TD INTEGRALES PROPRES (CORRECTION)

EXERCICE 4

-a) $\displaystyle\int_0^\pi t(\pi-t)\cos(2n\,t)\,\mathrm{d}t = \left[t(\pi-t)\frac{\sin(2n\,t)}{2n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi(\pi-2t)\frac{\sin(2n\,t)}{2n}\,\mathrm{d}t$

$$= 0 + \pi\left[\frac{\cos(2n\,t)}{4n^2}\right]_0^\pi + \left[-2t\,\frac{\cos(2n\,t)}{4n^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(2n\,t)}{2n^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2n^2}\,.$$

On peut écrire: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\cos(2n\,t)\,\Re\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\,\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2Nt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}}\right) = \frac{\cos((N+1)\,t)\sin(N\,t)}{\sin t}$, puisque

$1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2u} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\sin u$.

On obtient alors:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)\frac{\cos((N+1)\,t)\,\sin N t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\cos((N+1)\,t)\sin N t = \frac{1}{2}(\sin((2N+1)\,t)-\sin t)$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{t(\pi-t)}{\sin t}\sin((2N+1)\,t)\,\mathrm{d}t$$

$= \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \varphi(t)\sin((2N+1)\,t)\,\mathrm{d}t$, ***en définissant*** $\boldsymbol{\varphi}$ ***pour*** $\boldsymbol{t \in\,]0,\pi[}$

par, $\boldsymbol{\varphi(t) = \dfrac{t(\pi-t)}{\sin t}}$.

Mais $\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \pi$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t\to\pi]{} \pi$, donc φ est continue sur $[0,\pi]$, ***si on pose*** $\boldsymbol{\varphi(0) = \varphi(\pi) = \pi}$.

D'après le *lemme de Riemann-Lebesgue*, on a:

$$\int_0^\pi \varphi(t)\sin((2N+1)\,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \text{ et } \boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6}}$$

EXERCICE 5

-a) Pour $k<n$ et $k>2n$, $P_n^{(k)}(0)=0$, puisque P_n est de degré $2n$ et de valuation n.

$$P_n = \frac{1}{n!}\,\mathrm{X}^n\sum_{l=0}^{n}\mathrm{C}_n^l\,p^{n-l}(-1)^l q^l\,\mathrm{X}^l.$$

Pour $k\in[n,2n]$, posons $n+l=k$.

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}\mathrm{C}_n^{k-n}\,p^{2n-k}(-1)^{k-n}q^{k-n}\,\mathrm{X}^k, \text{ d'où il vient:}$$

$$P_n^{(k)}(0) = k!\,\frac{1}{n!}\,p^{2n-k}(-1)^{k-n}q^{k-n}\,\mathrm{C}_n^{k-n}, \text{ et } \boxed{P_n^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}}$$

En remarquant que $P_n\left(\frac{p}{q} - X\right) = P_n(X)$, on obtient,

$$P_n{}^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n{}^{(k)}(0)$$ qui est aussi élément de $\mathbb{Z}$.

b) $I_n = \int_0^{p/q} P_n(t) \sin t \, dt$, et comme pour $t \in [0, \frac{p}{q}]$, $0 \le t\,(p - q\,t) \le \frac{p^2}{4q}$,

$|I_n| \le \frac{1}{n\,!} \frac{p}{q} \left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$ donc puisque pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a^n}{n\,!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

c) En posant $\begin{cases} f(t) = \sin\left(t - 2n\frac{\pi}{2}\right) \\ g(t) = P_n(t) \end{cases}$ pour avoir

$f^{(2n)}(t) = \sin t$

$g^{(2n)}(t) = P_n{}^{(2n)}(t) = \frac{1}{n\,!}(2n)!\,(-q)^n$, on obtient:

$$I_n = \int_0^{p/q} P_n(t) \sin t \, dt$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f^{(2n-1-k)}(t)\, g^{(k)}(t)\right]_0^{p/q} + (-1)^{2n} \int_0^{p/q} f(t)\, P_n{}^{(2n)}(t)\, dt.$$

Si $I_n = A + B$, $B = \frac{(2n)!}{n\,!}(-q)^n \int_0^{p/q} (-1)^n \sin t \, dt \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathbb{Z}$, d'après a).

Comme I_n est strictement positive, ***on a donc $I_n \ge 1$ ce qui contredit*** **b).**

EXERCICE 6

a) On a $w_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{n+1} t \, dt$.

Posons $u'(t) = \cos t$, $u(t) = \sin t$, $v(t) = \cos^{n+1} t$, $v'(t) = -(n+1)\cos^n t \sin t$.

$w_{n+2} = [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t \, dt$ (intégration par parties, u et v étant de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). Comme $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$,

$w_{n+2} = (n+1)(w_n - w_{n+2})$ et $\boxed{w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n}$

De plus $w_0 = \frac{\pi}{2}$ et $w_1 = 1$. Il en résulte que:

$$w_{2p} = \frac{2p-1}{2p} w_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p\,(2p-2)} w_{2p-4}.$$

Par récurrence, on obtient alors:

$w_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\,..\,3\,.\,1}{2p\,(2p-2)\,..\,2} w_0$, d'où $\boxed{w_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p}\,(p\,!)^2} \frac{\pi}{2}}$

On obtient de même, $\boxed{w_{2p+1} = \frac{2^{2p}\,(p\,!)^2}{(2p+1)!}}$

b) Soit $n = 2p + 1$, $n\, w_n\, w_{n-1} = (2p+1)\, w_{2p+1}\, w_{2p} = \frac{\pi}{2}$.

Soit $n = 2p$, $2p\, w_{2p}\, w_{2p-1} = 2p\, \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p\,!)^2}\, \dfrac{\pi}{2}\, \dfrac{2^{2p-2}\,((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$

$$= 2p\,(2p)\,\frac{1}{p^2}\,\frac{1}{2^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ .$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $\boxed{n\, w_n\, w_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}}$

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puisque $\cos t$ est dans $[0, 1]$, si $n \in \mathbb{N}$, $(\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n$.

En intégrant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient $w_{n+1} \leq w_n$ d'où la décroissance de (w_n).

On a donc d'après ce qui précède et la positivité de w_n:

$$1 = \frac{w_n}{w_n} \leq \frac{w_n}{w_{n+1}} \leq \frac{w_n}{w_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}\ .$$

Le théorème de convergence par encadrement fournit $\dfrac{w_n}{w_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Ainsi, $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_{n-1}$, et $n\, w_n\, w_{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} n\, w_n^2$.

Donc, $n\, w_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ et par positivité de w_n, $\boxed{w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$

c-1) $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $F(X) = \displaystyle\int_0^X e^{-x^2}\, dx$ est croissante et majorée.

En effet, pour $X \geq 1$, et $x \in [1, X]$,

$e^{-x^2} \leq e^{-x}$, d'où: $\displaystyle\int_1^X e^{-x^2}\, dx \leq \int_1^X e^{-x}\, dx = -e^{-X} + e^{-1} \leq \frac{1}{e}$, et alors:

$F(X) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^X e^{-x^2}\, dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \frac{1}{e}$, pour tout $X \geq 1$.

Pour $X \in [0, 1]$, $F(X) \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$. Finalement:

$$\forall X \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^X e^{-x^2}\, dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \frac{1}{e}\ .$$

Donc l'intégrale de Gauss est un nombre réel d'après le théorème de limite monotone.

c-2) D'après la ***convexité*** de la fonction exponentielle, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq 1 + t$ donc en prenant $t = -x^2$, $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$.

Pour $t = x^2$, $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, puis en prenant les inverses, $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$.

Remarque: on peut aussi déduire ces inégalités du *théorème des accroissements finis.*

c-3) Posons dans I_n, $u = \sin t$, $du = \cos t\, dt$.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\, dt = w_{2n+1}.$$

L'existence de J_n est due à la croissance de l'application G définie sur $[0, +\infty[$ par

$G(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{du}{(1+u^2)^n}$ et à la majoration $G(X) \leq \operatorname{Arc\,tan} X < \dfrac{\pi}{2}$.

On pose $u = \tan t$ et J_n s'écrit:

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+\tan^2 t)^{n-1}} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-2}\, dt = w_{2n-2}.$$

c-4) Si $u \in [0, 1]$, $e^{-u^2} \geq 1 - u^2$, d'où, si $n \in \mathbf{N}^*$,

$e^{-nu^2} \geq (1-u^2)^n$ et $\displaystyle\int_0^1 e^{-nu^2}\, du \geq \int_0^1 (1-u^2)^n\, du$. Or,

$\displaystyle\int_0^1 e^{-nu^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\, dx$, d'où,

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\, dx \geq \sqrt{n}\, w_{2n+1}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \geq \sqrt{n}\, w_{2n+1}$.

De façon analogue, on écrit si $u \geq 0$, $e^{-u^2} \leq \dfrac{1}{1+u^2}$ d'où, pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$e^{-nu^2} \leq \left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^n$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nu^2}\, du \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n}\, du$ par intégration entre 0 et x, puis prolongement des inégalités et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leq \sqrt{n}\, w_{2n-2}$. Finalement:

$$\sqrt{n}\, w_{2n+1} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leq \sqrt{n}\, w_{2n-2}.$$

Or, $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, w_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, w_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On obtient: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

EXERCICE 8

Pour tout a, $\theta \longmapsto \varphi(\theta, a)$ est définie et continue, le changement de variable $\theta = \theta' + \pi$ donne

$$\int_{\pi}^{2\pi} \ln (a^2 - 2a \cos \theta + 1)\, d\theta = \int_0^{\pi} \ln (a^2 + 2a \cos \theta' + 1)\, d\theta'$$

et, par suite,

$$I(a) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln [(a^2 - 2a \cos \theta + 1)(a^2 + 2a \cos \theta + 1)]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln (a^4 - 2a^2 \cos 2\theta + 1)\, d\theta;$$

le changement de variable $2\theta = \varphi$ donne alors $I(a) = \frac{1}{2} I(a^2)$.

$$I(1) = \frac{1}{2} I(1) \Longrightarrow I(1) = 0; \qquad I(-a) = \frac{1}{2} I(a^2) = I(a).$$

Cette dernière égalité permet de se borner à $a > 0$. Supposons d'abord $a \in]0, 1[$ fixé

$$[(\forall \theta \in [0, 2\pi]) : \ a^2 - 2a \cos \theta + 1 \leqslant (1 + a)^2]$$

$$\Longrightarrow |I(a)| < \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln (1 + a)^2\, d\theta = 2\pi \ln (1 + a);$$

d'autre part, par récurrence,

$$I(a) = \frac{1}{2} I(a^2) = \frac{1}{2^p} I(a^{(2^p)}) \quad (p \in \mathbf{N});$$

mais $a^{(2^p)} \in]0, 1[$, donc

$$|I(a)| < \frac{1}{2^p} 2\pi \ln (1 + a^{(2^p)}) < \frac{2\pi \ln (1 + a)}{2^p},$$

et, par suite, $I(a) = 0$.

Autrement dit, $\forall a \in [-1, +1], I(a) = 0$.

Pour $a \neq 0$,

$$\forall \theta \in [0, 2\pi]: \quad \varphi\left(\theta, \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} \cos \theta + 1\right) = \varphi(\theta, a) - \frac{1}{2} \ln a^2$$

qui entraîne

$$I(a) - I\left(\frac{1}{a}\right) = 2\pi \ln |a|.$$

Pour $|a| > 1$, on a donc

$$I(a) = 2\pi \ln |a|.$$

EXERCICE 9

a-1) Soit $a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Pour tout $i \in [0, p-1]$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ donc $g \circ f$ aussi, et f a une limite réelle en a_i à droite donc par composition $g \circ f$ aussi.

Pour tout $i \in [1, p]$, f a une limite réelle en a_i à gauche donc $g \circ f$ aussi.

a-2) ***Condition suffisante***: si $\forall f \in \mathcal{CM}([0, 1], \mathbb{R})$, $g\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 g \circ f$:

on prend x, y quelconques dans $\mathbb{R}$, $\theta \in [0, 1]$ et on construit f en escalier sur $[0, 1]$ par:

$$\forall t \in [0, 1-\theta[,\ f(t) = x,\ \ \forall t \in [1-\theta, 1],\ f(t) = y.$$

On obtient: $g\left(\int_0^1 f\right) = g[(1-\theta)x + \theta y] \leq (1-\theta)g(x) + \theta g(y) = \int_0^1 g \circ f.$

Condition nécessaire: Considérons ***une suite de subdivisions régulières de* [0, 1]**.

L'inégalité de *convexité généralisée* permet d'écrire:

$$g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g \circ f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Comme $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f$ et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g \circ f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 g \circ f$, (*sommes de Riemann*), en raison de la continuité de g, on obtient par prolongement des inégalités:

$$\boxed{g\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 g \circ f}$$

b) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \varphi(a + (b-a)x)$ et pour $x > 0$, $g(x) = -\ln x$.

***La fonction g étant convexe, on peut reprendre la technique du* a)** et:

$$g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g \circ f\left(\frac{i}{n}\right),$$

et en raison de la continuité de g, on obtient par prolongement des inégalités:

$$g\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 g(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable défini par $x = a + (b-a)t$ donne alors:

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(\varphi(x))\,\mathrm{d}x\ ,\ \text{soit,}$$

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln \circ \varphi \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\right)}$$

Remarque: il n'est pas possible d'étendre sans précaution de résultat aux ***fonctions continues par morceaux*** sur $[a, b]$ à valeurs strictement positives car $g \circ \varphi$ n'est pas forcément bornée.

Par exemple si $[a, b] = [0, 2]$ et $\varphi(x) = x - E(x)$, $\lim_{x\to 1^+} \ln(\varphi(x)) = -\infty$.