over a variety $B_{0,n}$ isomorphic to the Coxeter toric variety C_n of $\mathfrak{S}_n$.

Proof.– The map $f_{0,n}$ is the composition of $p_{X_n} : X_{0,n} \to X_n$ and $f_n : X_n \to W_n$. We proved in [**BBS14**] that f_n is birational and crepant. We thus obtain the desired result by combining the results on f_n and X_n in [**BBS14**] with the results on p_{X_n} and $X_{0,n}$ from the Theorem 1. □

Remarks.– By (a slight generalisation of) Manin's conjecture, we expect as a consequence of the Theorem 2 that we have $\mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\right) - 1 = \mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(B_{0,n})\right) = \mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(C_n)\right)$ log factors in the asymptotic formula for the counting function on the open subset of W_n with $y_1y_2\cdots y_{n-1}y_n \neq 0$.

We also expect that the constant in the main term of this asymptotic formula is given by Peyre's Tamagawa constant for $X_{0,n}$, which is interpreted as an adelic volume of the universal torsor $\boldsymbol{T}_0$ over $X_{0,n}$ in [**Sal98**]. The p-adic factor of Peyre's Tamagawa constant should thus be

$$\frac{\#\boldsymbol{T}_0\left(\mathbb{F}_p\right)}{\dim\left(\boldsymbol{T}_0\right)} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))}\frac{\#X_{0,n}\left(\mathbb{F}_p\right)}{p^{\dim(X_{0,n})}} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(C_n))}\frac{\#C_n\left(\mathbb{F}_p\right)}{p^{\dim(C_n)}}\left(1-\frac{1}{p^n}\right).$$

Here clearly, $\dim(C_n) = n-1$. The invariants $\mathrm{Pic}(C_n)$ and $\#C_n\left(\mathbb{F}_p\right)$ for the Coxeter toric variety C_n are also known and may be found in [**Ste92**]. We have

$$\mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(C_n)\right) = 2^n - n - 1$$

as $\mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(C_n)\right)$ is equal to the second Betti number of C_n and

$$\#C_n\left(\mathbb{F}_p\right) = F\left(\mathfrak{S}_n, p\right)$$

where $F\left(\mathfrak{S}_n, t\right)$ is the symmetric polynomial of degree $n-1$ in t given by the associated excedance function [**Ste92**, pages 311 and 316]. Recall here that the excedance number of any $w \in \mathfrak{S}_n$ is the quantity $e(w) = \#\{i \in [n] \ : \ w(i) > i\}$ (see [**Ste92**, page 309]).

Examples.– In $\mathfrak{S}_3$, we have $e(\mathrm{Id}) = 0$, $e((12)) = 1$, $e((13)) = 1$, $e((23)) = 1$, $e((132)) = 1$ and $e((123)) = 2$. The generating excedance function $F\left(\mathfrak{S}_3, t\right)$ is thus $1 \times t^0 + 4 \times t^1 + 1 \times t^2 = 1 + 4t + t^2$ and $\#C_3\left(\mathbb{F}_p\right) = 1 + 4p + p^2$.
For $n = 3$, we thus expect $\mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(C_3)\right) = 2^3 - 4 = 4$ log factors and the $p-$adic factor

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^3}\right)$$

in the main term.

In $\mathfrak{S}_4$, we have:

- $e(\mathrm{Id}) = 0$;
- For σ one of the six transpositions or $\sigma = (132)$, (142), (143) or (1432), one has $e(\sigma) = 1$;
- For σ a product of two disjoint transpositions, a three cycle distinct from (132), (142) and (143) and a four cycle distinct from (1234), one hase $e(\sigma) = 2$;
- $e((1234)) = 3$.

So $F\left(\mathfrak{S}_4, t\right) = 1 + 11t + 11t^2 + t^3$ and $\#C_4\left(\mathbb{F}_p\right) = 1 + 11p + 11p^2 + p^3$.
For $n = 4$, we thus expect $\mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(C_4)\right) = 2^4 - 5 = 11$ log factors and the $p-$adic factor

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{11} \left(1 + \frac{11}{p} + \frac{11}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right)\left(1 - \frac{1}{p^4}\right)$$

in the main term.

Similarly, for $n = 5$, we expect $\mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(C_5)\right) = 2^5 - 6 = 26$ log factors and the $p-$adic factor

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{26} \left(1 + \frac{26}{p} + \frac{66}{p^2} + \frac{26}{p^3} = \frac{1}{p^4}\right)\left(1 - \frac{1}{p^5}\right)$$

in the main term.

Remarks.– The odd Betti numbers vanish for any smooth projective toric variety. We have thus by the Weil conjectures (see [**Har08**, Appendix]) that

$$\#C_n\left(\mathbb{F}_p\right) = \beta_{2(n-1)}p^{n-1} + \beta_{2(n-2)}p^{n-2} + \cdots + \beta_2 p + \beta_0$$

and that

$$F\left(\mathfrak{S}_n, t\right) = \beta_{2(n-1)}t^{n-1} + \beta_{2(n-2)}t^{n-2} + \cdots + \beta_2 t + \beta_0$$

where $\beta_i = \dim\left(H^i\left(C_n(\mathbb{C})_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}\right)\right)$ is the i-th Betti number of C_n. In [**Ste92**], Stembridge gives thus a combinatorial interpretation of the Betti numbers of Coxeter toric varieties in terms of the excedance function of $\mathfrak{S}_n$.

For more background on the cohomology of toric varieties, see also [**Ful93**, section 4.5].

REFERENCES

[**BBS14**] V. Blomer, J. Brüdern, and P. Salberger. On a certain senary cubic form. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 108:911–964, (2014).

[**CP95**] C. De Concini and C. Procesi. Wonderful models of subspace arrangements. *Selecta Math. (N.S.),* **1**, 459-494, (1995).

[**Ful93**] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, (1993).

[**Gro67**] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, **32**, 361 pp, (1967).

[**Har08**] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52 (Springer, Berlin, 1977), (2008).

[**Hen10**] A. Henderson. Rational cohomology of the real Coxeter toric variety of type A. *Preprint* `https://arxiv.org/pdf/1011.3860v1.pdf`, (2010).

[**Sal98**] P. Salberger. Tamagawa numbers of universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque* **251**, 91-258, (1998).

[**Ste92**] J.R. Stembridge. Eulerian numbers, tableaux, and the Betti variety of a toric variety. *Discrete Mathematics,* **99**, *North Holland*, 302-320, (1992).