PRÉPARATION À L'AGRÉGATION INTERNE
Ecrit d'analyse

ORSAY 2008-2009

Concours Blanc 1

(le 20 Septembre 2008)

PROBLÈME 1. –

Dans tout le problème, a et b sont deux réels, a strictement inférieur à b, $I = [a, b]$ est un intervalle compact et toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

On dira que la fonction f définie sur I est *dérivable* sur I si elle est dérivable sur $]a, b[$, et dérivable à droite en a et à gauche en b. On notera $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ respectivement la dérivée à droite en a et la dérivée à gauche en b.

On notera:

$\mathcal{B}(I)$ l'ensemble des fonctions bornées sur I;
$\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I;
$\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I;
$\mathcal{D}^\star(I)$ l'ensemble des fonctions qui sont les dérivées des éléments de $\mathcal{D}(I)$.

On dira qu'une fonction f définie sur I possède la propriété des valeurs intermédiaires, si l'image par f de tout intervalle fermé inclu dans I est un intervalle.

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $[0, 1]$.

Les fonctions étudiées dans la partie I pourront être utilisées, à divers stades du problème, comme exemples ou contre-exemples.

Partie I

Dans cette partie, r et s sont deux réels strictement positifs, et $f_{r,s}$ est la fonction définie sur J par:

$$\begin{cases} f_{r,s}(0) = 0 \\ f_{r,s}(x) = x^r \sin(\frac{1}{x^s}) \quad \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

1.1. Montrer que la fonction $f_{r,s}$ appartient à $\mathcal{C}(J)$.
1.2. Déterminer l'ensemble E des couples (r, s) tels que $f_{r,s}$ appartienne à $\mathcal{D}(J)$.
1.3. Déterminer l'ensemble des couples (r, s) de E tels que $f'_{r,s}$ appartienne à $\mathcal{B}(J)$.
1.4. Déterminer l'ensemble des couples (r, s) de E tels que $f'_{r,s}$ appartienne à $\mathcal{C}(J)$.

Partie II

On désigne par $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I qui possèdent la propriété suivante: il existe au moins deux fonctions F et G de $\mathcal{D}(I)$ telles que, quelque soit x dans I, $G'(x) \leq f(x) \leq F'(x)$. Si f appartient à $\mathcal{P}(I)$, on note $S(f)$ l'ensemble des fonctions F de $\mathcal{D}(I)$ vérifiant $f(x) \leq F'(x)$ et $s(f)$ l'ensemble des fonctions G de $\mathcal{D}(I)$ vérifiant $G'(x) \leq f(x)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}^\star(I) \subset \mathcal{P}(I)$ et que $\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{P}(I)$.
2. On définit la fonction f sur J de la façon suivante:

$$f(0) = 0 \text{ et pour tout } n \geq 1, \text{ si } x \text{ appartient à }]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}], \; f(x) = n$$

Montrer que, dans l'hypothèse de l'existence de la fonction $F \in S(f)$, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$F(\frac{1}{n}) - F(\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{n+1}$$

3. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(I)$. Montrer que pour toute fonction F de $S(f)$ et pour toute fonction G de $s(f)$, on a l'inégalité: $F(b) - F(a) \geq G(b) - G(a)$.

En déduire que si f est dans $\mathcal{P}(I)$, on définit deux nombres réels $p_+(f)$ et $p_-(f)$ par les formules:

$$p_+(f) = inf\{F(b) - F(a)/F \in S(f)\} \quad \text{et} \quad p_-(f) = sup\{G(b) - G(a)/G \in s(f)\}$$

et que l'on a $p_-(f) \leq p_+(f)$.

4. f étant une fonction définie sur I, on dira que f est P-intégrable sur I si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

i. f est dans $\mathcal{P}(I)$

ii. $p_-(f) = p_+(f)$.

On note alors $p(f)$ la valeur $p_-(f) = p_+(f)$ et on dit que $p(f)$ est la P-intégrale de f sur I.

4.a. Montrer que si f est dans $\mathcal{D}^*(I)$, alors f est P-intégrable sur I.

4.b. Montrer que si f est continue sur I, alors f est P-intégrable sur I. Quelle est alors la valeur de $p(f)$?

5.a. Montrer que l'ensemble des fonctions P-intégrables sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \mapsto p(f)$ est une forme linéaire sur cet espace.

5.b. Montrer que si f et g sont deux fonctions P-intégrables sur I vérifiant $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors $p(f) \leq p(g)$.

PROBLÈME 2. –

Dans tout le problème, $\mathscr{E}$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ouvert fixé J de $\mathbb{R}$, et indéfiniment dérivables sur J. On dit que $x_0 \in$ J est un zéro de $f \in \mathscr{E}$ d'ordre au moins $n \geqslant 1$ si f et toutes ses dérivées d'ordre strictement inférieur à n s'annulent en x_0 ; si de plus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ le zéro x_0 est dit d'ordre n ; si toutes les dérivées de f s'annulent en x_0, on dit que x_0 est un zéro d'ordre $+\infty$.

On fixe d'autre part un intervalle non ponctuel I $\subset$ J ; I peut être ouvert, ou fermé, ou ni l'un ni l'autre. Si, dans I, f a un nombre fini de zéros $x_1, \ldots, x_s$ d'ordres tous finis $n_1, \ldots, n_s$, on pose $Z(f) = n_1 + \cdots + n_s$. Si f ne s'annule pas dans I, on pose $Z(f) = 0$, et si f a une infinité de zéros dans I ou un zéro d'ordre $+\infty$ dans I, on pose $Z(f) = +\infty$.

I

1° *a*) Montrer que pour que $x_0 \in$ J soit un zéro d'ordre au moins n de f il faut et il suffit qu'il existe une fonction g_n numérique continue sur J telle que, pour tout $x \in$ J,

$$f(x) = (x - x_0)^n \, g_n(x)$$

et que x_0 est un zéro d'ordre n si, et seulement si, $g_n(x_0) \neq 0$.

***b*)** Montrer que si x_0 est d'ordre fini il existe un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset$ J dans lequel f n'admet pas d'autre zérò que x_0 et donner un exemple de fonction $f \in \mathscr{E}$ non constamment nulle dans J montrant que la propriété précédente est inexacte si x_0 est d'ordre $+\infty$.

***c*)** Si x_0 est un zéro d'ordre au moins n de f, montrer que, pour tout $x \in$ J, avec les notations de **1° *a*)**,

$$g_1(x) = \int_0^1 f'(x + t(x_0 - x))\, dt$$

et que $g_n \in \mathscr{E}$.

2° Dans cette question, on suppose que $I = [a, b] \subset$ J.

***a*)** Si $f \in \mathscr{E}$ n'a dans I que des zéros d'ordre fini, $Z(f)$ peut-il être infini ?

***b*)** Si $Z(f)$ est fini, avec $f(a)f(b) \neq 0$, montrer que la parité de $Z(f)$ ne dépend que du signe de $f(a)f(b)$.

***c*)** Si $Z(f)$ est fini, montrer que $Z(f') \geqslant Z(f) - 1$ et donner un exemple pour lequel $Z(f') = Z(f) - 1$. Si de plus $f(a)f'(a) > 0$ ou $f(b)f'(b) < 0$, montrer que $Z(f') \geqslant Z(f)$.

***d*)** Si $Z(f) = +\infty$, montrer que $Z(f') = +\infty$. La réciproque est-elle exacte ?

3° Soit $f \in \mathcal{E}$, $u \in \mathcal{E}$ et I tel que $Z(u) = 0$. Comparer $Z(uf)$ à $Z(f)$.

4° Soit φ une fonction numérique définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle $J_1 \subset \mathbb{R}$; on suppose que φ' ne s'annule pas et que l'image de J_1 par φ contient J. Pour $f \in \mathcal{E}$ et I fixés, montrer que l'image réciproque de I par φ est un intervalle I′ et comparer $Z(f)$ relatif à I avec $Z(f \circ \varphi)$ relatif à I′.

II

Dans toute la suite du problème, on considère des suites finies $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} (n \geqslant 1)$ de nombres réels non tous nuls, et on note $N(a)$ le nombre des changements de signe dans a en ne tenant pas compte des éléments nuls de a ; autrement dit, $N(a)$ est le nombre des indices $j \in [1, n]$ pour lesquels il existe un indice $i \in [0, j[$ tel que $a_i a_j < 0$ avec $a_{i+1} = \ldots = a_{j-1} = 0$.

1° Soit $I = J = \mathbb{R}$, avec les notations du début du problème, et $f \in \mathcal{E}$ définie par $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{-\lambda_i x}$, où les a_i sont des réels non tous nuls et les λ_i des réels *tous différents* rangés dans l'ordre $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_n$. La suite $a = (a_0, \ldots, a_n)$ et la suite $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent respectivement suite de coefficients et suite d'exposants de f.

a) Montrer que toute autre suite de coefficients de f (associée à une autre suite d'exposants) ne diffère de la suite a que par des termes nuls ; en déduire que $N(a)$ ne dépend que de f.

b) On suppose dans cette question que $N(a) \geqslant 1$, que les a_i sont tous non nuls, et on choisit un indice $i \in [1, n]$ tel que $a_{i-1} a_i < 0$ et un réel $\mu \in]\lambda_{i-1}, \lambda_i[$. Calculer en fonction de $N(a)$ la valeur de $N(b)$ pour une suite b de coefficients de g définie par $g(x) = e^{-\mu x}(e^{\mu x} f(x))'$ et comparer $Z(g)$ à $Z(f)$.

c) Montrer que $Z(f)$ est fini et que $N(a) - Z(f)$ est positif et pair.

2° Soit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$, $Z_1(f)$ le nombre des racines strictement positives de f, $Z_2(f)$ celui de ses racines strictement négatives, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. En posant $a = (a_0, \ldots, a_n)$ montrer que $N(a) - Z_1(f)$ est positif et pair. En utilisant la suite $a' = ((-1)^i a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, établir un résultat analogue liant $N(a')$ et $Z_2(f)$.

3° On considère la fonction F définie sur $I = J = \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^x$$

où les C_n^k sont les coefficients du binôme.

a) Majorer $Z(F)$.

b) On définit par récurrence les polynômes f_j par

$$f_0(x) = (x-1)^n \quad \text{et} \quad f_{j+1}(x) = x \frac{d}{dx} f_j(x).$$

Comparer $F(j)$ à $f_j(1)$ et en déduire la liste des zéros de F avec leurs ordres respectifs.

Les questions 1 a) b) c) sont FACULTATIVES, mais le résultat du c) sert dans la suite.

III

On considère une suite finie $h_0, \ldots, h_n$ de fonctions à valeurs réelles définies et indéfiniment dérivables sur un même intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

D'autre part, étant donné p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ à valeurs réelles, indéfiniment dérivables sur I, on note $W(f_1, \ldots, f_p)$ le déterminant des $f_j^{(k)}$ $(j = 1, \ldots, p ; k = 0, \ldots, p-1)$ où $f_j^{(k)}$ désigne la $k^{\text{ème}}$ dérivée de f_j si $k \geqslant 1$ et f_j elle-même si $k = 0$.

1° Montrer que l'égalité $W(h_{n_1}, \ldots, h_{n_p})(x_0) = 0$ équivaut à l'existence d'une suite finie $a \in \mathbb{R}^p$ de réels a_j non tous nuls tels que la fonction $\sum_{j=1}^{p} a_j h_{n_j}$ ait en $x_0 \in I$ un zéro d'ordre au moins p.

⊛ 2° On suppose dans cette question que la suite $h_0, \dots, h_n$ a la propriété suivante P_n : pour tout a non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$, la fonction $h = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i$ vérifie sur I l'inégalité $Z(h) \leqslant N(a)$.

a) Montrer que pour tout $x \in I$ et toute suite $n_1, \dots, n_p$ d'entiers tels que $0 \leqslant n_1 < \dots < n_p \leqslant n$, $W(h_{n_1}, \dots, h_{n_p})(x)$ est non nul et de signe constant ; on désignera ce signe par $\varepsilon(n_1, \dots, n_p)$.

b) Soit x_0 fixé dans I. Montrer qu'il existe une suite $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique telle que $h = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i$ vérifie les conditions

$$h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad h^{(n)}(x_0) = 1.$$

Calculer les a_i et le signe de $a_0 a_i$ et en déduire que le signe $\varepsilon(0, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$ est indépendant de $i = 1, \dots, n-1$ et égal aussi à $\varepsilon(1, \dots, n)$ et à $\varepsilon(0, \dots, n-1)$.

c) Montrer que la suite $h_0, \dots, h_n$ vérifie la propriété suivante Q_n : $W(h_{n_1}, \dots, h_{n_p})$ est non nul sur I et, pour p fixé au plus égal à $n+1$, de signe constant indépendant de la suite $n_1, \dots, n_p$, supposée strictement croissante.

d) Comment se traduit la propriété Q_n pour $p = 1$ et pour $p = 2$?

3° *a*) En reprenant les notations du début de cette partie III, vérifier que si ψ est indéfiniment dérivable sur I,

$$W(\psi f_1, \dots, \psi f_p) = \psi^p W(f_1, \dots, f_p)$$

et que, si les f_j ne s'annulent pas sur I, on a, pour tout $j = 1, \dots p$,

$$\frac{1}{f_j^p} W(f_1, \dots, f_p) = (-1)^{j-1} W\left[\left(\frac{f_1}{f_j}\right)', \dots, \left(\frac{f_{j-1}}{f_j}\right)', \left(\frac{f_{j-1}}{f_j}\right)', \dots, \left(\frac{f_p}{f_j}\right)'\right]$$

avec, au second membre, suppression des termes à numérateur d'indice strictement inférieur à j si $j = 1$ et suppression des termes à numérateur d'indice strictement supérieur à j si $j = p$.

b) Soit i un entier appartenant à $[0, n]$. On pose

$$H_0 = -\left(\frac{h_0}{h_i}\right)', \dots, H_{i-1} = -\left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)', \ H_i = \left(\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)', \dots, H_{n-1} = \left(\frac{h_n}{h_i}\right)'$$

avec une convention analogue à celle des indices j de 3° *a*) si $i = 0$ ou si $i = n$. Montrer que si la suite $h_0, \dots, h_n$ a la propriété Q_n, la suite $H_0, \dots, H_{n-1}$ a la propriété Q_{n-1}.

c) En déduire que les propriétés P_n et Q_n sont équivalentes.

d) Donner un exemple de suite $h_0, \dots, h_n$ vérifiant ces deux propriétés équivalentes.

⊛ Les questions 2 (a), (b), (c), (d) sont facultatives.