
DESCRIPTION DE TORSEURS QUASI-VERSELS POUR UNE FAMILLE DE SURFACES FIBRÉES EN CONIQUES

par

Kevin Destagnol

Abstract. — Generalising work of La Bretèche, Browning and Peyre [BBP12] and of the author [Des16b], we describe the geometry required by Manin’s principle and Peyre’s conjecture for a family of conic bundle surfaces defined over \mathbf{Q} containing Châtelet surfaces. These surfaces $S_{a,F}$ are the conic bundle surfaces obtained as smooth minimal proper model of

$$Y^2 - aZ^2 = F(X, 1)$$

with $a \in \mathbf{Z}$ squarefree and $F \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$ a binary form of *even* degree n without repeated roots and whose irreducible factors over \mathbf{Q} remain irreducible over $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. In particular, we give the α and β factors of Peyre’s constant for these surfaces $S_{a,F}$. Then, using the formalism of generalised Cox rings developed by Pieropan and Derenthal ([DP14] and [Pie15]), we find a Cox ring of identity type for the surfaces $S_{a,F}$ over $\overline{\mathbf{Q}}$ allowing us to construct explicitly an (infinite) family of versal torsors $\pi_\gamma : \mathcal{T}_\gamma \rightarrow S_{a,F}$ above $S_{a,F}$ such that

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\gamma} \pi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Z})).$$

Then, using the previously constructed Cox ring of identity type, we describe, up to isomorphism, every Cox ring for $S_{a,F}$ of injective type $\lambda : \text{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \text{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))) \hookrightarrow \text{Pic}(S_{a,F})$. Finally, we give an explicit description of torsors above $S_{a,F}$ of type λ for every $a \neq 0$ and obtain, for $a \neq 0$ squarefree such that $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ has class number one, a finite family of such torsors $\pi_j : \mathcal{T}_j \rightarrow S_{a,F}$ such that

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_j \pi_j(\mathcal{T}_j(\mathbf{Z}))$$

yielding a nice expression of the Tamagawa factor of Peyre’s constant. We also show that these torsors of type λ are the torsors used in every known proof of the Manin and Peyre’s conjectures for Châtelet surfaces ([BBP12], [BB12], [BT13], [Des16b]) and complete the verification of Peyre’s conjecture in [BT13] in the case of two non proportional quadratic factors irreducible over $\mathbf{Q}(i)$.

Finally, it opens the way for new proofs of Manin and Peyre’s conjectures for the family of conic bundle surfaces under consideration, and especially in the case of Châtelet surfaces, in infinitely many cases that are work in progress of the author.

Sommaire

1. Introduction et résultats	2
1.1. Introduction	2
1.2. Résultats	4
2. Géométrie des surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$	5
2.1. Quelques réductions	5
2.2. Calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$	6
3. Arithmétique des surfaces $S_{a,F}$	10
4. Les toreseurs versels	10
4.1. L’anneau de Cox de type identité sur $\overline{\mathbf{Q}}$	10
4.2. Description des toreseurs versels	12
4.3. Exemples	17
4.3.1. Le cas des surfaces de Châtelet de type $L_1L_2L_3L_4$	17
4.3.2. Le cas des surfaces de Châtelet de type L_1L_2Q	17

Classification mathématique par sujets (2010). — 11D45, 11D57, 14G05.

Mots clefs. — conjecture de Manin, constante de Peyre, méthodes de descente, toreseurs quasi-versels.

4.3.3. Le cas des surfaces de Châtelet de type Q_1Q_2	17
4.3.4. Un cas de surface de Châtelet LC	18
4.3.5. Un cas de surface de Châtelet F	19
4.3.6. Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F scindé du type $L_1L_2\dots L_n$	19
4.3.7. Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F du type $Q_1Q_2\dots Q_{n/2}$	20
5. Les toseurs de type $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$	20
5.1. Description de $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$	21
5.2. Le cas des surfaces de Châtelet avec $a = -1$ et $F = Q_1Q_2$	29
6. Appendice : Les entiers a tels que $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit de nombre de classes égal à 1	30
Références	31

1. Introduction et résultats

1.1. Introduction. — La méthode de descente sur des toseurs a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS77], [CTS79] et [CTS87] dans les années 1980 afin d'étudier des problèmes divers concernant les points rationnels : existence de points rationnels, principe de Hasse, approximation faible, densité des points rationnels... Les meilleurs candidats pour effectuer une descente afin d'étudier les points rationnels sont les *toseurs versels*. En effet, pour V une variété définie sur \mathbf{Q} , lisse, géométriquement intègre vérifiant $H_{\text{ét}}^0(V, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}^*$ et $\text{Pic}(\bar{V})$ de type fini, \mathcal{T} un toseur versel pour V et \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} (qui existe d'après [CTHS05]), alors les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible éventuelles disparaissent pour \mathcal{T}^c [CTS87, Théorème 2.1.2]. Une autre classe importante de toseurs qui partagent un certain nombre de propriétés importantes des toseurs versels est celle des *toseurs quasi-versels* où par toseur quasi-versel, on entend toseur de type $\lambda : \text{Pic}(V_K) \hookrightarrow \text{Pic}(\bar{V})$ pour une extension galoisienne K de \mathbf{Q} sur laquelle V est rationnelle avec la terminologie de [CTS87]. En effet, si K est une extension galoisienne sur laquelle V est rationnelle et $V(K) \neq \emptyset$, alors pour les toseurs quasi-versels de type $\lambda : \text{Pic}(V_K) \hookrightarrow \text{Pic}(\bar{V})$ les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible éventuelles disparaissent sur une compactification lisse. Dans toute la suite de cet article, on ne s'intéressera ainsi plus qu'à des toseurs quasi-versels.

C'est Salberger [Sal98] qui a le premier utilisé une méthode de descente sur les toseurs versels afin d'étudier le principe de Manin dans le cadre des variétés toriques propres, lisses et déployées sur le corps \mathbf{Q} . Depuis cet exemple, de nombreux cas du principe de Manin et de la conjecture de Peyre ont été obtenus par une méthode de descente similaire. On renvoie par exemple à l'introduction de [Le 16] pour une liste représentative mais non exhaustive de ces cas pour les surfaces et à l'introduction de [Des16a] pour un état des lieux en dimension supérieure.

À l'instar de cet exemple, la plupart des cas où le principe de Manin a été obtenu par cette méthode de descente sur des toseurs versels l'a été dans le cas de variétés déployées, c'est-à-dire telles que l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique soit triviale. Mais dans ces cas-là, la géométrie derrière la descente n'est en général pas explicitée et la paramétrisation ou le passage au(x) toseur(s) est établi de manière *ad hoc*. On peut malgré tout citer quelques exceptions notables dont le cas de certaines surfaces de Châtelet ([BB08] et [BT13]) ou encore le cas d'une surface de del Pezzo singulière de degré 4 [BB07]. Néanmoins, dans chacun de ces cas, l'approximation faible est vérifiée ce qui simplifie le traitement de la conjecture de Peyre et ne rend pas indispensable la compréhension de la géométrie de la descente effectuée lors du comptage (sauf dans le cas Q_1Q_2 de [BT13] dans lequel le traitement de la conjecture de Peyre est en réalité incomplet). La géométrie de la descente utilisée dans [BB07] a été précisée dans [DP14]. Cela permet d'ores et déjà constater que dans le cas de variétés non déployées, les méthodes de descente utilisées pour établir le principe de Manin ne font pas nécessairement appel aux toseurs versels mais peuvent faire appel à des toseurs quasi-versels d'un type différent, ces derniers donnant lieu à une paramétrisation plus agréable. On peut également pour finir citer, entre autres [CTS79] ou [CTCS80], où des méthodes de descente sur des toseurs quasi-versels sont utilisées de manière détaillée mais dans un objectif différent de celui du principe de Manin et pour lesquels des équations locales sont suffisantes.

Remarquons, comme mentionné ci-dessus, que dans le cas d'une variété satisfaisant l'approximation faible, le traitement de la constante de Peyre est grandement simplifié puisque le nombre de Tamagawa (voir [Pey95]) est alors simplement donné par $\omega_{V,H_V}(V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))$. Au contraire, dans le cas où l'approximation faible n'est pas satisfaite, une adaptation immédiate de [Sal98, lemma 6.17] (dans le cas des toseurs versels) permet d'établir comment la constante se remonte naturellement aux toseurs quasi-versels de type

$\lambda : \text{Pic}(V_K) \hookrightarrow \text{Pic}(\overline{V})$ de la façon suivante. Supposons donné J un ensemble fini indexant les classes d'isomorphismes de tels toseurs possédant un point rationnel au-dessus de V et que, pour tout $j \in J$, l'on note $\pi_j : \mathcal{T}_j \rightarrow V$ un représentant de la classe d'isomorphisme en question. On a alors

$$c_{\text{Peyre}} = \frac{\alpha(X)\beta(X)}{\#\text{III}^1(\mathbf{Q}, T)} \sum_{j \in J} \omega_{V, H_V}(\pi_j(\mathcal{T}_j(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))) \quad (1.1)$$

où

$$\text{III}^1(\mathbf{Q}, T) = \text{Ker} \left(H^1(\mathbf{Q}, T) \longrightarrow H^1(\mathbf{R}, T) \prod_p H^1(\mathbf{Q}_p, T) \right)$$

est le groupe de Tate-Shafarevich associé à T avec T le tore dual de $\text{Pic}(V_K)$. Deux questions se posent alors lors du traitement du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour une variété V .

- Quels toseurs quasi-verseles sont utilisés lors de la démonstration du principe de Manin pour V ?
- (\mathbf{Q}') : Comment déterminer explicitement des équations de ces toseurs quasi-verseles afin de calculer $\omega_{V, H_V}(\pi_j(\mathcal{T}_j(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})))$?

C'est à ces questions dans le cas de certaines surfaces fibrées en coniques que l'on s'intéresse dans cet article.

On dispose essentiellement de deux méthodes pour déterminer les toseurs quasi-verseles associés à une variété V . La première, à la main en effectuant un certain nombre de transformations sur les polynômes définissant la variété V est la méthode appliquée dans [CTS87] ou dans [Sko] dans le cas de variétés possédant un morphisme dominant vers \mathbf{P}^1 ou encore dans le cas des surfaces de Châtelet scindées [BBP12]. Dans le cas de [CTS87] ou [Sko], la méthode ne donne que des équations locales de certains toseurs quasi-verseles, ce qui n'est pas suffisant pour répondre à la question (\mathbf{Q}') . Dans le second cas [BBP12], les toseurs verseles sont réalisés comme ouvert d'un certain espace affine. On dispose alors d'un formalisme plus général, reposant sur la théorie des anneaux de Cox et des anneaux de Cox généralisés développée notamment par Derenthal et Pieropan, qui permet de réaliser les toseurs de certains types λ comme ouverts de certains espaces affines. On renvoie à [Pie15] et [DP14] pour plus de détails à ce sujet. C'est cette dernière méthode que l'on utilisera dans cet article. La principale difficulté de cette méthode réside dans la détermination d'un anneau de Cox pour une variété donnée. Un des intérêts des anneaux de Cox est ensuite qu'une fois déterminé un anneau de Cox sur un corps algébriquement clos, alors on peut obtenir relativement aisément, sous certaines hypothèses (à condition que la variété V possède un \mathbf{Q} -point par exemple), par descente galoisienne des anneaux de Cox de tout type sur \mathbf{Q} et ensuite toutes les classes d'isomorphismes d'anneaux de Cox en tordant l'anneau de Cox de départ par un élément de $H_{\text{ét}}^1(V, T)$ [Pie15]. Cela permet alors dans un premier temps de réaliser les toseurs verseles comme ouvert du spectre d'un anneau de Cox. Le cas où les anneaux de Cox sont de type fini est particulièrement intéressant puisqu'il permet de cette manière de réaliser les toseurs verseles comme ouverts d'un espace affine. Dans un second temps, cela permet de réaliser les toseurs quasi-verseles de tout type $\lambda : \hat{T} \rightarrow \text{Pic}(\overline{V})$ dont l'image contient un diviseur ample comme ouvert d'un espace affine en passant par les anneaux de Cox généralisés et ainsi d'en expliciter des équations.

Cet article est ainsi dédié à la description de certains toseurs quasi-verseles associés à certaines surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$ que l'on définit comme modèle minimal propre et lisse de variétés affines de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^3$ de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = F(X, 1) \quad (1.2)$$

où F est une forme binaire à coefficients entiers de degré n pair dont les facteurs irréductibles sur \mathbf{Q} restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, de discriminant non nul et a un entier sans facteur carré. On remarque que le cas où $n = 4$ correspond aux classiques *surfaces de Châtelet*. Cette description permet également d'expliciter la géométrie derrière les différentes démonstrations du principe de Manin et de la conjecture de Peyre dans le cas des surfaces de Châtelet et plus généralement celle derrière le principe de Manin et la conjecture de Peyre pour ces surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$. Cette étude se généraliserait sans difficulté à l'étude de variétés fibrées en coniques plus générales du type

$$Q(u, v) = F(x_1, x_2)$$

pour Q une forme quadratique entière et F un polynôme à coefficient entiers sans facteur carré et dont les facteurs irréductibles sur \mathbf{Q} restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ avec Δ le discriminant de Q .

Il est cependant à noter que les méthodes utilisées afin d'obtenir le principe de Manin dans [BBP12], [BB12], [BT13] et [Des16b] ne peuvent fournir de formule asymptotique que si le degré de F est inférieur à 4, autrement dit précisément dans le cas des surfaces de Châtelet. Ainsi, il n'est pas clair (même si

cela semble probable) que les torseurs de type $\text{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \text{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$ décrits dans cet article soient les torseurs utilisés lors d'une preuve éventuelle du principe de Manin pour ce type de variétés pour une forme F de degré plus grand que 5. Une telle preuve semble totalement hors de portée à l'heure actuelle en toute généralité. Seul éventuellement le cas scindé peut se révéler accessible en utilisant la machinerie de Green-Tao-Ziegler. Cependant, cette description étant valable pour toute factorisation de F et tout a , elle permet de préciser le traitement de la constante de Peyre de [BT13] et permettra surtout de faciliter le traitement de cette constante dans le cas $a \neq -1$ puisqu'à l'heure actuelle le principe de Manin n'est connu que dans le cas des surfaces de Châtelet (c'est-à-dire pour F de degré 4) avec $a = -1$, voir [BBP12], [BB12], [BT13] et [Des16b]. Le cas $a > 0$ est un travail en cours de l'auteur dans le cas où le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ est égal à 1 tout comme les cas $a < 0$ et $a \neq -1$ et les premières investigations semblent indiquer que les torseurs utilisés lors du comptage seront les torseurs de type $\text{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \text{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$ décrits dans cet article.

1.2. Résultats. — On considère dans cette section les surfaces $S_{a,F}$ définies en (1.2) et on suppose que la décomposition en produit d'irréductibles deux à deux non associés du polynôme F est donnée par

$$F = F_1 F_2 \cdots F_r \tag{1.3}$$

pour un certain entier r non nul et pour $F_i \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$ irréductible ($1 \leq i \leq r$). On décrit alors dans une première partie de cet article le groupe de Picard géométrique et le groupe de Picard sur \mathbf{Q} des surfaces $S_{a,F}$ ainsi que le cône pseudo-effectif de $S_{a,F}$ à l'aide de considérations standards sur les surfaces fibrées en coniques. On en déduit en particulier le théorème suivant. Il est à noter que la première partie concernant le rang du groupe de Picard est bien connue puisque la fibration conique en question est relativement minimale mais que nous l'incluons cependant ici par souci d'exhaustivité.

Théorème 1.1. — *On a $\text{rang}(\text{Pic}(S_{a,F})) = 2$ et $\alpha(S_{a,F}) = \frac{2}{n}$.*

De plus, un résultat de [Sko, proposition 7.12] donne immédiatement lieu au résultat suivant.

Théorème 1.2 ([Sko, proposition 7.12]). — *Si $\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_m$ représentent les classes modulo 2 des degrés des facteurs irréductibles sur \mathbf{Q} du polynôme F , alors $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \text{Pic}(\overline{S_{a,F}}))$ est isomorphe au quotient de l'orthogonal de $(\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_m)$ par la droite engendrée par $(1, \dots, 1)$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$.*

Dans une seconde partie, on exhibe un anneau de Cox de type identité pour les surfaces $\overline{S_{a,F}}$ en se basant sur une description des torseurs versels inspirée de [BBP12].

Théorème 1.3. — *On pose $\Delta_{i,j} = \text{Res}(L_i(X, 1), L_j(X, 1))$ si*

$$F(u, v) = \prod_{i=1}^n L_i(u, v) \tag{1.4}$$

avec $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ des formes linéaires non deux à deux proportionnelles sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Alors la $\overline{\mathbf{Q}}$ -algèbre

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^{\pm} \mid 0 \leq i \leq n] / (\Delta_{j,k} Z_j^+ Z_k^- + \Delta_{k,\ell} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{\ell,j} Z_k^+ Z_k^-)_{1 \leq i < j < \ell \leq n}$$

est isomorphe à l'anneau de Cox de $\overline{S_{a,F}}$ de type $\text{Id}_{\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})}$.

Cela permet alors d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 1.4. — *Supposons que $a \in \mathbf{Z}_{\neq 0}$ soit sans facteur carré et supposons par ailleurs que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1. Il existe alors un ensemble Γ (infini) tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un torseur versel $\pi_{\gamma} : \mathcal{T}_{\gamma} \rightarrow S_{a,F}$ indexé par γ et tel que*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \pi_{\gamma}(\mathcal{T}_{\gamma}(\mathbf{Z})). \tag{1.5}$$

De plus, ces torseurs versels peuvent être obtenus explicitement et il ne s'agit pas des torseurs utilisés lors des démonstrations du principe de Manin et de la conjecture de Peyre de [BB12], [BT13] et [Des16b]. Il s'agit en revanche des torseurs utilisés dans le cas scindé [BBP12].

Remarque 1.1. — *L'hypothèse sur le nombre de classes n'est pas nécessaire pour obtenir une description explicite des torseurs (ce qui est effectuée en toute généralité dans les démonstrations des Théorèmes 1.4 et 1.5) mais afin d'établir les égalités (1.5) et (1.6). Cette hypothèse nous sera en particulier utile afin de caractériser les entiers n de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z .*

Nous détaillerons en appendice que dans ce cas, si $a > 0$, alors on a nécessairement que a est un nombre

premier congru à 1 modulo 4 ou égal à 2. On peut alors montrer que, dans ce cas, on a automatiquement une solution de $x^2 - ay^2 = -1$ avec $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$. Un entier n s'écrit alors sous la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z si, et seulement si, $\nu_p(|n|) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout nombre premier p tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.

Enfin, lorsque $a < 0$, on peut écrire

$$r_a(n) = \#\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid n = x^2 - ay^2\} = \omega_a \mathbf{1} * \left(\frac{a}{n}\right),$$

où ω_a est le nombre d'unités dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et $\left(\frac{a}{n}\right)$ est le symbole de Jacobi.

Cela couvre notamment les neuf corps quadratiques imaginaires de nombre de classes 1 (à savoir les corps quadratiques imaginaires avec $a = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$) et couvre de nombreux exemples de corps quadratiques réels (voir [CR99] pour de nombreux exemples). La conjecture de Gauss implique en particulier que le nombre de tels corps quadratiques réels est infini.

On donne ensuite des exemples détaillés d'équations de toorseurs versels dans le cas des surfaces de Châtelet pour chacun des différents type de factorisation possibles et pour tout $a \in \mathbf{Z}_{\neq 0}$ et on donne des exemples en degré n pair quelconque dans le cas où F est scindé et dans le cas où F est un produit de formes quadratiques non proportionnelles deux à deux et irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$.

Dans un troisième temps, on décrit, à isomorphisme près, tous les toorseurs de type injectif $\lambda : \text{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \text{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))) \hookrightarrow \text{Pic}(S_{a,F})$ au-dessus de $S_{a,F}$ à l'aide de la machinerie des anneaux de Cox généralisés développée dans [Pie15] et [DP14].

Théorème 1.5. — *Supposons que $a \in \mathbf{Z}_{\neq 0}$ soit sans facteur carré et supposons par ailleurs que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1. Il existe alors un ensemble fini J indexant des classes d'isomorphismes de toorseurs de type λ possédant un point rationnel, et pour tout $j \in J$, il existe un toorseur $\pi_j : \mathcal{T}_j \rightarrow S_{a,F}$ de type λ tels que*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j(\mathcal{T}_j(\mathbf{Z})) \quad (1.6)$$

et

$$S_{a,F}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}(S)} = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j(\mathcal{T}_j(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})).$$

Ces toorseurs peuvent être décrits explicitement. Par ailleurs, avec les notations (1.3), pour tout toorseur \mathcal{T} de type λ , il existe une variété \mathcal{X} telle que $\mathcal{T} = \mathcal{X} \times \mathbf{A}^2$ et telle que le complémentaire de l'origine \mathcal{X}° de \mathcal{X} soit isomorphe à l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2r+2} \setminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u, v) = n_i(s_i^2 - at_i^2), \quad (1 \leq i \leq r)$$

pour un r -uplet d'entier (n_1, \dots, n_r) tels que $\prod_{i=1}^r n_i$ soit de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z .

En particulier, les toorseurs utilisés dans les différentes démonstrations du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour $a = -1$ sont des toorseurs de type $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(i)})$.

On détaille pour finir l'exemple du cas où F est un produit de deux formes quadratiques, complétant par là le traitement de la constante de Peyre effectué dans [BT13].

2. Géométrie des surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$

2.1. Quelques réductions. — Comme mentionné dans [Sko, 7.1], tout modèle propre et lisse d'une variété affine de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^3$ de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = F(X, 1)$$

avec a un entier et F une forme binaire de degré quelconque est birationnel au modèle minimal propre et lisse d'une variété affine de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^3$ de la forme

$$Y^2 - a'Z^2 = F'(X, 1)$$

où F' est une forme binaire à coefficients entiers de degré n pair dont les facteurs irréductibles sur \mathbf{Q} restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a'})$, de discriminant non nul et avec a' un entier sans facteur carré. On se placera donc dans la suite sous ces hypothèses, à savoir que F est une forme binaire sans facteur multiple, à coefficients entiers, de degré n pair dont les facteurs irréductibles sur \mathbf{Q} restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et que a est un entier sans facteur carré. Toute la procédure développée dans cet article s'adapterait cependant dans le cas

n impair en utilisant le modèle explicité dans [CTS82] mais par souci de concision, on se contente ici de traiter le cas n pair.

2.2. Calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$. — Les surfaces $S_{a,F}$ définies en (1.2) sont brièvement mentionnées dans [CTSSD87b] et on détaille ici les éléments de leur géométrie qui nous seront utiles. Ces surfaces sont en particulier rationnelles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et on supposera dans toute la suite que les surfaces $S_{a,F}$ considérées vérifient l'hypothèse suivante : $S_{a,F}(\mathbf{Q}) \neq \emptyset$. On renvoie à [CTSSD87b] pour plus de détails quant à cette question de l'existence de points rationnels pour la surface $S_{a,F}$.

Construisons dans un premier temps un modèle minimal propre et lisse de (1.2) de manière analogue à [BBP12]. Soient S_1 et S_2 les hypersurfaces de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2 \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^1$ définies respectivement pour $([Y : Z : T], U) \in \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2 \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^1$ et $([Y : Z : T], V) \in \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2 \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^1$ par

$$Y^2 - aZ^2 = T^2 F(U, 1)$$

et

$$Y^2 - aZ^2 = T^2 F(1, V).$$

Si l'on considère U_1 l'ouvert de S_1 défini par $U \neq 0$ et U_2 l'ouvert de S_2 défini par $V \neq 0$, alors l'application ⁽¹⁾

$$\varphi : \begin{cases} U_1 & \longrightarrow & U_2 \\ ([Y : Z : T], U) & \longmapsto & ([Y : Z : U^{n/2}T], \frac{1}{U}) \end{cases}$$

est un isomorphisme et $S_{a,F}$ peut être obtenue en recollant S_1 et S_2 le long de φ . Cela permet d'en déduire que les surfaces $S_{a,F}$ sont bien des surfaces fibrées en coniques. En effet, les applications $\varphi_i : S_i \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1$ pour $i \in \{1, 2\}$ définies respectivement par

$$([Y : Z : T], U) \longmapsto [U : 1]$$

et

$$([Y : Z : T], V) \longmapsto [1 : V]$$

se recollent pour donner lieu à une fibration conique $\pi : S_{a,F} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1$ possédant n fibres dégénérées⁽²⁾ sur $\overline{\mathbf{Q}}$ au-dessus des points $[-b_i : a_i]$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et où l'on a posé sur $\overline{\mathbf{Q}}$

$$F(u, v) = \prod_{k=1}^n (a_k u + b_k v),$$

avec a_i et b_i dans $\overline{\mathbf{Q}}$ pour $1 \leq i \leq n$. On considère alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, D_i^{\pm} le sous-schéma irréductible de $\overline{S_{a,F}}$ définie par

$$U = -\frac{b_i}{a_i} \quad \text{et} \quad Y \pm \sqrt{a}Z = 0$$

ainsi que E^{\pm} le sous-schéma irréductible de $\overline{S_{a,F}}$ défini par

$$T = 0 \quad \text{et} \quad Y \pm \sqrt{a}Z = 0.$$

Ces sous-schémas correspondent aux courbes exceptionnelles de $\overline{S_{a,F}}$ et vérifient

$$(E^+, E^+) = (E^-, E^-) = -2, \quad (D_j^+, D_j^+) = (D_j^-, D_j^-) = -1 \quad (1 \leq j \leq n),$$

et

$$(D_j^+, D_j^-) = 1 \quad (1 \leq j \leq n), \quad (E^+, D_j^+) = (E^-, D_j^-) = 1 \quad (1 \leq j \leq n)$$

toutes les autres multiplicité d'intersection étant nulles.

Des considérations standards sur les fibrations en coniques (voir par exemple [CTCS80]) fournissent alors que $\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})$ est libre engendré par les $2(n+2)$ courbes exceptionnelles avec les relations

$$[D_j^+] + [D_j^-] = [D_i^+] + [D_i^-] \quad (i \neq j \in \{1, \dots, n\}) \quad (2.7)$$

et

$$[E^+] + [D_{i_1}^+] + \dots + [D_{i_{n/2}}^+] = [E^-] + [D_{i_{n/2+1}}^-] + \dots + [D_{i_n}^-] \quad \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}. \quad (2.8)$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$\text{Pic}(\overline{S_{a,F}}) = \langle [E^+], [D_1^+], \dots, [D_n^+], [D_1^-] \rangle \cong \mathbf{Z}^{n+2}.$$

⁽¹⁾Ici, on utilise l'hypothèse n pair.

⁽²⁾À nouveau, l'hypothèse n pair intervient ici puisque dans ce cas le fibre à l'infini est lisse, contrairement au cas n impair (voir [CTS82]).

La formule d'adjonction fournit alors aisément, à la manière de [BBP12], que

$$\omega_S^{-1} = 2[E^+] + \sum_{i=1}^n [D_i^+] = 2[E^-] + \sum_{i=1}^n [D_i^-].$$

On en déduit alors les deux propositions suivantes.

Proposition 2.1. — *Les sections $(T, UT, \dots, U^{n/2}T, Y, Z)$ forment une base de $H^0(S_{a,F}, \omega_{S_{a,F}}^{-1})$.*

Démonstration— La démonstration suit, *mutatis mutandis*, celle de [BBP12, lemma 2.1] dans le cas $n = 4$. \square

Il s'ensuit en particulier le résultat suivant.

Proposition 2.2. — *Le système linéaire $|\omega_{S_{a,F}}^{-1}|$ est sans point base et la base exhibée en Proposition 2.1 donne lieu à un morphisme $\psi : S_{a,F} \rightarrow \mathbf{P}^{\frac{n}{2}+2}$ dont l'image est la surface (singulière) S' donnée par l'intersection de $\frac{n}{2}$ quadriques*

$$\begin{cases} x_0x_2 = x_1^2 \\ x_1x_3 = x_2^2 \\ \vdots \\ x_{\frac{n}{2}-2}x_{\frac{n}{2}} = x_{\frac{n}{2}-1}^2 \\ x_{\frac{n}{2}+1}^2 - ax_{\frac{n}{2}+2}^2 = a_nx_{\frac{n}{2}}^2 + a_{n-1}x_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-2}x_{\frac{n}{2}-1}^2 + a_{n-3}x_{\frac{n}{2}-1}x_{\frac{n}{2}-2} + \dots + a_0x_0^2 \end{cases}$$

si

$$F(X, 1) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

avec $a_i \in \mathbf{Z}$ pour $1 \leq i \leq n$. L'application induite $\psi : S_{a,F} \rightarrow S'$ correspond à l'éclatement des points singuliers de S' donnés par $P^\pm = [0 : \dots : 0 : 1 : \pm\sqrt{a}]$ et $\psi^{-1}(P^\pm) = E^\pm$.

Ce morphisme ψ permet, par exemple à la manière de [Des16b], de définir une hauteur sur $S_{a,F}$. On peut alors établir que $S_{a,F}$ est “presque de Fano” au sens de [Pey01, formule 5.1] et ainsi le principe de Manin et la conjecture de Peyre doivent décrire la répartition des points rationnels sur les surfaces $S_{a,F}$. En effet, puisque $S_{a,F}$ est géométriquement rationnelle, on a $H^1(S_{a,F}, \mathcal{O}_S) = H^2(S_{a,F}, \mathcal{O}_S) = \{0\}$. De plus, le groupe de Picard géométrique est sans torsion et on verra grâce à la Proposition 2.2.5 que le cône pseudo-effectif contient la classe du diviseur anticanonique. Le problème de comptage se ramène alors de façon analogue à [Des16b] à l'estimation de quantités du type

$$S(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap \mathcal{R}(X)} r_a(F(\mathbf{x})), \quad (2.9)$$

si $r_a(n)$ désigne le nombre de représentations d'un entier n sous la forme $n = y^2 - az^2$ avec y et z deux entiers vérifiant par ailleurs la condition $|y|, |z| \leq B$ lorsque $a > 0$ ⁽³⁾ et

$$\mathcal{R}(X) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq X, \quad F(\mathbf{x}) > 0\}.$$

On montre le résultat suivant analogue de [Bro10] dans le cas des surfaces de Châtelet.

Proposition 2.3. — *Soit $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbf{R}^{\frac{n}{2}+3}$ et supposons que l'on travaille avec la hauteur*

$$H([x_0 : \dots : x_{\frac{n}{2}+2}]) = \|(x_0, \dots, x_{\frac{n}{2}+2})\|$$

pour $x_0, \dots, x_{\frac{n}{2}+2}$ entiers premiers entre eux. On a alors, si

$$N(B) = \#\{x \in S_{a,F}(\mathbf{Q}) \mid H(x) \leq B\},$$

l'égalité

$$N(B) = \frac{1}{4} \# \left\{ (y, z, t; u, v) \in \mathbf{Z}^5 : \begin{array}{l} (y, z, t) = (u, v) = 1 \\ \|(tu^{n/2}, tvu^{n/2-1}, \dots, tv^{n/2}, y, z)\| \leq B \\ y^2 - az^2 = t^2F(u, v) \end{array} \right\}.$$

⁽³⁾Une modification de la hauteur identique à celle de [BBP12] ou [Des16b] permet de s'affranchir de cette condition lorsque $a < 0$.

Démonstration– On a immédiatement

$$N(B) = \frac{1}{2} \# \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{n/2+3} \mid \text{pgcd}(\mathbf{x}) = 1, \mathbf{x} \in S', \|\mathbf{x}\| \leq B \right\},$$

où S' a été définie en Proposition 2.2. Or, on a exactement deux façons d'écrire $(x_0, \dots, x_{n/2}) \in \mathbf{Z}^{n/2+1}$ vérifiant

$$x_0 x_2 = x_1^2, \quad x_1 x_3 = x_2^2, \dots, \quad x_{\frac{n}{2}-2} x_{\frac{n}{2}} = x_{\frac{n}{2}-1}^2 \quad (2.10)$$

sous la forme

$$x_0 = tu^{n/2}, x_1 = tvu^{n/2-1}, \dots, x_{n/2} = tv^{n/2}.$$

En effet, au signe près, on a nécessairement

$$t = \text{pgcd}(x_0, \dots, x_{\frac{n}{2}}), \quad u = \text{pgcd}\left(\frac{x_0}{t}, \dots, \frac{x_{\frac{n}{2}-1}}{t}\right), \quad v = \text{pgcd}\left(\frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_{\frac{n}{2}}}{t}\right).$$

Lorsque $n \equiv 0 \pmod{4}$, on ne peut qu'échanger le signe du couple (u, v) tandis que lorsque $n \equiv 2 \pmod{4}$, on ne peut qu'échanger conjointement le signe du couple (u, v) et celui de t .

En effet, les relations (2.10) impliquent que si $p \mid v$, alors

$$\nu_p(x_i) = i \nu_p(x_1) \quad i \in \left\{ 1, \dots, \frac{n}{2} \right\}$$

et si $p \mid u$, alors

$$\nu_p(x_i) = \left(\frac{n}{2} - i\right) \nu_p(x_{n/2-1}) \quad i \in \left\{ 0, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}.$$

On poursuit alors en remarquant, grâce aux relations (2.10), que $\text{pgcd}\{x_i/t \mid i \neq j\} = 1$ si $j \notin \{0, n/2\}$ et que les conditions $p \mid (x_i/(tv), x_j/(tv))$ pour $i, j \neq 0$ et $p \mid (x_i/(tu), x_j/(tu))$ pour $i, j \neq n/2$ conduisent à une contradiction. Autrement dit, si $p \mid x_i$ pour $i \in \{0, \dots, n/2\}$, alors $p \mid t$ ou $p \mid u$ ou $p \mid v$. En effet, supposons que $p \mid x_i$ pour $i \in \{0, \dots, n/2\}$, alors les relations (2.10) fournissent que $p \mid x_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n/2 - 1\}$. Supposons alors que $p \nmid x_{n/2}$. On a alors par récurrence

$$\nu_p(x_i) = \left(\frac{n}{2} - i\right) \nu_p(x_{n/2-1}) \quad i \in \left\{ 1, \dots, \frac{n}{2} \right\}.$$

On déduit ainsi de $x_0 x_2 = x_1^2$ que $\nu_p(x_0) = \frac{n}{2} \nu_p(x_{n/2-1})$ et que par conséquent $p \mid x_0$. Le cas $p \nmid x_0$ se traite de manière analogue et fournit alors le résultat. On a clairement $(u, v) = 1$ et la condition $\text{pgcd}(\mathbf{x}) = 1$ se traduit par $(y, z, t) = 1$. On conclut finalement la preuve en remarquant que si l'on note

$$Q(x_0, \dots, x_{\frac{n}{2}}) = a_n x_{\frac{n}{2}}^2 + a_{n-1} x_{\frac{n}{2}} x_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-2} x_{\frac{n}{2}-1}^2 + a_{n-3} x_{\frac{n}{2}-1} x_{\frac{n}{2}-2} + \dots + a_0 x_0^2$$

la $\frac{n}{2}$ -ième forme quadratique définissant S' , alors on a

$$Q(tu^{n/2}, tvu^{n/2-1}, \dots, tv^{n/2}) = t^2 F(u, v).$$

□

On fait alors apparaître les sommes (2.9) par le même procédé que dans [Des16b]. On ne sait en revanche pas estimer ce type de sommes dès que $n > 4$ ou $a \neq 1$ dans la plupart des cas. L'article [Bro10] s'adapte cependant sans difficulté pour fournir une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour $N(B)$ en remarquant que la démonstration ne fait pas appel au degré de F .

Proposition 2.4. — On a

$$\text{Pic}(S_{a,F}) = \left\langle [D_1^+] + [D_1^-], [\omega_{S_{a,F}}^{-1}] \right\rangle.$$

En particulier, on a $\text{rang}(\text{Pic}(S_{a,F})) = 2$ et le principe de Manin prédit que

$$N(B) = c_{\text{Peyre}} B \log(B) (1 + o(1)).$$

Démonstration– Commençons par calculer $(\text{Pic}(\overline{S_{a,F}}))^{(\sigma)}$, pour σ la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. Soit

$$D = \sum_{i=1}^n a_i [D_i^+] + b [E^+] + c [D_1^-] \quad \text{avec} \quad (a_1, \dots, a_n, b, c) \in \mathbf{Z}^{n+2}$$

un élément de $\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})$. On a que $D \in (\text{Pic}(\overline{S_{a,F}}))^{(\sigma)}$ si, et seulement si, $D = \sigma(D)$, soit si, et seulement si,

$$D = \left(\sum_{i=2}^n a_i + c - \left(\frac{n}{2} - 1\right) b \right) [D_1^+] + \sum_{i=2}^n (b - a_i) [D_i^+] + b [E^+] + \left(\sum_{i=1}^n a_i - \frac{n}{2} b \right) [D_1^-].$$

On obtient ainsi le système

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \sum_{i=2}^n a_i + c - \left(\frac{n}{2} - 1\right) b \\ b = 2a_2 \\ \vdots \\ b = 2a_n \\ c = \sum_{i=1}^n a_i - \frac{n}{2} b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2 + c \\ b = 2a_2 \\ \vdots \\ b = 2a_n \end{array} \right.$$

si bien que $D = (a_1 - a_2) ([D_1^+] + [D_1^-]) + a_2 ([D_1^+] + \dots + [D_n^+] + 2[E^+])$ et

$$\langle [D_1^+] + [D_1^-], [\omega_{S_{a,F}}^{-1}] \rangle = (\text{Pic}(\overline{S_{a,F}}))^{(\sigma)}.$$

Le résultat suit alors aisément puisque

$$\langle [D_1^+] + [D_1^-], [\omega_{S_{a,F}}^{-1}] \rangle \subset \text{Pic}(S_{a,F}) = (\text{Pic}(\overline{S_{a,F}}))^{\mathcal{G}} \subset (\text{Pic}(\overline{S_{a,F}}))^{(\sigma)},$$

si \mathcal{G} désigne le groupe de Galois de l'extension $K(\sqrt{a})$ pour K le corps de décomposition sur \mathbf{Q} du polynôme $F(X, 1)$. \square

On démontre alors la proposition suivante, fondamentale pour le calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$ intervenant dans la constante de Peyre. On pose $C_{\text{eff}}(S_{a,F})$ le cône fermé engendré par les classes de diviseurs effectifs dans $\text{NX}(S_{a,F}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ avec $\text{NS}(S_{a,F})$ le groupe de Néron-Severi de $S_{a,F}$ (voir [BM90]) et \mathcal{G} est le groupe de Galois sur \mathbf{Q} de $K(\sqrt{a})$ avec K le corps de décomposition du polynôme $F(X, 1)$.

Proposition 2.5. — On a

$$C_{\text{eff}}(S_{a,F}) = \langle [E^+] + [E^-], [D_1^+] + [D_1^-] \rangle$$

où $d = \min_{1 \leq i \leq r} \deg(F_i)$ avec les notations (1.3).

Démonstration— En combinant le théorème 5.1.3.1 et la proposition 5.1.1.6 de [ADHL15], on déduit que $C_{\text{eff}}(\overline{S_{a,F}})$ est engendré par les classes des diviseurs premiers E tels que $E^2 < 0$. La démonstration de la proposition 5.2.1.10 de [ADHL15] implique alors que $C_{\text{eff}}(\overline{S_{a,F}})$ est engendré par les classes de $[E^{\pm}]$ et $[D_i^{\pm}]$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. On en déduit alors le résultat puisque

$$C_{\text{eff}}(S_{a,F}) = (C_{\text{eff}}(\overline{S_{a,F}}))^{\mathcal{G}}.$$

\square

Cette proposition permet le calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$ intervenant dans la conjecture de Peyre [Pey95].

Proposition 2.6. — On a $\alpha(S_{a,F}) = \frac{2}{n}$.

Posons $e_1 = \omega_{S_{a,F}}^{-1}$ et $e_2 = [D_1^+] + [D_1^-]$. On utilise alors la définition suivante de la constante $\alpha(S_{a,F})$ donnée dans [Pey95]

$$\alpha(S_{a,F}) = \text{Vol} \left\{ x \in C_{\text{eff}}(S_{a,F})^{\vee} \mid \langle \omega_{S_{a,F}}^{-1}, x \rangle = 1 \right\},$$

où la mesure sur l'hyperplan

$$\mathcal{H} = \left\{ x \in \text{Pic}(S_{a,F})^{\vee} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \mid \langle \omega_{S_{a,F}}^{-1}, x \rangle = 1 \right\}$$

est définie dans [Pey95]. Le cône $C_{\text{eff}}(S_{a,F})$ est donc engendré par $e_1 - \frac{n}{2}e_2$ et e_2 si bien que la constante $\alpha(S_{a,F})$ est donnée par le volume de la région

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 1, \quad dy > 0, \quad x - \frac{n}{2}y > 0 \right\}.$$

Autrement dit, on obtient la longueur du segment $]0, \frac{2}{n}[$, soit $\alpha(S_{a,F}) = \frac{2}{n}$. \square

3. Arithmétique des surfaces $S_{a,F}$

On rappelle ici le résultat suivant que l'on peut trouver dans [Sko, Proposition 7.1.1] ou dans [San80, Proposition 1] et qui permet de calculer le coefficient $\beta(S_{a,F})$ intervenant dans l'expression conjecturale de la constante de Peyre

$$\beta(S_{a,F}) = \#H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \text{Pic}(\overline{S_{a,F}})) = \text{Coker}(\text{Br}(\mathbf{Q}) \rightarrow \text{Br}(S_{a,F})).$$

Proposition 3.1 ([Sko, proposition 7.12]). — *Soient $\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_m$ les classes modulo 2 des degrés des facteurs irréductibles sur \mathbf{Q} du polynôme F . Alors $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \text{Pic}(\overline{S_{a,F}}))$ est isomorphe au quotient de l'orthogonal de $(\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_m)$ par la droite engendrée par $(1, \dots, 1)$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$.*

En particulier, si tous les d_i sont pairs, alors

$$H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \text{Pic}(\overline{S_{a,F}})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{m-1} \quad \text{et} \quad \beta(S_{a,F}) = 2^{m-1}$$

et sinon

$$H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \text{Pic}(\overline{S_{a,F}})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{m-2} \quad \text{et} \quad \beta(S_{a,F}) = 2^{m-2}.$$

Cette quantité $\beta(S_{a,F})$ est fortement liée aux concepts de principe de Hasse et d'approximation faible sur $S_{a,F}$. Ces deux notions se révèlent cruciales lorsqu'il s'agit d'interpréter la constante obtenue dans la formule asymptotique donnée par le principe de Manin. En effet, dans les cas où le principe de Hasse est vérifié, la constante est donnée par un produit de densités p -adiques et archimédienne comme par exemple dans [Bir62] ou [BHB17]. Enfin, le fait de vérifier ou non l'approximation faible s'avère capital puisque le troisième facteur de la constante de Peyre est la mesure de Tamagawa du noyau à droite de l'accouplement de Brauer-Manin $\omega_H(S_{a,F}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}(S_{a,F})})$. On sait aujourd'hui qu'il ne s'agit pas de la seule obstruction possible mais on dispose de la conjecture suivante de Colliot-Thélène et Sansuc qui date des années 1970. Salberger laisse même entendre que celle-ci pourrait se généraliser aux surfaces unirationnelles [Sal98].

Conjecture. — *Si S est une surface définie sur \mathbf{Q} géométriquement rationnelle, i.e. telle que $S \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}$ soit birationnelle à $\mathbf{P}_{\overline{\mathbf{Q}}}^2$, alors on a*

$$\overline{S(\mathbf{Q})} = S(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}(S)}.$$

En admettant cette conjecture, on peut voir que les deux conjectures de Salberger [Sal98] et de Peyre [Pey01] concernant l'expression de la constante sont les mêmes, puisque les surfaces de Châtelet, et plus généralement les surfaces $S_{a,F}$, sont géométriquement rationnelles. Enfin, il est à noter que ce résultat a été démontré par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans le cas des surfaces de Châtelet ([CTSSD87a] et [CTSSD87b]), permettant l'étude du principe de Hasse et de l'approximation faible dans le cas des surfaces de Châtelet.

Lorsque $n > 4$, la situation est moins précise et l'on ne dispose que de la conjecture 3 qui affirme que la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible est l'obstruction de Brauer-Manin. En effet, les méthodes utilisées dans [CTSSD87a] et [CTSSD87b] reposent sur une descente sur les toiseurs versels et plus particulièrement sur le fait que le principe de Hasse et l'approximation faible soient vérifiés sur l'intersection de deux quadriques. Dans le cas général et comme on le verra en section suivante, les toiseurs versels sont une intersection de $n - 2$ quadriques sur lesquels on ne sait pas étudier le principe de Hasse et l'approximation faible. Ainsi, cet article ne donne pas lieu à une étude de ces deux principes sur les surfaces $S_{a,F}$. On peut malgré tout noter que lorsque F est irréductible, l'obstruction de Brauer-Manin disparaît et il découle des travaux [CTS82] que le principe de Hasse et l'approximation faible sont vérifiés sous l'hypothèse H de Schinzel. De plus, si F n'admet que des facteurs irréductibles de degré pair, il existe un processus fini afin de déterminer si $S_{a,F}(\mathbf{Q})$ est vide ou non et dans le second cas, les points rationnels sont Zariski-denses et il existe un processus fini pour déterminer si un point adélique M appartient à l'adhérence de $V(\mathbf{Q})$ (voir [CTS82]).

4. Les toiseurs versels

4.1. L'anneau de Cox de type identité sur $\overline{\mathbf{Q}}$. — On commence par la proposition suivante, qui décrit explicitement les toiseurs versels associés à $\overline{S_{a,F}}$. On pose sur $\overline{\mathbf{Q}}$

$$F(u, v) = \prod_{k=1}^n L_k(u, v) \quad \text{où} \quad L_i(u, v) = a_i u + b_i v \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4.11)$$

pour $a_i, b_i \in \overline{\mathbf{Q}}$ pour $1 \leq i \leq n$. On pose alors pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Delta_{i,j} = \text{Res}(L_i(x, 1), L_j(x, 1))$$

et on considère $\overline{\mathcal{T}}$ le sous-ensemble constructible de

$$\mathbf{A}^{2n+2} = \text{Spec}(\mathbf{Q}[Z_0^\pm, Z_i^\pm \mid i \in \{1, \dots, n\}])$$

défini par les équations

$$P_{j,k,\ell} = \Delta_{j,k} Z_\ell^+ Z_\ell^- + \Delta_{k,\ell} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{\ell,j} Z_k^+ Z_k^- \quad (4.12)$$

pour $1 \leq j < k < \ell \leq n$ et les inégalités $Z_0^+ Z_0^- \neq 0$ et

$$(Z_i^+ Z_i^-, Z_j^+ Z_j^-) \neq (0, 0) \quad (4.13)$$

pour $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. Définissons à présent un morphisme $\pi : \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \overline{S_{a,F}}$. Pour ce faire, comme dans [BBP12, section 4], il suffit de définir un morphisme $\hat{\pi} : \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}_{\text{spl}}$ où $\overline{\mathcal{T}}_{\text{spl}} \subset \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^5 = \text{Spec}(\mathbf{Q}[y, z, t, u, v])$ est le sous-schéma défini par l'équation

$$y^2 + z^2 = t^2 F(u, v) \quad (4.14)$$

et les conditions $(y, z, t) \neq 0$ et $(u, v) \neq 0$. Considérons alors $(z_j^\pm)_{0 \leq j \leq n} \in \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathbf{Q}})$. On pose

$$u = \frac{1}{\Delta_{1,2}} (b_2 z_1^+ z_1^- - b_1 z_2^+ z_2^-) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\Delta_{1,2}} (a_1 z_2^+ z_2^- - a_2 z_1^+ z_1^-)$$

de sorte que les relations (4.12) fournissent les égalités

$$u = \frac{1}{\Delta_{i,j}} (b_j z_i^+ z_i^- - b_i z_j^+ z_j^-) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\Delta_{i,j}} (a_i z_j^+ z_j^- - a_j z_i^+ z_i^-)$$

pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. On a ainsi clairement $L_i(u, v) = z_i^+ z_i^-$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On introduit alors $(y, z, t) \in \overline{\mathbf{Q}}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ définis par

$$\begin{cases} y + \sqrt{a}z = (z_0^+)^2 \prod_{i=1}^n z_i^+ \\ y - \sqrt{a}z = (z_0^-)^2 \prod_{i=1}^n z_i^- \\ t = z_0^+ z_0^- \end{cases}$$

de sorte que $y^2 - az^2 = t^2 F(u, v)$ et que $(y, z, t, u, v) \in \overline{\mathcal{T}}_{\text{spl}}(\overline{\mathbf{Q}})$. On obtient alors une description analogue à [BBP12] du tore de néron-Séveri T_{NS} et en suivant, *mutatis mutandis*, la démonstration de [BBP12, Proposition 4.4], il s'ensuit la proposition suivante, dont nous ne détaillons pas plus la démonstration ici.

Proposition 4.1. — *La variété $\overline{\mathcal{T}}$ équipée du morphisme $\pi : \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \overline{S_{a,F}}$ est un torseur versel au-dessus de $\overline{S_{a,F}}$.*

On déduit de cette proposition l'anneau de Cox de type identité associé à $\overline{S_{a,F}}$, qui généralise la proposition 5.4 de [DP14].

Proposition 4.2. — *La $\overline{\mathbf{Q}}$ -algèbre*

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^\pm \mid 0 \leq i \leq n] / (\Delta_{j,k} Z_\ell^+ Z_\ell^- + \Delta_{k,\ell} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{\ell,j} Z_k^+ Z_k^-)_{1 \leq j < k < \ell \leq n}$$

est isomorphe à l'anneau de Cox de $\overline{S_{a,F}}$ de type $\text{Id}_{\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})}$.

Démonstration— On utilise [ADHL15, Proposition 6.1.3.9 (iii)] combiné avec la Proposition 4.1 pour obtenir que l'anneau de Cox \overline{R} de $\overline{S_{a,F}}$ de type $\text{Id}_{\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})}$ est donné par l'anneau des sections globales de la variété quasi-affine de $\mathbf{A}_{\overline{\mathbf{Q}}}^{2n+2}$ donnée par les équations (4.12) et les inégalités (4.13). On remarque alors que $\overline{\mathcal{T}}$ est recouvert par les ouverts affines U_i de \overline{R} définis par les conditions

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n Z_j^+ Z_j^- \neq 0$$

pour tous $1 \leq i \leq n$. On se fixe à présent $1 \leq i \leq n$ et on notera S_i la partie multiplicative engendrée par $Z_{i_0}^{s_0}, Z_{i_1}^{s_1}, \dots, Z_{i_{n-1}}^{s_{n-1}}$. On a alors un isomorphisme entre $\mathcal{O}(U_i^s)$ et le localisé \overline{R}_{S_i} .

Soit à présent $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{T}})$. Alors pour tout choix de $1 \leq i \leq n$, $f \in \mathcal{O}(U_i)$ si bien qu'il existe $N_i \in \mathbf{N}$ et $f_i \in \overline{R}$ tels que

$$f = \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (Z_j^+ Z_j^-)^{N_i}}. \quad (4.15)$$

Établissons alors que \overline{R} est un anneau factoriel. Il est clair que chaque Z_i^\pm est un élément premier et que l'idéal définissant \overline{R} est engendré par les

$$P_{1,2,i} = \Delta_{1,2} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{2,i} Z_1^+ Z_1^- + \Delta_{i,1} Z_2^+ Z_2^-$$

avec $i \in \{3, \dots, n\}$. De plus, d'après les relations (4.13), l'anneau

$$\overline{R}_S \cong \overline{\mathbf{Q}} \left[\{Z_i^\pm \mid 0 \leq i \leq 2\} \cup \{Z_i^+, (Z_i^+)^{-1} \mid 3 \leq i \leq n\} \right]$$

où S est la partie multiplicative engendré par les éléments premiers Z_3^+, \dots, Z_n^+ . Il s'agit en particulier d'un anneau factoriel et d'après le critère de Nagata, il s'ensuit par conséquent que \overline{R} est un anneau factoriel. On peut donc supposer les f_i de (4.15) premiers avec Z_j^\pm pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ ce qui entraîne nécessairement que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $N_i = 0$. Finalement, $f \in \overline{R}$.

Comme on a trivialement que $\overline{R} \subseteq \mathcal{O}(\overline{\mathcal{T}})$, il s'ensuit que $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{T}}) = \overline{R}$, ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

4.2. Description des torseurs versels. — La Proposition 4.2 permet, par descente galoisienne, d'obtenir explicitement des torseurs versels pour les surfaces de type $S_{a,F}$. Cette section est consacrée à cette description générale et au traitement plus en détails de quelques exemples sur les surfaces de Châtelet qui nous intéressent plus particulièrement puisque ce sont à l'heure actuelle les seules surfaces sur lesquelles on soit capable de mener à terme le comptage.

Avant toutes choses, il est nécessaire d'introduire quelques notations. On pose K le corps de décomposition de $F(X, 1)$ sur \mathbf{Q} ainsi que $L = K(\sqrt{a})$. On suppose également que $F = F_1 \cdots F_r$ est une décomposition en produit d'irréductibles deux à deux non associés de F sur \mathbf{Q} (et donc *a fortiori* sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$) avec d_i le degré de F_i pour $1 \leq i \leq r$. On note également K_i le corps de décomposition de F_i sur \mathbf{Q} et $\mathfrak{g}_i = \text{Gal}(K_i/\mathbf{Q})$ pour $1 \leq i \leq r$ et \mathcal{G} le groupe de Galois $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$. On suppose également que, sur $\overline{\mathbf{Q}}$, on a pour tout $1 \leq i \leq r$ la factorisation

$$F_i(u, v) = \alpha_i(\alpha_{i,1}u - \beta_{i,1}v)(\alpha_{i,2}u - \beta_{i,2}v) \cdots (\alpha_{i,d_i}u - \beta_{i,d_i}v) \quad (1 \leq i \leq r)$$

pour $\alpha_{i,j}$ et $\beta_{i,j} \in \overline{\mathbf{Q}}$ pour $1 \leq j \leq d_i$ et $\alpha_i \in \mathbf{Z}$ le plus petit diviseur du coefficient dominant δ_i de F_i tel

que δ_i/α_i soit de la forme $\prod_{k=1}^{d_i} \alpha_{i,k}$ avec $\beta_{i,k} \mapsto \alpha_{i,k}$ \mathfrak{g}_i -équivariante. On notera alors

$$L_{i,k}(u, v) = \alpha_{i,k}u - \beta_{i,k}v \quad (1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq k \leq d_i).$$

On note ensuite Γ_i l'ensemble des $\gamma_i = (\gamma_{i,1}, \dots, \gamma_{i,d_i}) \in \overline{\mathbf{Q}}^{d_i}$ sur lesquels l'action de \mathfrak{g}_i sur $\{\gamma_{i,k}\}_{1 \leq k \leq d_i}$ est la même que sur l'ensemble $\{\beta_{i,k}\}_{1 \leq k \leq d_i}$, autrement dit tels que l'application $\beta_{i,k} \mapsto \gamma_{i,k}$ soit \mathfrak{g}_i -équivariante et tels que⁽⁴⁾

$$\alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} \in \mathbf{Z}.$$

On introduit finalement

$$\Gamma = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r : \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \exists (\gamma_i, n_i) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} = \gamma_i n_i \\ \sqrt{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \in \mathbf{N} \text{ et } n_i \in N_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}}(\mathbf{Z}[\sqrt{a}]) \end{array} \right\}.$$

⁽⁴⁾On a seulement que $\alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} \in \mathbf{Q}$ *a priori*.

Il s'agit de l'analogue de l'ensemble \mathcal{B} défini dans [Des16b, Section 7.2] dans le cas où $F = L_1 L_2 Q$. On introduit alors les ensembles

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \varepsilon \in \{\pm 1\}^r \mid \prod_{i=1}^r \varepsilon_i = 1 \right\} \text{ si } \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad d_i \equiv 0 \pmod{2} \\ \left\{ \varepsilon \in \{\pm 1\}^r \mid \prod_{i=1}^r \varepsilon_i = 1 \text{ et } \varepsilon_{i_0} = 1 \right\} \text{ si } \exists i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket \text{ tel que } d_{i_0} \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right.$$

ainsi que

$$M = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbf{N}^r \quad : \quad \begin{array}{l} m_i \mid \text{ppcm} \left(r_{ij}^{(-1)} \mid j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\} \right) \quad 1 \leq i \leq r \\ (m_i, m_j) \mid r_{ij}^{(-1)} \quad 1 \leq i \neq j \leq r \\ \mu^2(m_i) = 1, \quad \sqrt{m_1 \cdots m_r} \in \mathbf{N} \end{array} \right.$$

où l'on a posé $r_{ij} = \text{Res}(F_i(X, 1), F_j(X, 1))$ et

$$r_{ij}^{(1)} = \prod_{\substack{p \mid r_{ij} \\ \left(\frac{a}{p}\right) = 1 \text{ ou } 0}} p \quad \text{et} \quad r_{ij}^{(-1)} = \prod_{\substack{p \mid r_{ij} \\ \left(\frac{a}{p}\right) = -1}} p.$$

On considère alors Γ_M^Σ des $\gamma \in \Gamma$ pour lesquels il existe $(\varepsilon, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M$ tels que

$$\gamma_i = \varepsilon_i m_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

Il est bon de noter que l'ensemble Γ_M^Σ est *a priori* infini.

Proposition 4.3. — *Supposons que $a \in \mathbf{Z}_{\neq 0}$ soit sans facteur carré et que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1. L'ensemble Γ_M^Σ indexe des toorseurs versels \mathcal{T}_γ pour $S_{a,F}$ vérifiant*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_M^\Sigma} \pi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Z})).$$

Par ailleurs, avec les notations (4.14), sur $\widehat{\pi}_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Q}))$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la quantité

$$\frac{F_i(u, v)}{d_i} \alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k}$$

est de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z étant donnés par deux expressions polynomiales en $2d_i$ variables. De plus, on peut obtenir une description explicite de ces toorseurs versels.

Démonstration— On sait grâce à la Proposition 4.2 que sur $\overline{\mathbf{Q}}$, un anneau de Cox de $S_{a,F}$ est donné par

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^+, Z_i^- \mid 0 \leq i \leq n] / (\Delta_{jk} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} Z_k^+ Z_k^-)_{1 \leq i < j < k \leq n} \quad (4.16)$$

où $\text{div}(Z_0^\pm) = E^\pm$ et $\text{div}(Z_i^\pm) = D_i^\pm$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a plus précisément que

$$(\Delta_{jk} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} Z_k^+ Z_k^-)_{1 \leq i < j < k \leq n} = (P_{1,2,3}, \dots, P_{1,2,n})$$

si

$$P_{1,2,i} = \Delta_{2i} Z_1^+ Z_1^- + \Delta_{i1} Z_2^+ Z_2^- + \Delta_{12} Z_i^+ Z_i^- \quad (3 \leq i \leq n)$$

On remarque alors que cet idéal est invariant sous l'action du groupe de Galois \mathcal{G} . Cette remarque est importante puisqu'elle implique (voir par exemple [Wei47]) que ce même idéal est en réalité défini sur \mathbf{Q} et qu'il est possible d'en obtenir un système de générateurs à coefficients dans \mathbf{Q} . On pose alors

$$X_0 = \frac{Z_0^+ + Z_0^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}}$$

et, pour tout $1 \leq i \leq r$,

$$X_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \beta_k^\ell (Z_k^+ + Z_k^-)}{2d_i}, \quad Y_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \beta_k^\ell (Z_k^+ - Z_k^-)}{2\sqrt{a}d_i} \quad 0 \leq \ell \leq d_i - 1. \quad (4.17)$$

On constate que les variables $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r)$ sont \mathcal{G} -invariantes et que si l'on écrit les relations (4.17) sous la forme

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} \\ Y_{1,1} \\ \vdots \\ X_{r,d_r} \\ Y_{r,d_r} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_1^+ \\ Z_1^- \\ \vdots \\ Z_n^+ \\ Z_n^- \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(M) = \prod_{k=1}^r \frac{\sqrt{a^{d_k}}}{2^{d_k} d_k^{2d_k}} \text{Disc}(F_k) \neq 0.$$

Cela implique que l'on puisse exprimer les Z_i^\pm en termes des $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r)$. On note $Z_i^\pm = f_i^\pm(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ si bien que l'on obtient que la \mathbf{Q} -algèbre R suivante

$$\mathbf{Q}[X_0, Y_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r]/I$$

où l'idéal $I^{(5)}$ est donné par

$$I = (\Delta_{jk} f_i^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_i^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ki} f_j^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_j^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ij} f_k^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_k^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))_{1 \leq i < j < k \leq n}$$

est un anneau de Cox pour $S_{a,F}$ sur \mathbf{Q} . On sait alors que $\dim(R) = n + 4$ et un système de $n - 2$ générateurs de I à coefficients dans \mathbf{Q} peut être obtenu par descente galoisienne. Cela est fait en détails sur plusieurs exemples dans la suite mais il apparaît difficile de donner un système de générateurs en général du fait de la complexité éventuelle du groupe de Galois \mathcal{G} .

Remarque— Dans le cas où l'on a deux facteurs linéaires, que l'on peut supposer être donnés par F_1 et F_2 , il n'est pas difficile de voir que les $n - 2$ polynômes suivants

$$L_{i,k} = \sum_{\ell=1}^{d_i} \beta_{i,\ell}^k P_{1,2,\ell} \quad (3 \leq i \leq r, \quad 0 \leq k \leq d_i - 1)$$

engendrent I et sont à coefficients dans \mathbf{Q} car invariants sous le groupe de Galois.

De même, lorsqu'il existe un facteur de degré 2, par exemple F_1 , les $n - 2$ polynômes à coefficients dans \mathbf{Q}

$$L_{i,k} = \sum_{\ell=1}^{d_i} \beta_{i,\ell}^k \frac{P_{1,2,\ell}}{\Delta_{1,2} \Delta_{1,\ell} \Delta_{2,\ell}} \quad (2 \leq i \leq r, \quad 0 \leq k \leq d_i - 1)$$

conviennent.

On considère alors l'ensemble constructible de

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2n+2} = \text{Spec}(\mathbf{Q}[X_0, Y_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r])$$

noté \mathcal{T}_γ pour $\gamma \in \Gamma$ défini par l'idéal I_γ défini sur \mathbf{Q} suivant

$$(\Delta_{jk} \gamma_i f_i^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_i^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ki} \gamma_j f_j^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_j^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ij} \gamma_k f_k^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_k^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))_{1 \leq i < j < k \leq n} \quad (4.18)$$

et les conditions $(X_0, Y_0) \neq (0, 0)$ et

$$\forall i \neq j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad (f_i^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_i^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), f_j^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_j^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \neq (0, 0). \quad (4.19)$$

Considérons alors $(x_0, y_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r) \in \mathcal{T}_\gamma(k)$ pour k une extension finie de \mathbf{Q} . On pose, avec les notations (4.11)

$$u = \frac{1}{\Delta_{1,2}} (b_2 \gamma_1 f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_1^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - b_1 \gamma_2 f_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{1,2}} (a_1 \gamma_2 f_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - a_2 \gamma_1 f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_1^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

de sorte que les relations (4.12) fournissent les égalités

$$u = \frac{1}{\Delta_{i,j}} (b_j \gamma_i f_i^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_i^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - b_i \gamma_j f_j^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_j^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

⁽⁵⁾Défini lui aussi sur \mathbf{Q} par [Wei47]

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{i,j}} (a_i \gamma_j f_j^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_j^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - a_j \gamma_i f_i^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_i^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. On a alors clairement que u et v sont dans k puisqu'invariants sous le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/k)$ et que

$$F_i(u, v) = \alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} f_k^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_k^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1 \leq i \leq r).$$

Ainsi chaque quantité

$$\frac{F_i(u, v)}{\alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k}}$$

est bien de la forme $x^2 - ay^2$ pour deux entiers x et y étant donnés par deux expressions polynomiales en $2d_i$ variables.

On construit alors comme précédemment un morphisme $\pi_\gamma : \mathcal{T}_\gamma \rightarrow S_{a,F}$ en posant α_γ la racine carrée de $\prod_{i=1}^n \gamma_i$ et $\prod_{i=1}^n n_i = z_\gamma \overline{z_\gamma}$ avec $z_\gamma = x_\gamma + \sqrt{a} y_\gamma$ pour deux entiers x_γ et y_γ et où la conjugaison désigne ici la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. En introduisant $(y, z, t) \in \mathbf{Q}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tels que

$$\begin{cases} y + \sqrt{a}z = \alpha_\gamma z_\gamma (z_0)^2 \prod_{i=1}^n f_i^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ y - \sqrt{a}z = \alpha_\gamma \overline{z_\gamma} (\overline{z_0})^2 \prod_{i=1}^n f_i^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ t = z_0 \overline{z_0} \end{cases}$$

avec $z_0 = x_0 + \sqrt{a}y_0$. Ainsi $y^2 - az^2 = t^2 F(u, v)$ et $(y, z, t, u, v) \in \mathcal{T}_{\text{spl}}(k)$. On établit alors de façon analogue aux Propositions 4.1 et 4.2 que pour tout $\gamma \in \Gamma$, la variété \mathcal{T}_γ équipée du morphisme π_γ et de l'action naturelle de T_{NS} est un torseur versel pour $S_{a,F}$. Il reste alors à établir l'égalité

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_M^\Sigma} \pi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Z})). \quad (4.20)$$

On pose

$$\mathcal{G}_i = \left\{ y = \prod_{k=1}^{d_i} \sigma_{i,k} \overline{\sigma_{i,k}} \in \mathbf{Z} \mid \beta_{i,k} \mapsto (\sigma_{i,k}, \overline{\sigma_{i,k}}) \text{ est } \mathfrak{g}_i - \text{équivariante} \right\}.$$

Il est important de noter que \mathcal{G}_i un ensemble multiplicatif dans le sens où si y_1 et $y_2 \in \mathcal{G}_i$, alors $y_1 y_2 \in \mathcal{G}_i$. Considérons alors un point $P \in S_{a,F}(\mathbf{Q})$. Il existe ainsi un unique $(y, z, t, u, v) \in \mathbf{Z}^4$ tel que

$$\begin{cases} (y, z, t) = (u, v) = 1 \\ t > 0 \\ F_1(u, v) \geq 0 \\ t^2 F_1(u, v) \cdots F_r(u, v) = y^2 - az^2 \end{cases}$$

et $\pi_{\text{spl}}((y, z, t, u, v)) = P$ avec π_{spl} l'application $\pi_{\text{spl}} : \mathcal{T}_{\text{spl}} \rightarrow S_{a,F}$ définie dans [BBP12, définition 4.1] lorsqu'il existe un facteur irréductible de degré impair que l'on peut supposer égal à F_1 et il existe exactement⁽⁶⁾ deux $(y, z, t, u, v) \in \mathbf{Z}^4$ tel que

$$\begin{cases} (y, z, t) = (u, v) = 1 \\ t > 0 \\ t^2 F_1(u, v) \cdots F_r(u, v) = y^2 - az^2 \end{cases}$$

et $\pi_{\text{spl}}((y, z, t, u, v)) = P$ si tous les facteurs irréductibles de F sont de degré pair. On verra que le choix de l'un de ces deux points donnera lieu au même torseur \mathcal{T}_γ . Commençons par supposer que $a > 0$. Le fait que $F_1(u, v) \cdots F_r(u, v)$ soit de la forme $y^2 - az^2$ implique que pour tout nombre premier p vérifiant $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, l'on ait

$$\nu_p(F_1(u, v) \cdots F_r(u, v)) = \nu_p(F_1(u, v)) + \cdots + \nu_p(F_r(u, v)) \equiv 0 \pmod{2}.$$

⁽⁶⁾Au signe près du couple (u, v) .

On pose alors

$$m_i = \prod_{\substack{\left(\frac{a}{p}\right) = -1 \\ \nu_p(F_i(u,v)) \equiv 1 \pmod{2}}} p \quad (1 \leq i \leq r)$$

de sorte que $m_i | F_i(u, v)$. On en déduit que si $p | m_1$, nécessairement il existe un $j \neq 1$ tel que $p | m_j$ et le nombre de tels j est nécessairement impair. Puisque $(u, v) = 1$, cela implique que $p | r_{1j}^{(-1)}$, si bien qu'on en déduit les relations

$$m_i \left| \text{ppcm}(r_{ij}^{(-1)} \mid j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}), \quad (m_i, m_j) \mid r_{ij}^{(-1)},$$

et

$$\nu_p \left(\frac{F_i(u, v)}{m_i} \right) \equiv 0 \pmod{2},$$

pour tous les nombres premiers p tels que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. De plus, $m_1 \cdots m_r$ est un carré. Cela implique alors l'existence, pour tout $1 \leq i \leq r$ d'un $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tel que $\varepsilon_i \frac{F_i(u, v)}{m_i}$ soit de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers x et y . On a alors, puisque $F(u, v)$ est également de cette forme et en vertu du Lemme 6.2 que $\varepsilon_1 \times \cdots \times \varepsilon_r = 1^{(7)}$. Si par exemple $F_1(u, v) = 0$, on pose $\varepsilon_1 m_1$ comme étant l'unique entier sans facteur carré tel que $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r m_1 \cdots m_r$ soit un carré.

On pose alors g_i le plus petit diviseur de $F_i(u, v)$ tel que $\frac{F_i(u, v)}{g_i} \in \mathcal{G}_i$. Nécessairement, en posant $\gamma_i = \varepsilon_i m_i$, on a $\gamma_i \mid g_i$ donc on peut écrire $g_i = \gamma_i n_i$. On constate alors par définition de γ_i , que n_i est de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z . De plus, on peut écrire

$$g_i = \alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \eta_{i,k}$$

avec $\beta_{i,k} \mapsto \eta_{i,k}$ \mathfrak{g}_i -équivariante. En effet, on a nécessairement que $g_i = \frac{F_i(u, v)}{k_i}$ avec $k_i \in \mathcal{G}_i$ est de la forme

$$\prod_{k=1}^{d_i} \eta_{i,k}. \text{ Ainsi, } \gamma \in \Gamma_M^\Sigma \text{ et } (y, z, t, u, v) \in \hat{\pi}_\gamma(\mathcal{T}_\gamma).$$

Dans le cas $a < 0$, il existe un unique r -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \Sigma$ tels que

$$\varepsilon_i F_i(u, v) > 0 \quad (1 \leq i \leq r).$$

La formule (1.5) de [BT13] implique que l'on peut mener la preuve ci-dessus de manière complètement analogue (voir [Des16b]).

On constate pour finir, en notant \mathcal{X}_γ le sous-schéma de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2n} = \text{Spec}(\mathbf{Q}[\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r])$ défini par l'idéal I_γ défini en (4.18), que \mathcal{T}_γ est égal au produit $\mathcal{X}_\gamma \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^2$. En notant \mathcal{X}_γ° le complémentaire de l'origine dans \mathcal{X}_γ , on a un isomorphisme entre l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2n+2} \setminus \{0\}$ donnée par les équations globalement invariantes sous l'action de Galois

$$L_{i,k}(u, v) = \gamma_{i,k} f_{k+\sum_{j \leq i} d_j}^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_{k+\sum_{j \leq i} d_j}^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

et le schéma \mathcal{X}_γ° . En particulier, sur $\hat{\pi}_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Q}))$, on a

$$F_i(u, v) = \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} f_{k+\sum_{j \leq i} d_j}^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_{k+\sum_{j \leq i} d_j}^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

et $F_i(u, v)$ est de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z étant donnés par deux expressions polynomiales en $2d_i$ variables. \square

Lors de toutes les démonstrations du principe de Manin pour les surfaces de Châtelet connues à ce jour ([BBP12], [BB12], [BT13] et [Des16b]), on se ramène toujours à un problème de comptage sur certaines variétés de la forme

$$F_i(u, v) = n_i(X_i^2 - aY_i^2).$$

Une descente sur les toseurs versels n'est par conséquent pas utilisée lors de ces démonstrations (à part dans la cas scindé [BBP12]) mais plutôt une descente sur des toseurs d'un type différent que l'on explicite dans la section suivante. Cette description facilite grandement l'interprétation de la constante. Enfin, il apparaît

⁽⁷⁾Dans le cas où $h_K = h_K^+$, on peut prendre $\varepsilon_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

difficile *a priori* d'obtenir un système de représentants (fini) des classes d'isomorphisme de toseurs versels et de décrire précisément les ensembles du type $\pi_\gamma(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Q}))$.

4.3. Exemples. — On donne dans cette section des équations explicites pour les toseurs versels associés aux surfaces de Châtelet pour chaque type de factorisation et sous les mêmes hypothèses sur a que dans l'énoncé de la Proposition 4.3. On donne également quelques exemples dans le cas de surfaces $S_{a,F}$ plus générales pour certains types de factorisation.

4.3.1. *Le cas des surfaces de Châtelet de type $L_1L_2L_3L_4$.* — Le cas où F est scindé de degré 4 a été entièrement traité dans [BBP12].

4.3.2. *Le cas des surfaces de Châtelet de type L_1L_2Q .* — Le cas où F est un produit de deux formes linéaires par un facteur quadratique a été entièrement traité dans [Des16b].

4.3.3. *Le cas des surfaces de Châtelet de type Q_1Q_2 .* — Soient Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques binaires non proportionnelles et irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. On notera dans toute la suite Δ_i le discriminant de Q_i , τ_i la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta_i})$ et

$$Q_i(\mathbf{x}) = a_i x_1^2 + b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2 \quad (i \in \{1, 2\}).$$

On notera également, comme dans [BT13], Δ le résultant de Q_1 et de Q_2 ainsi que

$$\Delta_3 = \prod_{\substack{(\frac{a}{p})=1 \text{ ou } a=p \\ p|\Delta}} p. \quad (4.21)$$

On note également ici, que le groupe de Galois \mathcal{G} de L sur \mathbf{Q} est isomorphe soit à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ soit à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$.

On applique alors les résultats de la section précédente. On considère l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \beta \in \mathbf{Z}[\Delta_1]^2 \times \mathbf{Z}[\Delta_2]^2 \left| \begin{array}{l} \tau_1(\beta_1) = \beta_2, \tau_2(\beta_3) = \beta_4 \\ \exists(\beta'_1, n_1) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \beta_1\beta_2 = \beta'_1 n_1 \\ \exists(\beta'_2, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \beta_3\beta_4 = \beta'_2 n_2 \\ \text{avec } \sqrt{\beta'_1\beta'_2} \in \mathbf{Z} \text{ et } n_1, n_2 \in N_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}}(\mathbf{Z}[\sqrt{a}]) \end{array} \right. \right\}$$

ainsi que le sous-ensemble \mathcal{B}_M^Σ des $\beta \in \mathcal{B}$ pour lesquels il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $m \mid \Delta_3$ tels que

$$\beta'_1 = \beta'_2 = \varepsilon m.$$

Pour $\beta \in \mathcal{B}$, on pose \mathcal{T}_β le sous-ensemble constructible de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{10} = \text{Spec}(\mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leq i \leq 4])$ défini par le système des deux équations quadratiques suivantes, invariant sous le groupe de Galois \mathcal{G}

$$\phi_1^\beta = \phi_2^\beta = 0$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^\beta = \beta_1 \Delta_{23} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) + 2\sqrt{\Delta_1} (X_1X_2 + Y_1Y_2) \right) \\ \quad - \beta_2 \Delta_{13} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) - 2\sqrt{\Delta_1} (X_1X_2 + Y_1Y_2) \right) \\ \quad + \beta_3 \Delta_{12} \left(X_3^2 + Y_3^2 + \Delta_2 (X_4^2 - aY_4^2) + 2\sqrt{\Delta_2} (X_3X_4 + Y_3Y_4) \right) \\ \phi_2^\beta = \beta_1 \Delta_{24} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) + 2\sqrt{\Delta_1} (X_1X_2 + Y_1Y_2) \right) \\ \quad - \beta_2 \Delta_{14} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) - 2\sqrt{\Delta_1} (X_1X_2 + Y_1Y_2) \right) \\ \quad + \beta_4 \Delta_{12} \left(X_3^2 + Y_3^2 + \Delta_2 (X_4^2 - aY_4^2) - 2\sqrt{\Delta_2} (X_3X_4 + Y_3Y_4) \right), \end{array} \right.$$

et les conditions (4.19). Soit enfin $\pi_\beta : \mathcal{T}_\beta \rightarrow S$ le morphisme défini en section précédente. Le lemme suivant découle alors immédiatement des résultats de la section précédente.

Lemme 4.1. — *Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, la variété \mathcal{T}_β équipée du morphisme π_β et de l'action naturelle de T_{NS} définie de la même façon que dans [BBP12, section 4] est un toseur versel pour $S_{a,F}$ et*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_M^\Sigma} \pi_\beta(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Z})).$$

Sur $\pi_\beta(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q}))$, on a alors

$$Q_1(u, v) = \beta_1\beta_2 \left[(X_1^2 - Y_1^2 - \Delta_1(X_2^2 - Y_2^2))^2 - a(X_1X_2 - \Delta_1Y_1Y_2)^2 \right]$$

et

$$Q_2(u, v) = \beta_3\beta_4 \left[(X_3^2 - Y_3^2 - \Delta_2(X_4^2 - Y_4^2))^2 - a(X_3X_4 - \Delta_2X_4Y_4)^2 \right].$$

Or, lors de la preuve du principe de Manin, les auteurs de [BT13] se ramènent à un problème de comptage sur certaines variétés de la forme

$$F_i(u, v) = \beta_i(X_i^2 + Y_i^2) \quad (i \in \{1, 2\}). \quad (4.22)$$

4.3.4. *Un cas de surface de Châtelet LC.* — Dans le cas où F est le produit d'une forme linéaire par une forme cubique, il existe plusieurs possibilités pour le groupe de Galois du corps de décomposition de C (voir [Con]), ce qui complique la descente de Galois. On s'intéresse aux cas de la forme $F(u, v) = (\alpha u + \beta v)(u^3 - 2v^3)$ avec α et β deux entiers à titre d'exemple. On a

$$C(u, v) = u^3 - 2v^3 = (u - \sqrt[3]{2}v)(u - j\sqrt[3]{2}v)(u - j^2\sqrt[3]{2}v)$$

et le groupe de Galois du corps de décomposition de $C(X, 1)$ est \mathfrak{S}_3 . On considère alors les variables invariantes par le groupe de Galois suivantes

$$X_i = \frac{Z_i^+ + Z_i^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{Z_i^+ - Z_i^-}{2\sqrt{a}}$$

pour $i \in \{0, 1\}$ et

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{Z_2^+ + Z_2^- + Z_3^+ + Z_3^- + Z_4^+ + Z_4^-}{6} \\ Y_2 &= \frac{Z_2^+ - Z_2^- + Z_3^+ - Z_3^- + Z_4^+ - Z_4^-}{6\sqrt{a}} \\ X_3 &= \frac{\sqrt[3]{2}(Z_2^+ + Z_2^-) + j\sqrt[3]{2}(Z_3^+ + Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{2}(Z_4^+ + Z_4^-)}{6} \\ Y_3 &= \frac{\sqrt[3]{2}(Z_2^+ - Z_2^-) + j\sqrt[3]{2}(Z_3^+ - Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{2}(Z_4^+ - Z_4^-)}{6\sqrt{a}} \\ X_4 &= \frac{\sqrt[3]{4}(Z_2^+ + Z_2^-) + j\sqrt[3]{4}(Z_3^+ + Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{4}(Z_4^+ + Z_4^-)}{6} \\ Y_4 &= \frac{\sqrt[3]{4}(Z_2^+ - Z_2^-) + j\sqrt[3]{4}(Z_3^+ - Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{4}(Z_4^+ - Z_4^-)}{6\sqrt{a}} \end{aligned}$$

de sorte que, puisque les équations $P_{2,3,4}$ et $\frac{P_{1,2,3}}{\Delta_{2,3}} + \frac{P_{1,3,4}}{\Delta_{3,4}} + \frac{P_{1,4,2}}{\Delta_{4,2}}$ sont invariantes, en appliquant la procédure de la Proposition 4.3, on obtient qu'un anneau de Cox de $S_{a,F}$ est donné par

$$R^c = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leq i \leq 4]/(\phi_1, \phi_2)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 4X_2X_3 + 4Y_2Y_3 + X_4^2 - aY_4^2 \\ \phi_2 &= X_1^2 - aY_1^2 - \alpha(X_2^2 - aY_2^2 + X_3X_4 + Y_4Y_4) - \beta \left(X_2X_4 + Y_2Y_4 + \frac{X_3^2}{2} - a\frac{Y_3^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, un torseur versel est donné par l'ensemble constructible de \mathbf{A}^{10} défini par les équations ϕ_1 et ϕ_2 et les conditions (4.19). On pourrait obtenir les équations explicites de torseurs \mathcal{T}_γ tels que

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_M^\Sigma} \pi_\beta(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Z}))$$

en appliquant la même descente aux équations

$$P_{i,j,k}^{\mathbf{n}} = \Delta_{jk}n_iZ_i^+Z_i^- + \Delta_{ki}n_jZ_j^+Z_j^- + \Delta_{ij}n_kZ_k^+Z_k^-$$

pour $\mathbf{n} \in \Gamma_M^\Sigma$ mais les équations deviennent plus compliquées et on ne les donne pas explicitement ici.

4.3.5. *Un cas de surface de Châtelet* F . — Dans le cas où F est irréductible de degré 4, à nouveau il existe plusieurs possibilités pour le groupe de Galois du corps de décomposition de F ce qui complique la descente de Galois [Con]. On s'intéresse au cas $F(u, v) = u^4 - 2v^4$ à titre d'exemple. On a

$$F(u, v) = (u - \sqrt[4]{2}v)(u + \sqrt[4]{2}v)(u - i\sqrt[4]{2}v)(u + i\sqrt[4]{2}v).$$

On considère alors les variables invariantes par le groupe de Galois suivantes

$$X_0 = \frac{Z_0^+ + Z_0^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}}$$

et

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{Z_1^+ + Z_1^- + Z_2^+ + Z_2^- + Z_3^+ + Z_3^- + Z_4^+ + Z_4^-}{8} \\ Y_1 &= \frac{Z_1^+ - Z_1^- + Z_2^+ - Z_2^- + Z_3^+ - Z_3^- + Z_4^+ - Z_4^-}{8\sqrt{a}} \\ X_2 &= \frac{\sqrt[4]{2}(Z_1^+ + Z_1^-) - \sqrt[4]{2}(Z_2^+ + Z_2^-) + i\sqrt[4]{2}(Z_3^+ + Z_3^-) - i\sqrt[4]{2}(Z_4^+ + Z_4^-)}{8} \\ Y_2 &= \frac{\sqrt[4]{2}(Z_1^+ - Z_1^-) - \sqrt[4]{2}(Z_2^+ - Z_2^-) + i\sqrt[4]{2}(Z_3^+ - Z_3^-) - i\sqrt[4]{2}(Z_4^+ - Z_4^-)}{8\sqrt{a}} \\ X_3 &= \frac{\sqrt[2]{2}(Z_1^+ + Z_1^-) - \sqrt[2]{2}(Z_2^+ + Z_2^-) - \sqrt[2]{2}(Z_3^+ + Z_3^-) + \sqrt[2]{2}(Z_4^+ + Z_4^-)}{8} \\ Y_3 &= \frac{\sqrt[2]{2}(Z_1^+ - Z_1^-) - \sqrt[2]{2}(Z_2^+ - Z_2^-) - \sqrt[2]{2}(Z_3^+ - Z_3^-) + \sqrt[2]{2}(Z_4^+ - Z_4^-)}{8\sqrt{a}} \\ X_4 &= \frac{\sqrt[4]{8}(Z_1^+ + Z_1^-) - \sqrt[4]{8}(Z_2^+ + Z_2^-) - i\sqrt[4]{8}(Z_3^+ + Z_3^-) + i\sqrt[4]{8}(Z_4^+ + Z_4^-)}{8} \\ Y_4 &= \frac{\sqrt[4]{8}(Z_1^+ - Z_1^-) - \sqrt[4]{8}(Z_2^+ - Z_2^-) - i\sqrt[4]{8}(Z_3^+ - Z_3^-) + i\sqrt[4]{8}(Z_4^+ - Z_4^-)}{8\sqrt{a}} \end{aligned}$$

de sorte que puisque les équations $P_{1,2,3} + P_{1,2,4} + P_{1,3,4} + P_{2,3,4}$ et $\frac{P_{1,2,3} - P_{1,2,4} - P_{1,3,4} - P_{2,3,4}}{\sqrt{a}}$ sont invariantes, en appliquant la procédure de la Proposition 4.3, on obtient qu'un anneau de Cox de $S_{a,F}$ est donné par

$$R^c = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leq i \leq 4] / (\phi_1, \phi_2)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 4X_1X_3 + 4Y_1Y_3 + 2(X_2^2 - aY_2^2) + X_4^2 - aY_4^2 \\ \phi_2 &= X_3X_4 + Y_3Y_4 + 2(X_1X_2 + Y_1Y_2). \end{aligned}$$

Ainsi, un torseur versel est donné par l'ensemble constructible de \mathbf{A}^{10} défini par les équations ϕ_1 et ϕ_2 et les conditions (4.19). On pourrait obtenir les équations explicites de torseurs \mathcal{T}_γ tels que

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \Gamma_M^\Sigma} \pi_\beta(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Z}))$$

en appliquant la même descente aux équations

$$P_{i,j,k}^{\mathbf{n}} = \Delta_{jk}n_iZ_i^+Z_i^- + \Delta_{ki}n_jZ_j^+Z_j^- + \Delta_{ij}n_kZ_k^+Z_k^-$$

pour $\mathbf{n} \in \Gamma_M^\Sigma$ mais les équations deviennent plus compliquées on ne les donne pas explicitement ici.

4.3.6. *Le cas des surfaces* $S_{a,F}$ *avec* F *scindé du type* $L_1L_2 \dots L_n$. — On considère n formes linéaires non proportionnelles deux à deux L_1, \dots, L_n avec n un entier pair. On obtient de la même façon que la Proposition 4.1 qu'en posant

$$S_j = \left\{ p \text{ premier} : \left(\frac{a}{p}\right) = -1 \quad \text{et} \quad p \mid \prod_{k \neq j} \Delta_{j,k} \right\}$$

et

$$M = \prod_{j=1}^n \left\{ \prod_{p \in S_j} p^{\varepsilon_p} \mid \varepsilon_p \in \{0, 1\}^{S_j} \right\},$$

pour $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M$, l'ensemble constructible

$$\Delta_{jk}m_iZ_i^+Z_i^- + \Delta_{ki}m_jZ_j^+Z_j^- + \Delta_{ij}m_kZ_k^+Z_k^- = 0$$

et les inégalités

$$(Z_i^+ Z_i^-, Z_j^+ Z_j^-) \neq (0, 0)$$

définit un torseur versel pour $S_{a,F}$ et que dans ce cas,

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}) \in \Sigma \times M} \pi_{(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M})}(\mathcal{T}_{(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M})}(\mathbf{Z}))$$

où la réunion est disjointe et $\Sigma \times M$ est fini.

4.3.7. *Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F du type $Q_1 Q_2 \dots Q_{n/2}$.* — Soient n un entier pair et $n/2$ formes quadratiques non proportionnelles deux à deux $Q_1, \dots, Q_{n/2}$. La méthode est la même que dans le cas $Q_1 Q_2$. On pose, avec Δ_i le discriminant de Q_i et τ_i la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta_i})$ pour tout $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$, l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \beta \in \prod_{i=1}^{n/2} \mathbf{Z}[\Delta_i]^2 \left| \begin{array}{l} \tau_1(\beta_1) = \beta_2, \tau_2(\beta_3) = \beta_4, \dots, \tau_{n/2}(\beta_{n-1}) = \beta_n \\ \exists (\beta'_i, n_i) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \beta_1 \beta_2 = \beta'_1 n_1, \dots, \beta_{n-1} \beta_n = \beta'_{n/2} n_{n/2} \\ \text{avec } \sqrt{\beta'_1 \dots \beta'_{n/2}} \in \mathbf{Z} \text{ et } n_1, \dots, n_{n/2} \in N_{\mathbf{Q}[\sqrt{a}]/\mathbf{Q}}(\mathbf{Z}[\sqrt{a}]) \end{array} \right. \right\}.$$

L'ensemble constructible défini par les $n-2$ formes quadratiques $\phi_{i,j}^\beta$ pour $1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1$, $\beta \in \mathcal{B}$ et $j \in \{1, 2\}$ données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,1}^\beta = \beta_1 \Delta_{2,2i+1} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) + 2\sqrt{\Delta_1} (X_1 X_2 + Y_1 Y_2) \right) \\ \quad - \beta_2 \Delta_{1,2i+1} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) - 2\sqrt{\Delta_1} (X_1 X_2 + Y_1 Y_2) \right) \\ \quad + \beta_{2i+1} \Delta_{12} \left(X_{2i+1}^2 - aY_{2i+1}^2 + \Delta_2 (X_{2i+2}^2 - aY_{2i+2}^2) \right) \\ \quad + 2\sqrt{\Delta_{2i+1}} (X_{2i+1} X_{2i+2} + Y_{2i+1} Y_{2i+2}) \\ \phi_{i,2}^\beta = \beta_1 \Delta_{2,2i+2} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) + 2\sqrt{\Delta_1} (X_1 X_2 + Y_1 Y_2) \right) \\ \quad - \beta_2 \Delta_{1,2i+2} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 (X_2^2 - aY_2^2) - 2\sqrt{\Delta_1} (X_1 X_2 + Y_1 Y_2) \right) \\ \quad + \beta_{2i+2} \Delta_{12} \left(X_{2i+1}^2 - aY_{2i+1}^2 + \Delta_2 (X_{2i+2}^2 - aY_{2i+2}^2) \right) \\ \quad - 2\sqrt{\Delta_{2i+1}} (X_{2i+1} X_{2i+2} + Y_{2i+1} Y_{2i+2}) \end{array} \right\},$$

et les inégalités (4.19) sont des torseurs versels au-dessus de $S_{a,F}$ vérifiant

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_M^\Sigma} \pi_\beta(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Z})).$$

On décrit à présent dans la section suivante les torseurs utilisés dans les preuves du principe de Manin pour $a = -1$ connues à ce jour. On présente les résultats de cette section dans la plus grande généralité possible afin d'aider au traitement de la constante de Peyre dans le cas où le principe de Manin serait établi dans certains cas avec $n > 4$ ou pour les surfaces de Châtelet avec $a \neq 1$ en utilisant les torseurs décrits ci-dessous.

5. Les torseurs de type $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$

Comme mentionné dans l'introduction, la majeure partie des cas pour lesquels le principe de Manin et la conjecture de Peyre ont été obtenus grâce à une méthode de descente sur des torseurs versels l'a été dans le cas de variétés déployées, c'est-à-dire telle que l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique soit triviale. Dans ce cas, le groupe de Picard et le groupe de Picard géométrique coïncident. Le cas de la del Pezzo non déployée de [BB07], dont la géométrie a été étudiée dans la thèse de Pieropan [Pie15] est obtenu grâce à une descente sur des torseurs quasi-versels de type $\text{Pic}(X)$. On peut alors noter que cette del Pezzo singulière a des singularités isolées sur \mathbf{Q} . Dans le cas des surfaces $S_{a,F}$, les singularités sont définies sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et dans tous les cas de la preuve du principe de Manin traités à ce jour, on va établir que la descente a été effectuée en deux parties, une première descente sur un torseur intermédiaire puis une seconde sur des torseurs quasi-versels mais non versels. En effet, les variétés considérées dans la première

partie de cet article ne sont pas déployées, on s'attend par conséquent à ce que les toreseurs utilisés soient différents des toreseurs versels. Le passage successif du nombre de points rationnels de hauteur bornée à des sommes de type

$$\mathcal{S}(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap \mathcal{R}(X)} r_a(F(\mathbf{x})) \quad (5.23)$$

pour

$$\mathcal{R}(X) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq X, \quad F(\mathbf{x}) > 0\}$$

puis à des sommes de type

$$\mathcal{S}(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap \mathcal{R}(X)} r_a(F_1(\mathbf{x})) \cdots r_a(F_r(\mathbf{x}))$$

avec la notation (2.9) correspond à deux descentes successives. La première descente est une descente de la surface de Châtelet généralisée sur un toseur intermédiaire $\mathcal{T}_{\text{spl}} \subseteq \mathbf{A}^5$ d'équation

$$y^2 - az^2 = t^2 F(u, v)$$

avec $(y, z, t) \neq (0, 0, 0)$ et $(u, v) \neq (0, 0)$. Pieropan a alors établi dans sa thèse [Pie15] qu'il s'agissait d'un toseur quasi-versel de type $\lambda : \text{Pic}(S) \hookrightarrow \text{Pic}(\bar{S})$. La deuxième descente effectuée l'est de ce toseur intermédiaire \mathcal{T}_{spl} sur des variétés d'équations

$$F_i(u, v) = d_i(s_i^2 - at_i^2), \quad (i = 1, \dots, r) \quad (5.24)$$

La majeure partie de la vérification de la conjecture de Peyre de [Des16b] a donc été d'établir que ces variétés sont en réalité des toreseurs quasi-verseles d'un certain type et non des toreseurs versels. De manière analogue, on peut constater que parmi toutes les démonstrations du principe de Manin, le seul cas où une descente est utilisée sur les toreseurs versels est le cas scindé, auquel cas les toreseurs décrits dans cette section coïncident avec les toreseurs versels. Dans tous les autres cas, on effectue une descente sur d'autres toreseurs. Dans la plupart des cas, comprendre la géométrie derrière le problème de comptage et les toreseurs ne se révèle pas indispensable pour vérifier la conjecture de Peyre (même si la vérification de la constante peut se réexprimer en ces termes malgré tout) sauf dans le cas scindé (pour lequel il est établi dans [BBP12] que les variétés (5.23) sont des toreseurs versels), le cas où F est un produit de deux formes linéaires par un facteur quadratique (qui est traité dans [Des16b]) et le cas où F est un produit de deux facteurs quadratiques (où la vérification de la constante est complétée dans cet article en section 5.2). On décrit dans cette section les toreseurs quasi-verseles de type $\text{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \text{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$, établissant ainsi que toutes les démonstrations du principe de Manin pour les surfaces de Châtelet ont été réalisées à l'aide d'une descente sur ces toreseurs et complétant ainsi la démonstration de la vérification de la constante de Peyre dans le cas $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$. On donne aussi une expression de la constante qui permet de simplifier la vérification de la constante de Peyre dans de futurs travaux sur les surfaces $S_{a,F}$.

5.1. Description de $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$. — Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note $[D_{i,k}^\pm] = [D_{\sum_{\ell=1}^{i-1} d_\ell + k}^\pm]$ et $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}) = \text{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \text{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$.

Proposition 5.1. — *On a*

$$\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}) = [E^+] \mathbf{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^{d_i} [D_{i,k}^+] \mathbf{Z} \right) \oplus ([D_1^+] + [D_1^-]) \mathbf{Z}.$$

En particulier, le rang de $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ vaut $r + 2$.

Démonstration— On a que $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}) = (\text{Pic}(S_{a,F}))^{\mathfrak{g}}$ pour $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$. Soit

$$[D] = a [E^+] + \sum_{i=1}^n a_i [D_i^+] + f [D_1^-] \in (\text{Pic}(S_{\bar{\mathbf{Q}}}))^{\mathfrak{g}}.$$

On utilise alors le fait que $[E^+]$ est invariant par \mathfrak{g} et que le groupe \mathfrak{g} agit transitivement sur les racines de chaque F_i . En particulier, pour tout $i \in \{2, \dots, r\}$ et tous $k \neq \ell \in \{1, \dots, d_i\}$, il existe $g_{i,k,\ell} \in \mathfrak{g}$ tel que $g_{i,k,\ell} \left([D_{i,k}^+] \right) = [D_{i,\ell}^+]$. On a alors, puisque $[D_1^+]$ est invariant par $g_{i,k,\ell}$ l'égalité

$$\sigma_{i,k,\ell}([D]) = [D]$$

qui entraîne que $a_{i,k} = a_{i,\ell}$. De la même façon, dans le cas $i = 1$, pour $k \in \{2, \dots, d_1\}$, il existe $g_k \in \mathfrak{g}$ tel que $g_k([D_1^+]) = [D_k^+]$ si bien que $g_k([D_1^-]) = [D_k^-]$. On a alors

$$\sigma_k([D]) = [D]$$

qui entraîne que $a_1 - f = a_k$. On en déduit que

$$[D] = a[E^+] + \sum_{i=1}^r a_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + f([D_1^+] + [D_1^-]),$$

avec $a_i = a_{\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+}$ pour $1 \leq i \leq r$. Cela permet de conclure la démonstration. \square

Remarque— On peut prendre, comme cela est fait dans [Des16b], $[D_1^-]$ comme générateur à la place de $[D_1^+] + [D_1^-]$ dans le cas où F possède un facteur linéaire que l'on peut supposer étant égal à F_1 . Cela peut permettre de simplifier certains calculs.

On considère alors l'injection $\lambda : \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}) \hookrightarrow \text{Pic}(\overline{S_{a,F}})$ et on décrit les torseurs de type λ pour $S_{a,F}$. Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 5.1. — Supposons que $a \in \mathbf{Z}_{\neq 0}$ soit sans facteur carré et que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1. Il existe alors un ensemble fini J indexant des classes d'isomorphie de torseurs de type λ possédant un point rationnel, et pour tout $j \in J$ il existe un torseur $\pi_j : \mathcal{T}_j \rightarrow S_{a,F}$ de type λ tels que

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j(\mathcal{T}_j(\mathbf{Z}))$$

et

$$S_{a,F}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}(S)} = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j(\mathcal{T}_j(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})).$$

Ces torseurs peuvent être décrits explicitement. Par ailleurs, pour \mathcal{T} un torseur de type λ , il existe une variété \mathcal{X} tel que $\mathcal{T} = \mathcal{X} \times \mathbf{A}^2$ et telle que le complémentaire de l'origine \mathcal{X}° de \mathcal{X} soit isomorphe à l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2r+2} \setminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u, v) = n_i(s_i^2 - at_i^2), \quad (1 \leq i \leq r)$$

pour (n_1, \dots, n_r) vérifiant $n_1 \cdots n_r = y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z .

En particulier, les torseurs utilisés dans les différentes preuves du principe de Manin pour $a = -1$ sont des torseurs de type $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(i)})$.

Le reste de cette section est consacrée à la démonstration de ce théorème.

Suivant la démonstration de [DP14, proposition 5.8], un anneau de Cox R' de type λ est donné par l'anneau des invariants sous le groupe de Galois \mathcal{G} de

$$\bigoplus_{m \in \hat{T}} \overline{R}_m,$$

où \overline{R} a été défini (4.2), T est le tore dual de $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ et \overline{R}_m correspond aux éléments homogènes de degré m de \overline{R} . Supposons $m \in \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ donné par

$$m = a_0[E^+] + \sum_{i=1}^r a_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + a_{r+1}[D_1^+ + D_1^-]$$

avec $a_i \in \mathbf{Z}$. Pour déterminer \overline{R}_m , on cherche à résoudre le système linéaire donné par

$$\left[e_0^+ E^+ + e_0^- E^- + \sum_{j=1}^n (e_j^+ D_j^+ + e_j^- D_j^-) \right] = a_0[E^+] + \sum_{i=1}^r a_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + a_{r+1}[D_1^+ + D_1^-],$$

où les $e_j^\pm \geq 0$. Grâce aux relations (2.7) et (2.8), ce dernier est équivalent à

$$\begin{cases} a_0 = e_0^+ + e_0^- \\ a_1 = e_0^- + e_{1,1}^+ - e_{1,1}^- = \cdots = e_0^- + e_{1,d_1}^+ - e_{1,d_1}^- \\ a_2 = e_0^- + e_{2,1}^+ - e_{2,1}^- = \cdots = e_0^- + e_{2,d_2}^+ - e_{2,d_2}^- \\ \vdots \\ a_r = e_0^- + e_{r,1}^+ - e_{r,1}^- = \cdots = e_0^- + e_{r,d_r}^+ - e_{r,d_r}^- \\ a_{r+1} = -\frac{n}{2}e_0^- + \sum_{i=1}^n e_i^- \end{cases}$$

Ce système est résoluble si, et seulement si,

$$\begin{cases} e_{1,1}^+ - e_{1,1}^- = \cdots = e_{1,d_1}^+ - e_{1,d_1}^- \\ e_{2,1}^+ - e_{2,1}^- = \cdots = e_{2,d_2}^+ - e_{2,d_2}^- \\ \vdots \\ e_{r,1}^+ - e_{r,1}^- = \cdots = e_{r,d_r}^+ - e_{r,d_r}^- \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\overline{R'}$ est isomorphe au sous-anneau de \overline{R} engendré par les variables

$$\begin{aligned} \eta_0^\pm &= Z_0^\pm; & \eta_i &= Z_i^+ Z_i^- \quad (1 \leq i \leq n) & ; \eta_j^+ &= Z_{j,1}^+ \cdots Z_{j,d_j}^+ \quad (1 \leq j \leq r); \\ & & \eta_j^- &= Z_{j,1}^- \cdots Z_{j,d_j}^- \quad (1 \leq j \leq r). \end{aligned}$$

vérifiant les relations suivantes (d'après (4.16))

$$\Delta_{j,k}\eta_\ell + \Delta_{k,\ell}\eta_j + \Delta_{\ell,j}\eta_k = 0 \quad (1 \leq j < k < \ell \leq n) \quad (5.25)$$

ainsi que

$$\prod_{k=1}^{d_j} \eta_{j,k} = \eta_j^+ \eta_j^- \quad (1 \leq i \leq r). \quad (5.26)$$

On notera

$$\phi_i = \eta_j^+ \eta_j^- - \prod_{k=1}^{d_j} \eta_{j,k} \quad (1 \leq i \leq r)$$

et

$$P_{j,k,\ell} = \Delta_{j,k}\eta_\ell + \Delta_{k,\ell}\eta_j + \Delta_{\ell,j}\eta_k \quad (1 \leq j < k < \ell \leq n).$$

On notera également $\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i,d_i}$ les variables η_j correspondant au facteur irréductible F_i . On remarque que les équations ϕ_i pour $1 \leq i \leq r$ sont invariantes sous l'action du groupe de Galois \mathcal{G} . On pose alors

$$X_0 = \frac{Z_0^+ + Z_0^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}}$$

ainsi que

$$X_j = \frac{\eta_j^+ + \eta_j^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_j = \frac{\eta_j^+ - \eta_j^-}{2\sqrt{a}} \quad (1 \leq j \leq r) \quad (5.27)$$

et pour tout $1 \leq i \leq r$ les variables

$$X_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \beta_k^\ell \eta_{i,k}}{2d_i} \quad 0 \leq \ell \leq d_i - 1. \quad (5.28)$$

On constate alors que les variables $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r)$ sont \mathcal{G} -invariantes et que si l'on écrit les relations (5.27) et (5.28) sous la forme

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ \vdots \\ X_{r,d_r} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \eta_{1,1} \\ \eta_{1,2} \\ \vdots \\ \eta_{r,d_r} \end{pmatrix}$$

alors $\det(M) \neq 0$ si bien que cela implique que l'on puisse exprimer les η_i en termes des \mathbf{X} . On notera $\eta_i = f_i(\mathbf{X})$ avec f_i un polynôme de degré 1 à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ pour tout $1 \leq i \leq r$ tels que l'application $f_i \mapsto \eta_i$ soit équivariante si bien qu'on obtient que la \mathbf{Q} -algèbre

$$R_\lambda = \mathbf{Q}[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r] / \left(\tilde{P}_{j,k,\ell}, \tilde{\phi}_i \right)_{\substack{1 \leq j < k < \ell \leq n \\ 1 \leq i \leq r}} \quad (5.29)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{P}_{j,k,\ell}(X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r) = P_{j,k,\ell}(f_1(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})) & (1 \leq j < k < \ell \leq n) \\ \tilde{\phi}_i(X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r) = \phi_i(X_i \pm \sqrt{a}Y_i, f_1(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})) & (1 \leq i \leq r) \end{cases}$$

est un anneau de Cox pour $S_{a,F}$ sur \mathbf{Q} de type λ , où l'idéal est en réalité défini sur \mathbf{Q} puisque Galois invariant. On peut alors utiliser les équations $\tilde{P}_{j,k,\ell}$ pour éliminer chacune des variables \mathbf{X} excepté deux d'entre elles, que l'on notera T_1 et T_2 et on posera

$$f_i(\mathbf{X}) = \hat{f}_i(T_1, T_2)$$

pour \hat{f}_i un polynôme de degré 1 à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ pour tout $1 \leq i \leq r$ tels que l'application $f_i \mapsto \eta_i$ soit équivariante. On peut ainsi obtenir que

$$R_\lambda = \mathbf{Q}[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, T_1, T_2] / \left(\hat{\phi}_i \right)_{1 \leq i \leq r} \quad (5.30)$$

avec

$$\hat{\phi}_i(X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, T_1, T_2) = \phi_i(X_i \pm \sqrt{a}Y_i, \hat{f}_1(T_1, T_2), \dots, \hat{f}_n(T_1, T_2)) \quad (1 \leq i \leq r).$$

Cela est fait en détails dans la suite dans le cas où F est de degré 4 et se factorise sous la forme Q_1Q_2 avec Q_1, Q_2 deux formes quadratiques non proportionnelles. On peut noter que l'on retrouve le résultat de [Des16b] dans le cas de factorisation L_1L_2Q .

Le lemme suivant explicite le groupe de cohomologie $H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}))$.

Lemme 5.1. — *On a l'isomorphisme*

$$H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{a,F})).$$

Démonstration— Le point clé concernant les torseurs de type λ est que l'action du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$ est triviale si bien que

$$H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{a})), \text{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \text{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))) = \{0\}.$$

Ainsi, la suite exacte de restriction-inflation

$$0 \longrightarrow H^1(G, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}(\sqrt{a}), \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \quad (5.31)$$

avec $G = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q})$ fournit l'isomorphisme

$$H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong H^1(G, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})).$$

Puisque le groupe G est cyclique d'ordre 2 engendré par la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, notée σ , le groupe de cohomologie

$$H^1(G, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}))$$

coïncide avec l'homologie du complexe

$$\hat{T} \xrightarrow{\text{Id}+\sigma} \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}) \xrightarrow{\text{Id}-\sigma} \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}).$$

Autrement dit,

$$H^1(G, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong \text{Ker}(\sigma + \text{Id})/\text{Im}(\text{Id} - \sigma).$$

On obtient aisément le fait que $\text{Ker}(\sigma + \text{Id})$ est donné par les éléments

$$x_0 [E^+] + \sum_{i=1}^r x_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + x_{r+1} [D_1^+ + D_1^-]$$

tels que

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^r d_i x_i + 2x_{r+1} = 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

Deux cas se dégagent alors. Supposons dans un premier temps que tous les d_i soient pairs auquel cas les équations (5.32) se réécrivent

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^r \frac{d_i}{2} x_i + x_{r+1} = 0 \end{cases}$$

si bien qu'on obtient aisément que les éléments

$$\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] - \frac{d_i}{2} [D_1^+ + D_1^-] \quad (1 \leq i \leq r)$$

forment une base de $\text{Ker}(\sigma + \text{Id})$. S'il existe au moins un d_i impair, par exemple $d_1 = 2d'_1 + 1$, alors en posant $t = x_{r+1} + d'_1 x_1$, on obtient que les équations (5.32) sont équivalentes à

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = -\sum_{i=2}^r \frac{d_i}{2} x_i - 2t = 0 \\ x_{r+1} = d'_1 \sum_{i=2}^r \frac{d_i}{2} x_i + d_1 t. \end{cases}$$

Cela entraîne alors immédiatement qu'une \mathbf{Z} -base de $\text{Ker}(\sigma + \text{Id})$ est fournie dans ce cas par

$$-2 \left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+ \right] + d_1 [D_1^+ + D_1^-], \quad -d_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + d'_1 d_i [D_1^+ + D_1^-],$$

pour $2 \leq i \leq r$. D'autre part, $\text{Im}(\text{Id} - \sigma)$ est engendrée par

$$\sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] - \frac{n}{2} [D_1^+ + D_1^-]; \quad 2 \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] - d_i [D_1^+ + D_1^-] \quad (1 \leq i \leq r).$$

Commençons alors par le cas où tous les d_i sont pairs. Dans ce cas, puisque

$$\sum_{i=1}^r \left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] - \frac{d_i}{2} [D_1^+ + D_1^-] \right) = \sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] - \frac{n}{2} [D_1^+ + D_1^-],$$

le groupe $H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}))$ est engendré par $r - 1$ éléments d'ordre 2 et par conséquent

$$H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{r-1}.$$

Dans le cas où d_1 est impair, puisqu'on a

$$\begin{aligned} & -d_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + d'_1 d_i [D_1^+ + D_1^-] \\ &= -d_i \left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+ \right] + d_1 \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] + d'_1 \left(2 \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] - d_i [D_1^+ + D_1^-] \right) \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \left(-d_i \left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+ \right] + d_1 \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] \right) \\ &= -\frac{n}{2} \left(2 \left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+ \right] - d_1 [D_1^+ + D_1^-] \right) + d_1 \left(\sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+ \right] - \frac{n}{2} [D_1^+ + D_1^-] \right) \end{aligned}$$

il s'ensuit que le groupe $H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}))$ est engendré par $r - 2$ éléments d'ordre 2 et par conséquent

$$H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{r-2}.$$

On conclut alors grâce à la Proposition 2.3.1. \square

On est désormais en mesure de décrire tous les anneaux de Cox de $S_{a,F}$ de type λ . On s'inspire ici des deux démonstrations de [DP14, propositions 5.6-5.7]. On rappelle que T le tore dont le groupe des caractères est donné par $\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$. Tout élément de $H^1(\mathbf{Q}, T)$ est représenté par un cocycle $c : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}) \rightarrow T$,

lui-même déterminé par l'image $c_\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(T, \mathbf{Q}(\sqrt{a})^\times)$ de la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$.

On sait que, pour tout anneau de Cox R'_λ pour $S_{a,F}$ de type λ , il existe un cocycle $c : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}) \rightarrow T$ tel que R'_λ soit un twist de R_λ défini en (5.29). D'après [DP14, proposition 3.7], l'action de la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ sur $\overline{R_\lambda}$ est la suivante:

$$\sigma(Z_0^-) = c_\sigma([E^+]) Z_0^+$$

et

$$\sigma(\eta_j^-) = c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right) \eta_j^+; \quad \sigma(\eta_i) = c_\sigma([D_1^+ + D_1^-]) \eta_i.$$

On introduit alors $r_1 = c_\sigma([D_1^+])$. En prenant les nouvelles variables suivantes, invariantes sous l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q})$

$$X_0 = \frac{c_\sigma([E^+]) Z_0^+ + Z_0^-}{2}; \quad Y_0 = \frac{c_\sigma([E^+]) Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}};$$

$$X_i = \frac{c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right) \eta_i^+ + \eta_i^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right) \eta_i^+ - \eta_i^-}{2\sqrt{a}} \quad (1 \leq i \leq r)$$

et pour tout $1 \leq i \leq r$ les variables

$$X_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \beta_k^\ell r_1 \eta_{i,k}}{2d_i} \quad 0 \leq \ell \leq d_i - 1,$$

on obtient que R'_λ est isomorphe à la \mathbf{Q} -algèbre

$$R'_\lambda = \mathbf{Q}[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r] / \left(\tilde{P}_{j,k,\ell}^c, \tilde{\phi}_i^c \right)_{\substack{1 \leq j < k < \ell \leq n \\ 1 \leq i \leq r}}^{\mathcal{G}} \quad (5.33)$$

avec

$$\begin{cases} P_{j,k,\ell}^c = r_1 \times P_{j,k,\ell} & (1 \leq j < k < \ell \leq n) \\ \phi_i^c = r_1^{d_i} \times \phi_i & (1 \leq i \leq r) \end{cases}.$$

En particulier, on a

$$\phi_i^c = \prod_{k=1}^{d_i} r_1 \eta_{i,k} - r_1^{d_i} \eta_i^+ \eta_i^-$$

et

$$r_1^{d_i} \eta_i^+ \eta_i^- = c_\sigma\left(d_i [D_1^+] - \sum_{k=1}^{d_i} [D_{i,k}^+]\right) (X_i^2 - aY_i^2).$$

On peut alors obtenir explicitement R'_λ en raisonnant comme pour R_λ . Cela est fait en détails l'exemple $Q_1 Q_2$ dans la suite. On peut noter que l'on retrouve le résultat de [Des16b] dans le cas $L_1 L_2 Q$.

En utilisant (2.7), on constate alors que la quantité

$$n_{i,1}^c = r_1^{d_i} c_\sigma\left(\left[-\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right) = c_\sigma\left(d_i [D_1^+] - \sum_{k=1}^{d_i} [D_{i,k}^+]\right)$$

est invariante par conjugaison si bien que cette quantité est un nombre rationnel. En écrivant $n_{i,1}^c = n_i/n_0^{d_i}$, on obtient que R'_λ est isomorphe à la \mathbf{Q} -algèbre

$$R'_\lambda = \mathbf{Q}[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r] / \left(\tilde{P}_{j,k,\ell}^n, \tilde{\phi}_i^n \right)_{\substack{1 \leq j < k < \ell \leq n \\ 1 \leq i \leq r}}^{\mathcal{G}}$$

avec

$$\begin{cases} P_{j,k,\ell}^n = r_1 n_0 \times P_{j,k,\ell} & (1 \leq j < k < \ell \leq n) \\ \phi_i^n = r_1^{d_i} n_0^{d_i} \times \phi_i & (1 \leq i \leq r) \end{cases}.$$

En particulier, on a

$$\phi_i^n = \prod_{k=1}^{d_i} r_1 n_0 \eta_{i,k} - r_1^{d_i} n_0^{d_i} \eta_i^+ \eta_i^- \quad \text{où} \quad r_1^{d_i} n_0^{d_i} \eta_i^+ \eta_i^- = n_i (X_i^2 - aY_i^2).$$

Puisque les conditions de cocycle s'écrivent

$$c_\sigma([E^+]) \sigma(c_\sigma([E^-])) = 1 \quad \text{et} \quad c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right) \sigma\left(c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^-\right]\right)\right) = 1,$$

les relations (5.27) et (5.28) fournissent

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^r n_i &= n_0^n c_\sigma\left(n[D_1^+] - \left[\sum_{k=1}^n D_k^+\right]\right) \\ &= c_\sigma\left([E^+ + \frac{n}{2}(D_1^+ + D_1^-)]\right) \sigma\left(c_\sigma\left([E^+ + \frac{n}{2}(D_1^+ + D_1^-)]\right)\right) \end{aligned}$$

si bien que $\prod_{i=1}^r n_i$ est bien de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z . On peut établir plus précisément, en suivant [DP14, proposition 5.7] qu'étant donné $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{Q}^\times$, il existe un cocycle $c : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}) \rightarrow T$ si, et seulement si, le produit $\prod_{i=1}^r n_i$ est de cette forme.

De façon analogue au Lemme 4.1, on voit que pour $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^r$ tel que $\prod_{i=1}^r n_i$ soit de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z , le sous-ensemble constructible $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}$ de

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2r+4} = \text{Spec}(\mathbf{Q}[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r, T_1, T_2])$$

défini par l'idéal $(\hat{\phi}_i)_{1 \leq i \leq r}$ donné par (5.30) et les inégalités

$$\forall i \neq j \in \llbracket 0, r \rrbracket^4, \quad ((X_i, Y_i), (X_j, Y_j)) \neq ((0, 0), (0, 0))$$

et

$$\forall i \neq j, \quad (\hat{f}_i(T_1, T_2), \hat{f}_j(T_1, T_2)) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

est un torseur de type λ au-dessus de $S_{a,F}$. Pour toute extension finie k de \mathbf{Q} et pour tout $((x_i, y_i), \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)_{0 \leq i \leq r}$ dans $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}(k)$, à l'aide de

$$u = \frac{1}{\Delta_{12}} (b_2 r_1 n_0 \eta_1 - b_1 r_1 n_0 \eta_2) \tag{5.34}$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{12}} (-a_2 r_1 n_0 \eta_2 + a_1 r_1 n_0 \eta_2) \tag{5.35}$$

(qui sont bien dans k car invariants par le groupe de Galois), on peut définir comme en section précédente un morphisme $\pi_{\mathbf{n}} : \mathcal{T}_{\mathbf{n}} \rightarrow S_{a,F}$. Grâce aux relations (5.26), on a

$$L_i(u, v) = r_1 n_0 \eta_i$$

si bien que

$$F_i(u, v) = n_i (X_i^2 - a Y_i^2).$$

Lorsque \mathbf{n} est de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad n_i = \varepsilon_i m_i$$

pour un certain $(\varepsilon, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M$, on note $\mathcal{T}_{\mathbf{n}} = \mathcal{T}_{\mathbf{m}, \varepsilon}$ et $\pi_{\mathbf{n}} = \pi_{\mathbf{m}, \varepsilon}$. On peut alors montrer comme lors de la démonstration du Lemme 4.1 qu'on a l'égalité

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{(\varepsilon, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M} \pi_{\mathbf{m}, \varepsilon}(\mathcal{T}_{\mathbf{m}, \varepsilon}(\mathbf{Z})). \tag{5.36}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{m}, \varepsilon}(\mathcal{T}_{\mathbf{m}, \varepsilon}(\mathbf{Z})) &= \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4 \left| \begin{array}{l} (t, u, v, x_3, x_4) \in \mathbf{Z}^5, (t, u, v) = (x_3, x_4) = 1 \\ t \geq 0, x_3^2 - ax_4^2 = t^2 F(u, v), \\ \varepsilon_i F_i(u, v) > 0 \\ \nu_p(F_i(u, v)) - \mu_i \equiv 0 \pmod{2} \\ F_i(u, v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right. \right\} \\ &\bigsqcup \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4 \left| \begin{array}{l} (t, u, v, x_3, x_4) \in \mathbf{Z}^5, (t, u, v) = (x_3, x_4) = 1 \\ t \geq 0, x_3^2 - ax_4^2 = t^2 F(u, v), \\ \varepsilon_i F_i(-u, -v) > 0 \\ \nu_p(F_i(u, v)) - \mu_i \equiv 0 \pmod{2} \\ F_i(-u, -v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right. \right\}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

lorsqu'il existe un facteur irréductible de degré impair de F et sinon, on a

$$\pi_{\mathbf{m},\varepsilon}(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\varepsilon}(\mathbf{Z})) = \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4 \left| \begin{array}{l} (t, u, v, x_3, x_4) \in \mathbf{Z}^5, (t, u, v) = (x_3, x_4) = 1 \\ t \geq 0, x_3^2 - ax_4^2 = t^2 F(u, v), \\ \varepsilon_i F_i(u, v) > 0 \\ \nu_p(F_i(u, v)) - \mu_i \equiv 0 \pmod{2} \\ F_i(u, v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right. \right\}. \quad (5.38)$$

À nouveau de la même façon qu'en section précédente, on montre, en notant $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}$ le sous-schéma de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2r+4}$ défini par l'idéal $(\hat{\phi}_i)_{1 \leq i \leq r}$, que $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}$ est égal au produit $\mathcal{X}_{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^2$. Si $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}^{\circ}$ le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}$, on a alors un isomorphisme entre l'intersection complète \mathcal{V} de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2r+4} \setminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u, v) = n_i(X_i^2 - aY_i^2).$$

En effet, le morphisme $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}^{\circ} \rightarrow \mathcal{V}$ est donné par (5.34) et (5.35) tandis que le morphisme réciproque est donné par $\eta_{i,k} = L_i(u, v)$. On retrouve ainsi une variété de la forme (5.24) et il s'agit donc bel et bien des toiseurs utilisés dans les preuves du principe de Manin lorsque $a = -1$ dans [BBP12], [BB12], [BT13] et [Des16b].

On donne alors deux derniers lemmes qui permettent d'exprimer la constante conjecturée par Peyre de manière adéquate à notre traitement du problème de comptage.

Lemme 5.2. — On a $\text{III}^1(\mathbf{Q}, T) = \{0\}$ où

$$\text{III}^1(\mathbf{Q}, T) = \text{Ker} \left(H^1(\mathbf{Q}, T) \longrightarrow H^1(\mathbf{R}, T) \prod_p H^1(\mathbf{Q}_p, T) \right).$$

Démonstration— La démonstration est identique à celle de [Des16b]. □

Lemme 5.3. — On a l'égalité

$$S_{a,F}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}(S)} = \bigsqcup_{(\mathbf{m},\varepsilon) \in M \times \Sigma} \pi_{\mathbf{m},\varepsilon}(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\varepsilon}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})),$$

où $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ désigne l'anneau des adèles de \mathbf{Q} .

Démonstration— La démonstration est à nouveau identique à [Des16b] une fois que l'on a précisé que, dans le cas général, $\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})/\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ est engendré par les classes de $[D_{i,k}^+]$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $k \in \{1, \dots, d_i - 1\}$ et que la conjugaison agit sur $\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})/\text{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ comme $-\text{Id}$, ce qui entraîne

$$\left(\text{Pic}(\overline{S_{a,F}})/\hat{T} \right)^{\mathcal{G}} = \{0\}.$$

□

Le Lemme 5.3 fournit

$$c_S = \alpha(S)\beta(S) \sum_{\substack{\varepsilon \in \Sigma \\ \mathbf{m} \in M}} \omega_H(\pi_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathcal{T}_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})))$$

et on écrit

$$\omega_H(\pi_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathcal{T}_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))) = \omega_{\infty}(\varepsilon, \mathbf{m}) \prod_p \omega_p(\varepsilon, \mathbf{m}),$$

où, en passant comme dans [BBP12] et [BB12] aux densités sur le toiseur intermédiaire \mathcal{T}_{spl} défini par l'équation (4.14), l'on a pour tout nombre premier p l'égalité

$$\omega_p(\varepsilon, \mathbf{m}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^{4n}} \# \left\{ (u, v, y, z, t) \in (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})^5 \left| \begin{array}{l} t^2 F(u, v) \equiv y^2 - az^2 \pmod{p^n} \\ p \nmid (u, v), \quad p \nmid (y, z, t) \\ 2|\nu_p(F_i(u, v)) - \mu_i \end{array} \right. \right\}.$$

5.2. Le cas des surfaces de Châtelet avec $a = -1$ et $F = Q_1Q_2$. — Soient $a = -1$ et $F = Q_1Q_2$ pour deux formes quadratiques non proportionnelles irréductibles sur $\mathbf{Q}(i)$. On notera Δ_i le discriminant de Q_i pour $i \in \{1, 2\}$. D'après ce qui précède, tout anneau de Cox de type λ est isomorphe à une \mathbf{Q} -algèbre de la forme

$$\left(\mathbf{Q}[\eta_0^\pm, \dots, \eta_r^\pm, \eta_1, \dots, \eta_n] / (P_{j,k,\ell}^{\mathbf{n}}, \phi_i^{\mathbf{n}})_{\substack{1 \leq j < k < \ell \leq 4 \\ 1 \leq i \leq 2}} \right)^{\mathcal{G}}$$

avec

$$P_{j,k,\ell}^c = \Delta_{j,k} r_1 n_0 \eta_\ell + \Delta_{k,\ell} r_1 n_0 \eta_j + \Delta_{\ell,j} r_1 n_0 \eta_k \quad (1 \leq j < k < \ell \leq n)$$

ainsi que

$$\phi_i^c = \prod_{k=1}^{d_j} r_1 n_0 \eta_{j,k} - n_i (X_i^2 + Y_i^2) \quad (1 \leq i \leq r).$$

On a alors en posant les variables équivariantes suivantes

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{c_\sigma ([E^+]) Z_0^+ + Z_0^-}{2}; & Y_0 &= \frac{c_\sigma ([E^+]) Z_0^+ - Z_0^-}{2i}; \\ X_1 &= \frac{c_\sigma ([D_1^+ + D_2^+]) \eta_1^+ + \eta_1^-}{2} & \text{et} & \quad Y_1 = \frac{c_\sigma ([D_1^+ + D_2^+]) \eta_1^+ - \eta_1^-}{2i}, \\ X_2 &= \frac{c_\sigma ([D_3^+ + D_4^+]) \eta_2^+ + \eta_2^-}{2} & \text{et} & \quad Y_2 = \frac{c_\sigma ([D_3^+ + D_4^+]) \eta_2^+ - \eta_2^-}{2i}, \end{aligned}$$

et pour tout $1 \leq i \leq 2$ les variables équivariantes suivantes

$$T_{i,1} = \frac{n_0 r_1 (\eta_1 + \eta_2)}{2} \quad \text{et} \quad T_{i,2} = \frac{n_0 r_1 (\eta_1 - \eta_2)}{2\sqrt{\Delta_i}}$$

que tout anneau de Cox de type λ est isomorphe à une \mathbf{Q} -algèbre de la forme

$$\mathbf{Q}[X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2, T_{1,1}, T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}] / (f_1^{\mathbf{n}}, f_2^{\mathbf{n}}, \phi_1^{\mathbf{n}}, \phi_2^{\mathbf{n}})$$

avec

$$\begin{aligned} f_1^{\mathbf{n}} &= 2\Delta_{1,2} T_{2,1} + (\Delta_{2,3} + \Delta_{2,4}) (T_{1,1} + \sqrt{\Delta_1} T_{1,2}) + (\Delta_{3,1} + \Delta_{4,1}) (T_{1,1} - \sqrt{\Delta_1} T_{1,2}); \\ f_2^{\mathbf{n}} &= 2\Delta_{1,2} \sqrt{\Delta_2} T_{2,2} + (\Delta_{2,3} - \Delta_{2,4}) (T_{1,1} + \sqrt{\Delta_1} T_{1,2}) + (\Delta_{3,1} - \Delta_{4,1}) (T_{1,1} - \sqrt{\Delta_1} T_{1,2}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_1^{\mathbf{n}} &= n_1 (X_1^2 - aY_1^2) - \frac{1}{\Delta_{3,4}^2} ((\Delta_{1,4} \Delta_{2,4} + \Delta_{1,4} \Delta_{3,2} + \Delta_{2,4} \Delta_{3,1} + \Delta_{3,1} \Delta_{3,2}) T_{2,1}^2 \\ &\quad + 2\sqrt{\Delta_2} (\Delta_{1,4} \Delta_{2,4} - \Delta_{3,1} \Delta_{3,2}) T_{2,2} T_{2,1} \\ &\quad + (\Delta_{1,4} \Delta_{2,4} - \Delta_2 \Delta_{1,4} \Delta_{3,2} - \Delta_2 \Delta_{2,4} \Delta_{3,1} + \Delta_{3,1} \Delta_{3,2}) T_{2,1}^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_2^{\mathbf{n}} &= n_2 (X_2^2 - aY_2^2) - \frac{1}{\Delta_{1,2}^2} ((\Delta_{3,2} \Delta_{4,2} + \Delta_{3,2} \Delta_{1,4} + \Delta_{4,2} \Delta_{1,3} + \Delta_{1,3} \Delta_{1,4}) T_{1,1}^2 \\ &\quad + 2\sqrt{\Delta_1} (\Delta_{3,2} \Delta_{4,2} - \Delta_{1,3} \Delta_{1,4}) T_{1,2} T_{1,1} \\ &\quad + (\Delta_{3,2} \Delta_{4,2} - \Delta_1 \Delta_{3,2} \Delta_{1,4} - \Delta_1 \Delta_{4,2} \Delta_{1,3} + \Delta_{1,3} \Delta_{1,4}) T_{1,1}^2). \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\Delta_{12}} (b_2 (T_{1,2} + \sqrt{\Delta_1} T_{1,2}) - b_1 (T_{1,2} - \sqrt{\Delta_1} T_{1,2})) \\ &= \frac{1}{\Delta_{34}} (b_4 (T_{2,2} + \sqrt{\Delta_2} T_{2,2}) - b_3 (T_{2,2} - \sqrt{\Delta_2} T_{2,2})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\Delta_{12}} (-a_2 (T_{1,2} + \sqrt{\Delta_1} T_{1,2}) + a_1 (T_{1,2} - \sqrt{\Delta_1} T_{1,2})) \\ &= \frac{1}{\Delta_{34}} (-a_4 (T_{2,2} + \sqrt{\Delta_2} T_{2,2}) + a_3 (T_{2,2} - \sqrt{\Delta_2} T_{2,2})) \end{aligned}$$

on obtient alors, en notant $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}^\circ$ le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}$, un isomorphisme entre $\mathcal{X}_{\mathbf{n}}^\circ$ et l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^8 \setminus \{0\}$ donnée par les équations

$$Q_i(u, v) = n_i (X_i^2 - aY_i^2). \quad (i \in \{1, 2\})$$

On retrouve ainsi une variété de la forme (5.24) et il s'agit donc bel et bien des toreseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin dans [BT13]. On peut alors traiter la constante de Peyre comme cela est fait dans

[BT13] en remplaçant toutes les occurrences de “torseurs versels” par “torseurs de type λ ”, $\omega_H(V_{(\varepsilon, m_3)}(\mathbf{Q}))$ par $\omega_H(\mathcal{T}_{(\varepsilon, m_3)}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))$ dans la formule (9.46) et en utilisant (5.38).

6. Appendice : Les entiers a tels que $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit de nombre de classes égal à 1

On notera dans toute la suite $K = \mathbf{Q}(\sqrt{a})$, h_K et h_K^+ respectivement le nombre de classes et le nombre de classes restreint de K ainsi que ε l’unité fondamentale et on supposera que $h_K = 1$. On tire de la théorie du genre de Gauss (voir par exemple [Has80]) que le 2-rang du groupe de classes restreint est donné par le nombre de facteurs premiers distincts du discriminant fondamental de K diminué de un. De plus, on a $h_K^+ \in \{1, 2\}$ et $h_K^+ = 1$ si, et seulement si, la norme de l’unité fondamentale vaut -1 . On a alors deux possibilités, le lemme suivant décrivant la première.

Lemme 6.1. — *Soit $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ sans facteur carré tel que $K = \mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit de nombre de classes et de nombre de classes restreint égaux à 1. Alors ces hypothèses sont équivalentes au fait que a soit un nombre premier congrus à 1 modulo 4 et que le nombre de classe de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ vaille 1 ou alors $a = 2$. Dans tous les cas, l’équation $x^2 - ay^2 = -1$ admet une solution avec $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, l’équation $x^2 - ay^2 = n$ est résoluble si, et seulement si, $\nu_p(|n|) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout nombre premier p tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.*

Démonstration— On sait d’après la théorie du genre de Gauss que le cardinal de le 2-rang du groupe de classe restreint est donné par le nombre de facteurs premiers distincts du discriminant fondamental de K diminué de un. On en déduit que a est nécessairement un nombre premier.

Réciproquement, pour tout nombre premier $p \equiv 1 \pmod{4}$ tel que le nombre de classe de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ soit égal à 1, on sait que dans ce cas, la norme de l’unité fondamentale vaut -1 . On peut notamment extraire l’argument suivant de [FK10]. On note D un discriminant fondamental de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$. On a alors

$$\begin{cases} h_K^+ = 2h_K \text{ si } N_{K/\mathbf{Q}}(\varepsilon) = 1 \\ h_K^+ = h_K \text{ si } N_{K/\mathbf{Q}}(\varepsilon) = -1. \end{cases}$$

Le fait que a soit un nombre premier implique par le même argument que ci-dessus que h_K^+ est impair si bien que nécessairement $h_K^+ = h_K$ et $N_{K/\mathbf{Q}}(\varepsilon) = -1$.

Considérons à présent a un nombre premier p congru à 1 modulo 4 tel que K soit de nombre de classe 1. On a alors $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{p}}{2}\right]$ et l’unité fondamentale $\varepsilon = \frac{u+t\sqrt{p}}{2}$ avec u et t deux entiers de même parité, qui est de norme -1 . Commençons par considérer le cas $p \equiv 1 \pmod{8}$. La démonstration suivante, tirée de [FJ13], permet d’établir que dans ce cas $u \equiv t \equiv 0 \pmod{2}$ et ainsi l’équation $x^2 - py^2 = -1$ admet bien des solutions avec x et y entiers. En effet, du fait que ε soit de norme -1 , on tire l’équation

$$u^2 - pt^2 = -4$$

et une inspection des carrés modulus 8 fournit alors qu’on a nécessairement $(u^2, t^2) \equiv (4, 0) \pmod{8}$ ou $(u^2, t^2) \equiv (0, 4) \pmod{8}$, ce qui permet de conclure. Supposons alors à présent que $p \equiv 5 \pmod{8}$ et que u et t soient impairs (dans le cas contraire, il n’y a rien à faire). Dans ce cas, on va établir que ε^3 est dans $\mathbf{Z}[\sqrt{p}]$ et puisque $N_{K/\mathbf{Q}}(\varepsilon^3) = -1$, cela permettra de conclure. Un rapide calcul fournit alors

$$\varepsilon^3 = \frac{u(u^2 + 3pt^2) + t\sqrt{p}(3u^2 + pt^2)}{8}.$$

On a alors aisément que

$$u^2 + 3pt^2 \equiv 3u^2 + pt^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

lorsque $p \equiv 5 \pmod{8}$. □

Dans le cas contraire, on a $h_K = 1$ et $h_K^+ = 2$. On sait alors d’après ce qui précède que a est soit un nombre premier congru à 3 modulo 4, soit un produit de deux nombres premiers impairs de même résidu modulo 4 soit de la forme $2p$ avec p un nombre premier impair. Dans tous les cas on démontre alors le résultat suivant.

Lemme 6.2. — *Soient $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ sans facteur carré tel que $K = \mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit de nombre de classes égal à 1 et de nombre de classes restreint égal à 2 ainsi que $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ tel que $\nu_p(|m|) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout nombre premier p tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Alors exactement une des deux équations $m = x^2 - ay^2$ ou $-m = x^2 - ay^2$ admet des solutions avec $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$.*

Démonstration— Soit $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ tel que $\nu_p(|m|) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout nombre premier p tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Ces conditions assurent qu'il existe un idéal de \mathcal{O}_K de norme $|m|$ et puisque $h_K = 1$, il existe un élément de norme m ou $-m$. Ainsi, l'une des deux équations $m = x^2 - ay^2$ ou $-m = x^2 - ay^2$ admet des solutions avec $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$.

Pour montrer qu'elles n'admettent pas toutes les deux de solutions, on fait appel à la proposition 5.11 de [XW13]. Avec les notations de [XW13], il suffit de montrer que $c_m c_{-m} = 0$. Or, puisque $h_K = 1$ et $h_K^+ = 2$, le groupe de Galois du corps de Hilbert restreint sur K est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et ainsi tout automorphisme de ce groupe de Galois au carré est égal à l'identité. Cette propriété ajoutée à la remarque qui suit la démonstration de la proposition 5.11 de [XW13] permet aisément d'obtenir, avec les notations de [XW13], que, sous nos hypothèses

$$\begin{aligned} c_m c_{-m} &= \left(\prod_{p_i \in Q_1} (e_i + 1) + \prod_{p_i \in P(D)} \phi(\sigma_{p_i})^{t_i} \prod_{p_i \in Q_1} (e_i + 1) \phi(\sigma_{p_i})^{e_i} \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{p_i \in Q_1} (e_i + 1) - \prod_{p_i \in P(D)} \phi(\sigma_{p_i})^{t_i} \prod_{p_i \in Q_1} (e_i + 1) \phi(\sigma_{p_i})^{e_i} \right) \\ &= \prod_{p_i \in Q_1} (e_i + 1)^2 - \prod_{p_i \in P(D)} \phi(\sigma_{p_i})^{2t_i} \prod_{p_i \in Q_1} (e_i + 1)^2 \phi(\sigma_{p_i})^{2e_i} = 0 \end{aligned}$$

où ϕ est un générateur du groupe des caractères du groupe de Galois du corps de Hilbert restreint sur K . Cela permet de conclure la démonstration. \square

Remerciements.— L'auteur tient ici à exprimer toute sa gratitude à son directeur de thèse Régis de la Bretèche pour ses relectures mais aussi à Marta Pieropan, Ulrich Derenthal et Emmanuel Peyre pour de nombreux échanges de mails éclairants à propos de la machinerie des anneaux de Cox, et enfin à Étienne Fouvry et Florent Jouve pour m'avoir aidé à caractériser les a tels que $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit de nombre de classes égal à 1 et notamment pour m'avoir indiqué certains éléments de la démonstration du Lemme 6.1.

Références

- [ADHL15] I. ARZHANTSEV, U. DERENTHAL, J. HAUSEN et A. LAFACE : Cox rings, volume **144** of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, (2015). \uparrow 9, 11
- [BB07] R. de la BRETÈCHE et T. BROWNING : On Manin's conjecture for singular del Pezzo surfaces of degree four, II. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **143**, 579–605, (2007). \uparrow 2, 20
- [BB08] R. de la BRETÈCHE et T. BROWNING : Binary linear forms as sums of two squares. *Compositio Mathematica*, **144** (6), 1375–1402, (2008). \uparrow 2
- [BB12] R. de la BRETÈCHE et T. BROWNING : Binary forms as sums of two squares and Châtelet surfaces. *Israel Journal of Math.* **191**, (2012). \uparrow 1, 3, 4, 16, 28
- [BBP12] R. de la BRETÈCHE, T. BROWNING et E. PEYRE : On Manin's conjecture for a family of Châtelet surfaces. *Annals of Mathematics*, **175**, 1–47. Une version plus longue est aussi disponible à l'adresse <http://arxiv.org/abs/1002.0255>, (2012). \uparrow 1, 3, 4, 6, 7, 11, 15, 16, 17, 21, 28
- [BHB17] T.D. BROWNING et D.R. HEATH-BROWN : Forms in many variables and differing degrees. *J. Eur. Math. Soc.* **9**, 357–394, (2017). \uparrow 10
- [Bir62] B.J. BIRCH : Forms in many variables. *Proc. Roy. Soc. Ser.*, 245–263, (1962). \uparrow 10
- [BM90] V. BATYREV et Y. MANIN : Sur le nombres de points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques. *Math. Ann.* **286**(1-3), 27–43, (1990). \uparrow 9
- [Bro10] T.D. BROWNING : Linear growth for Châtelet surfaces. *Math. Annalen* **346**, 41–50, (2010). \uparrow 7, 8
- [BT13] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM : Conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet. *À paraître au Journal de l'Institut de Jussieu*, (2013). \uparrow 1, 2, 3, 4, 5, 16, 17, 18, 28, 29, 30
- [Con] K. CONRAD : Galois groups of cubics and quartics (not in characteristic 2). <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/galoistheory/cubicquartic.pdf>. \uparrow 18, 19
- [CR99] H. COHEN et X.-F. ROBLOT : Computing the Hilbert class field of real quadratic fields. *Math. of Computation* **69**(231), 1229–1244, (1999). \uparrow 5
- [CTCS80] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. CONRAY et J.J. SANSUC : Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. *J. reine angew. Math.* **320**, 150–191, (1980). \uparrow 2, 6
- [CTHS05] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. HARARI et A.N. SKOROBOGATOV : Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann). *Exp. Math.*, **23**, 161–170, (2005). \uparrow 2

- [CTS77] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.J. SANSUC : La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **284**, 1215–1218, (1977). ↑ 2
- [CTS79] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.J. SANSUC : La descente sur les variétés rationnelles. *Journées de géométrie algébrique d'Angers*, 223–237, (1979). ↑ 2
- [CTS82] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC : Sur le principe de hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel. *Acta Arithmetica*, **XLI**, 33–53, (1982). ↑ 6, 10
- [CTS87] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.J. SANSUC : La descente sur les variétés rationnelles II. *Duke Math. J.* **54**, 375–492, (1987). ↑ 2, 3
- [CTSSD87a] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.J. SANSUC et H.P.F. SWINNERTON-DYER : Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I. *J. reine angew. Math.* **373**, 37–101, (1987). ↑ 10
- [CTSSD87b] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.J. SANSUC et H.P.F. SWINNERTON-DYER : Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II. *J. reine angew. Math.* **374**, 72–168, (1987). ↑ 6, 10
- [Des16a] K. DESTAGNOL : La conjecture de Manin pour une famille de variétés en dimension supérieure. *Accepté pour publication dans Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, <https://arxiv.org/abs/1612.06898>, (2016). ↑ 2
- [Des16b] K. DESTAGNOL : La conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet. *Acta Arithmetica*, **174**, (2), 31–97, (2016). ↑ 1, 3, 4, 7, 8, 13, 16, 17, 21, 22, 24, 26, 28
- [DP14] U. DERENTHAL et M. PIEROPAN : Cox rings over nonclosed fields. *Prépublication*, <https://arxiv.org/abs/1408.5358>, (2014). ↑ 1, 2, 3, 5, 11, 22, 25, 26, 27
- [FJ13] É. FOUVRY et F. JOUVE : A positive density of fundamental discriminants with large regulator. *Pacific J. of Math.*, **262**, 81–107, (2013). ↑ 30
- [FK10] É. FOUVRY et J. KLÜNERS : On the negative Pell equation. *Ann. of Math.*, **172**, 2035–2104, (2010). ↑ 30
- [Has80] H. HASSE : *Number Theory, Grundlehren der Math. Wiss.*, **229**. Springer-Verlag, New York, 1980. ↑ 30
- [Le 16] P. LE BOUDEC : Manin's conjecture for two quartic del Pezzo surfaces with $3A_1$ and $A_1 + A_2$ singularity types. *Acta Arithmetica*, **151**, 109–163, (2016). ↑ 2
- [Pey95] E. PEYRE : Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.* **79**, 101–218, (1995). ↑ 2, 9
- [Pey01] E. PEYRE : Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **15**, (2003), 319–349. Les XXIIèmes Journées Arithmétiques (Lilles, 2001). ↑ 7, 10
- [Pie15] M. PIEROPAN : Torsors and generalized Cox rings for Manin's conjecture. *PhD Thesis*, <http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh15/828227667.pdf>, (2015). ↑ 1, 3, 5, 20, 21
- [Sal98] P. SALBERGER : Tamagawa numbers of universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Nombre et répartition de points de hauteur bornée*, **251**, 91–258, (1998). ↑ 2, 10
- [San80] J.-J. SANSUC : Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. reine angew. Math.* **327**, 12–80, (1980). ↑ 10
- [Sko] A. SKOROBOGATOV : *Torsors and rational points*, volume 16. Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2001). ↑ 3, 4, 5, 10
- [Wei47] A. WEIL : *Foundations of algebraic geometry*. Colloquium Publications, volume **29**, AMS, (1947). ↑ 13, 14
- [XW13] F. XU et D. WEI : Counting integral points in certain homogeneous spaces. *Prépublication*, <http://arxiv.org/abs/1211.2286>, (2013). ↑ 31

1 novembre 2017

KEVIN DESTAGNOL, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, Université Paris Diderot-Paris 7, Case postale 6052, Bâtiment Sophie Germain, 75205 Paris Cedex 13, France, et Max Planck Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany • *E-mail* : kdestagnol@mpim-bonn.mpg.de
Url : <http://guests.mpim-bonn.mpg.de/kdestagnol/>