ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE :

là méthode de Romberg-Richardson

Daniel PERRIN

Ce qui suit est largement inspiré de l'excellent livre de J.-L. Ovaert et J.-L. Verley, Analyse, Vol. 1, Cedic, malheureusement introuvable depuis la disparition de l'éditeur.

0. Rapidité de convergence.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers a. On cherche à préciser la rapidité de convergence de (u_n). Pour cela on compare la suite $v_n = u_n - a$, qui tend vers 0, à des suites de référence. Ici, comparer signifie qu'on cherche une suite r_n connue telle que v_n soit équivalente à r_n ou à λr_n avec $\lambda \neq 0$ ([1]) ou, à défaut, que v_n soit un $O(r_n)$ ("un grand O" de r_n). Rappelons que ceci signifie qu'il existe une constante $M > 0$ telle que l'on ait, pour n assez grand, $|v_n| \leq M|r_n|$.

On distingue d'abord les convergences **lentes** : c'est le cas si v_n est de l'ordre de $1/n$, $1/n^2$, $1/\sqrt{n}$, ou plus généralement $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Ces convergences sont lentes car il faut, par exemple dans le cas $\alpha = 2$, calculer au moins $10^{p/2}$ termes de la suite pour obtenir a avec une précision de 10^{-p}, c'est-à-dire obtenir p chiffres dans le développement décimal de a. La situation est pire encore pour $\alpha < 1$, ou surtout pour des convergences logarithmiques (en $1/\ln(n)$).

Il y a ensuite la convergence **géométrique** de rapport k, c'est le cas où v_n est de l'ordre de k^n avec $|k| < 1$. Par exemple, si k vaut $1/10$, on gagne un chiffre du développement décimal à chaque pas.

Il y a enfin les convergences **rapides** lorsque v_n est de l'ordre de k^{r^n} avec $0 < k < 1$ et $r > 1$ (convergence dite d'ordre r). Par exemple pour $k = 1/10$ et $r = 2$ on passe en un pas d'une précision de p décimales à une de $2p$ décimales.

Exemples.

1) Pour les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f de classe C^1, on sait que si la suite converge vers a, point fixe de la fonction f c'est que l'on a $|f'(a)| \leq 1$ (sauf si la suite est constante à partir d'un certain rang). Alors, la convergence est lente dans le cas $|f'(a)| = 1$ ([2]), elle est géométrique de l'ordre de $|f'(a)^n|$ dans le cas $0 < |f'(a)| < 1$, et elle est rapide dans le cas $f'(a) = 0$.

---

[1] On dira dans ce cas que v_n est "de l'ordre de" r_n.

[2] Lorsqu'il y a convergence, ce qui n'est pas assuré, dans ce cas.

2) Dans le cas de la série exponentielle

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!},$$

la convergence vers vers e est intermédiaire entre les convergences géométriques et les convergences rapides. En effet, le reste de la série est majoré par $\dfrac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$ et la conclusion vient de la formule de Stirling. En revanche, la convergence de la suite

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

vers la même limite e est lente (de l'ordre de $1/n$).

Lorsqu'on a une suite convergente (u_n), on va chercher des procédés pour accélérer sa convergence, c'est-à-dire pour remplacer (u_n) par une suite (u'_n) qui converge vers la même limite, mais plus rapidement. Bien entendu, l'intérêt de ces procédés est lié à la programmation de (u_n) sur une calculette ou un ordinateur.

2. Accélération de convergence : méthode de Romberg-Richardson.

Cette méthode s'applique lorsqu'on a une suite u_n qui converge vers a avec une convergence géométrique de rapport $k < 1$ et qu'on connaît le rapport k (ce qui, il faut bien le noter n'est pas toujours le cas et limite un peu l'intérêt du procédé). Précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 1.
Soit u_n une suite de nombres réels qui converge vers a. On suppose qu'on a un développement asymptotique de la forme

$$u_n = a + \lambda k^n + O(k'^n) \tag{1}$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ et $|k'| < |k| < 1$, de sorte que la convergence de u_n vers a est géométrique de rapport k. On pose

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1-k}.$$

Alors, $u'_n - a$ est un $O(k'^n)$ et donc u'_n converge vers a avec une convergence qui est (au moins) géométrique de rapport k'.

Remarque 2. Bien entendu, pour que la méthode précédente ait un sens et un intérêt, il faut :
1) connaître le rapport k, indispensable pour calculer u'_n,
2) ne pas connaître le coefficient λ (sinon il suffit de retrancher bêtement λk^n pour avoir aussitôt une suite qui converge comme un $O(k'^n)$).
L'exemple de l'approximation de π par les longueurs des polygones réguliers inscrits fournit un cas où cette méthode s'applique, voir ci-dessous.

Démonstration. (du théorème 1) Avant de démontrer le théorème, essayons expliquons d'où sort la suite u'_n. Il s'agit d'éliminer le terme en k^n dans l'expression de u_n. L'idée, faute de connaître λ, est de regarder u_{n+1}, puis, en calculant $u_{n+1} - ku_n$, d'éliminer les k^n entre les deux termes. Maintenant, on note que $u_{n+1} - ku_n$ converge vers $(1-k)a$ et, en divisant par $1-k$, on trouve une suite u'_n qui converge vers a.

Précisément, posons $u_n = a + \lambda k^n + w_n$, de sorte que w_n est un $O(k'^n)$. Un calcul immédiat donne

$$u'_n - a = \frac{w_{n+1} - kw_n}{1-k}.$$

Si on a $|w_n| \leq A\,|k'|^n$, on a alors

$$|u'_n - a| \leq \frac{|w_{n+1}| + |k|\,|w_n|}{1-k} \leq \frac{A\,(|k'| + |k|)}{1-k}\,|k'^n| = M|k'^n|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on n'est pas satisfait de l'accélération de convergence ainsi réalisée on peut itérer le procédé. Précisément, soit $u = (u_n)$ une suite, et définissons la suite $R_k(u)$ (suite associée à u par le procédé de Romberg-Richardson d'ordre k) par la formule :

$$R_k(u)_n = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1-k}.$$

(On notera que R_k est un endomorphisme de l'espace vectoriel des suites et qu'on a $R_1(u) = u'$ au sens précédent.) Alors, on a le théorème suivant :

Théorème 3.
Soit u_n une suite de nombres réels qui converge vers a. On suppose qu'on a un développement asymptotique de la forme

$$u_n = a + \lambda_1 k_1^n + \lambda_2 k_2^n + \cdots + \lambda_r k_r^n + O(k_{r+1}^n)$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$, et $|k_{r+1}| < |k_r| < \cdots < |k_2| < |k_1| < 1$, alors, si on pose

$$v_n = R_{k_r} \circ \cdots \circ R_{k_2} \circ R_{k_1}(u)_n$$

la suite v_n converge vers a et $v_n - a$ est un $O(k_{r+1}^n)$.

Démonstration. Facile par récurrence sur r.

3. Accélération de convergence : méthode d'Aitken.

C'est une variante de la méthode précédente qui permet de faire le calcul lorsqu'on sait qu'on a un développement asymptotique de la forme (1) dans lequel on ne connaît pas explicitement la quantité k. L'astuce est de trouver k quand même (ou presque) avec la remarque suivante : u_n, u_{n+1}, u_{n-1} sont respectivement de l'ordre de k^n, k^{n+1}, k^{n-1} et donc k n'est pas très différent de

$$c_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$$

(l'intérêt de considérer les différences $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ est de faire disparaître la limite a qui est évidemment inconnue). On est alors amené à regarder la suite

$$v'_n = \frac{u_{n+1} - c_n u_n}{1 - c_n}$$

et on a le théorème suivant

Théorème 4 (Aitken).
Avec les notations précédentes, si u_n admet un développement asymptotique du

type (1), la suite v'_n converge vers a et $v_n - a$ est un $O(k'^n)$, de sorte qu'on gagne la même rapidité de convergence que dans la méthode de Romberg-Richardson.

Démonstration. En remplaçant c_n par sa valeur on obtient

$$u'_n = \frac{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}}{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}} = \frac{N}{D} \quad \text{d'où} \quad u'_n - a = \frac{N - aD}{D}.$$

On pose $u_n = a + \lambda k^n + w_n$, et on suppose qu'on a $|w_n| \leq A\,|k'^n|$. On voit alors que le dénominateur D de $u'_n - a$ est équivalent à $-\lambda(k-1)^2 k^{n-1}$, tandis que le numérateur $N - aD$ qui vaut

$$N - aD = \lambda k^{n-1}(2kw_n - k^2 w_{n-1} - w_{n+1}) + w_n^2 - w_{n+1}w_{n-1}$$

est majoré en valeur absolue par $M_0|k|^{n-1}|k'|^n$ où M_0 est une constante > 0 et on en déduit que $|u'_n - a|$ est bien majoré par $M|k'|^n$ avec $M > 0$.

4. Une variante dans le cas de la convergence lente.

Lorsque la suite (u_n) converge vers a avec une convergence lente (disons en $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 0$) la méthode de Romberg-Richardson ne s'applique pas telle quelle, mais on va donner une variante qui permet aussi d'accélérer la convergence, cf. exemples 5.2 et 5.3.

Théorème 5.
Soit u_n une suite de nombres réels qui converge vers a. On suppose qu'on a un développement asymptotique de la forme

$$u_n = a + \frac{\lambda}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \tag{2}$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, et $0 < \alpha < \beta$, de sorte que la convergence de u_n vers a est une convergence lente de l'ordre de $1/n^\alpha$. On pose

$$u'_n = \frac{2^\alpha u_{2n} - u_n}{2^\alpha - 1}.$$

Alors, u'_n converge vers a et $u'_n - a$ est un $O(\frac{1}{n^\beta})$.

Démonstration. On pose $w_n = u_n - a - \lambda/n^\alpha$ et on montre aussitôt la formule

$$u'_n = a + \frac{2^\alpha w_{2n} - w_n}{2^\alpha - 1}$$

et le résultat s'ensuit grâce à la majoration de w_n.

Remarques 6.
1) Là encore, pour que la méthode s'applique, il faut connaître α, mais pas nécessairement λ. Si on connaît λ on peut retrancher directement $\dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ de u_n et obtenir une suite u''_n qui converge vers a comme w_n vers 0, donc plus rapidement que u_n. Cependant, le lecteur vérifiera que, si α est ≥ 1 et si w_n est équivalente à μ/n^β, la méthode du théorème 5 donne une convergence un peu plus rapide que celle de w_n (mais en contrepartie, on calcule des termes d'indices plus élevés).
2) On notera la similitude des méthodes des théorèmes 1 et 5, l'astuce étant ici d'utiliser u_{2n} au lieu de u_{n+1}. D'ailleurs on peut aussi accélérer la convergence

de u_n avec la méthode de Romberg-Richardson, mais en l'appliquant à la suite $v_n = u_{2^n}$ (voire à u_{10^n}), ce qui est possible puisque, si on a $u_n - a \sim \lambda/n^\alpha$, on a $v_n - a \sim \lambda/(2^\alpha)^n$. Là encore, on gagne en rapidité mais il faut calculer des termes d'indices élevés, cf. Exemple 2.

5. Exemples.

1. Approximation de π.

On se reportera au papier [P] concernant π pour les détails de la construction de la suite u_n. La suite u_n représente le demi-périmètre du polygone régulier à n côtés et on calcule ses termes par récurrence, sans utiliser π, bien entendu. On a la formule :

$$u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

Pour appliquer la méthode de Romberg-Richardson, il suffit de développer $\sin x$ au voisinage de 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+1}).$$

On en déduit :

$$u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \pi - \frac{\pi^3}{6} \frac{1}{4^n} + O(\frac{1}{16^n})$$

et on peut appliquer le théorème 1 avec $k = \frac{1}{4}$, $\lambda = -\frac{\pi^3}{6}$, $k' = \frac{1}{16}$ (on notera que le coefficient λ n'est pas "connu" puisqu'il fait intervenir π que l'on cherche justement à calculer). Bien entendu, comme on connaît le développement du sinus à un ordre quelconque on peut itérer la méthode comme au théorème 2 (les valeurs suivantes des k_i sont 1/16 et 1/64). Voici un exemple des résultats numériques ainsi obtenus (rappelons que l'on a, en réalité, $\pi = 3,141592654$) :
Avec u_n elle même :

$$u_2 = 2,828427125, \quad u_3 = 3,061467459, \quad u_4 = 3,121445152,$$

$$u_5 = 3,136548523, \quad u_6 = 3,14033105,$$

avec $u'_n = (4u_{n+1} - u_n)/3$ (première suite de Romberg-Richardson) :

$$u'_2 = 3,13914757, \quad u'_3 = 3,141437716, \quad u'_4 = 3,14158298, \quad u'_5 = 3,141591892,$$

avec $u''_n = (16u'_{n+1} - u'_n)/15$ (Romberg bis) :

$$u''_2 = 3,141590392, \quad u''_3 = 3,141592664, \quad u''_4 = 3,141592486,$$

enfin, avec $u'''_n = (64u''_{n+1} - u''_n)/63$ (Romberg ter) :

$$u'''_2 = 3,1415927, \quad u'''_3 = 3,141592483.$$

On notera que la meilleure valeur est donnée par u''_3 (les erreurs dans les suivantes proviennent sans doute des erreurs d'arrondis des calculettes qui sont amplifiées par les multiplications, notamment par 64).

2. Approximation de e.

On utilise l'approximation de e par la suite $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Cette convergence est lente. Pour le voir, on écrit

$$u_n = \exp\left(n\ln(1+1/n)\right)$$

et on utilise les développements limités du logarithme et de l'exponentielle au voisinage de 0. On obtient (3)

$$u_n = e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}-\frac{21}{48n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On peut appliquer le théorème 5, mais il est plus efficace ici d'appliquer la méthode de Romberg-Richardson à la suite $v_n = u_{2^n}$. Les coefficients k_i qui interviennent étant successivement $1/2, 1/4$ et $1/8$ les trois suites à considérer sont $v'_n = 2v_{n+1}-v_n$, $v''_n = (4v'_{n+1}-v'_n)/3$ et $v'''_n = (8v''_{n+1}-v''_n)/7$.
On obtient les valeurs suivantes en calculant jusqu'à v_5 :

$v_5 = 2,676990129, \quad v'_4 = 2,716051761, \quad v''_3 = 2,718044855, \quad v'''_2 = 2,718235685,$

(rappelons que l'on a $e = 2,718281828$, de sorte que v'''_2 a 4 décimales exactes).

3. La constante d'Euler.

On considère la suite

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln(n)$$

qui est croissante et admet une limite que l'on appelle la constante d'Euler et qui est notée γ. Cette suite représente la somme des aires de $n-1$ petits triangles curvilignes, coincés entre la courbe $y = 1/x$ et les segments $k \le x \le k+1$, $y = 1/k$ avec k entier. La convergence de cette suite est lente (de l'ordre de $1/n$). Précisément, on montre, en minorant les aires des triangles curvilignes par celles des vrais triangles ayant les mêmes sommets, l'inégalité :

$$0 \le \gamma - u_n - \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2n^2}.$$

On peut donc déjà accélérer la convergence en remplaçant u_n par la suite $v_n = u_n + (1/2n)$. On peut ensuite accélérer encore la convergence en appliquant le théorème 5 à v_n (4) i.e. en considérant $v'_n = \frac{4\,v_{2n}-v_n}{3}$.
Les résultats obtenus sont les suivants (pour $n = 10$)

$$u_n = 0,626383, \quad v_n = 0,576383, \quad v'_n = 0,577215457$$

(en réalité, on a $\gamma = 0,577215664\cdots$ de sorte que v_{10} admet 6 décimales exactes).

Référence : Moisan, Vernotte, Tosel : Analyse Math sup p 277...

[P] Perrin D., Aire du disque, longueur du cercle, approximation de π. (Polycopié CAPES, Orsay, 1994-95).

(3) L'essentiel est que l'on ait un développement limité avec des termes en $1/n$, $1/n^2$, etc., les coefficients importent peu.

(4) On peut montrer en utilisant la formule dite d'Euler Mac-Laurin que $v_n - \gamma$ est équivalent à $-1/12n^2$.