CORRECTION DU CONCOURS BLANC 1

PROBLEME 1

PARTIE 1

Notons que les ensembles B(I), C(I), D(I), D*(I) sont tous des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I

Toutes les fonctions f_{rs} sont évidemment C^∞ sur $]0, 1]$.

1° L'inégalité $|f_{rs}(x)| \leqslant x^r$ montre que f_{rs} est continue en 0 pour tout $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

2° On a $\dfrac{f_{rs}(x)}{x} = x^{r-1} \sin\left(\dfrac{1}{x^s}\right)$. Cette quantité a une limite (nulle) quand x tend vers 0 si, et seulement si, $r > 1$, d'où $E =]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$.

3° Pour $x \neq 0$ et $r > 1$, on a

$$f'_{rs}(x) = rx^{r-1} \sin\left(\frac{1}{x^s}\right) - sx^{r-s-1} \cos\left(\frac{1}{x^s}\right).$$

L'inégalité $|f'_{rs}(x)| \leqslant rx^{r-1} + sx^{r-s-1}$ montre que, si $r - s - 1 \geqslant 0$, f'_{rs} est bornée sur $]0, 1]$, donc aussi sur $[0, 1]$.

D'autre part, si $r - s - 1 < 0$, on voit en prenant, par exemple, la suite $x_k = \left(\dfrac{1}{2k\pi}\right)^{1/s}$ que f'_{rs} n'est pas bornée sur $]0, 1]$.

Finalement, $f'_{rs} \in B(J)$ si, et seulement si, $r - 1 \geqslant s$. Notons que cette inégalité implique $r > 1$.

4° La même inégalité $|f'_{rs}(x)| \leqslant rx^{r-1} + sx^{r-s-1}$ montre que, si $r - s - 1 > 0$, f'_{rs} est continue en 0.

D'autre part, lorsque $r - s - 1 \leqslant 0$, f'_{rs} n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc, $f'_{rs} \in C(J)$ si, et seulement si, $r - 1 > s$.

PARTIE 2

1° *a)* Soit f un élément de D*(I). Il existe $\Phi \in D(I)$ telle que $f = \Phi'$. On peut prendre $F = G = \Phi$ dans la définition d'un élément de P(I), d'où $f \in P(I)$.

Soit maintenant f un élément de B(I). Il existe des réels m et M tels que, pour tout x de I on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Les deux fonctions F et G définies respectivement par $x \longmapsto Mx$ et $x \longmapsto mx$ vérifient $G' \leqslant f \leqslant F'$, d'où $f \in P(I)$.

2° Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction F entre $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n}$, montre qu'il existe $c_n \in \left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$ tel que

$$F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)F'(c_n) = \frac{1}{n(n+1)} F'(c_n).$$

Comme $F \in S(f)$, on a $F'(c_n) \geqslant f(c_n) = n$, d'où

$$F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

En sommant ces inégalités de 1 à n, on obtient

$$\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient une contradiction, puisque, dans cette inégalité, le minorant tend vers $+\infty$, alors que le majorant tend vers le réel $\mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0)$. Il en résulte que $\mathrm{S}(f)$ est vide et que f n'est pas dans $\mathrm{P}(\mathrm{J})$.

3° Par hypothèse, $\mathrm{F}'(x) - \mathrm{G}'(x) \geqslant 0$ pour tout x de I. La fonction $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ est donc croissante, d'où

$$\mathrm{F}(b) - \mathrm{G}(b) \geqslant \mathrm{F}(a) - \mathrm{G}(a),$$

ce qui s'écrit encore $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \geqslant \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)$.

Soit $f \in \mathrm{P}(\mathrm{I})$ et $\mathrm{G} \in s(f)$. L'ensemble des réels de la forme $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ où $\mathrm{F} \in \mathrm{S}(f)$ est non vide et minoré par $\mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)$. Il possède donc une borne inférieure, notée $p_+(f)$, vérifiant $\mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a) \leqslant p_+(f)$. L'ensemble des réels de la forme $\mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)$ où $\mathrm{G} \in s(f)$ est donc non vide et majoré par $p_+(f)$. Il possède donc une borne supérieure, notée $p_-(f)$, vérifiant $p_-(f) \leqslant p_+(f)$.

4° *a*) Soit $f \in \mathrm{D}^*(\mathrm{I})$ et $\Phi \in \mathrm{D}(\mathrm{I})$ telle que $\Phi' = f$. On sait que $\Phi \in s(f)$, d'où, $\Phi(b) - \Phi(a) \leqslant p_-(f)$. On sait aussi que $\Phi \in \mathrm{S}(f)$, d'où $p_+(f) \leqslant \Phi(b) - \Phi(a)$. Finalement,

$$p_+(f) = p_-(f) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Donc f est P-intégrable.

4° *b*) Si f est continue sur I, f est en particulier dans $\mathrm{D}^*(\mathrm{I})$. On peut prendre pour Φ la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après la question précédente, on sait que f est P-intégrable. De plus, on a

$$p(f) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5° *a*) Soit f_1 et f_2 deux fonctions P-intégrables. Soit F_1, F_2, G_1, G_2 des éléments de $\mathrm{D}(\mathrm{I})$ tels que

$$\mathrm{G}'_1 \leqslant f_1 \leqslant \mathrm{F}'_1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}'_2 \leqslant f_2 \leqslant \mathrm{F}'_2.$$

On a $\mathrm{G}'_1 + \mathrm{G}'_2 \leqslant f_1 + f_2 \leqslant \mathrm{F}'_1 + \mathrm{F}'_2$, ou encore

$$(\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2)' \leqslant f_1 + f_2 \leqslant (\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2)',$$

ce qui prouve que $f_1 + f_2 \in \mathrm{P}(\mathrm{I})$.

Il sera commode d'introduire la notation suivante : pour une application g de I dans $\mathbb{R}$, on posera

$$\Delta g = g(b) - g(a).$$

On a $\Delta\mathrm{G}_1 + \Delta\mathrm{G}_2 = \Delta(\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2) \leqslant p_-(f_1 + f_2)$ car $\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 \in s(f_1 + f_2)$. En prenant la borne supérieure pour G_1 décrivant $s(f_1)$ puis pour G_2 décrivant $s(f_2)$, on en déduit

$$p_-(f_1) + p_-(f_2) \leqslant p_-(f_1 + f_2).$$

En raisonnant de façon analogue, on obtient

$$p_+(f_1 + f_2) \leqslant p_-(f_1) + p_+(f_2).$$

La P-intégrabilité de f_1 et f_2 entraîne alors

$$p_-(f_1 + f_2) = p_+(f_1 + f_2) = p(f_1) + p(f_2)$$

autrement dit $f_1 + f_2$ est P-intégrable et

$$p(f_1 + f_2) = p(f_1) + p(f_2).$$

On a, d'autre part, pour $\lambda > 0$, et avec les notations précédentes

$$\lambda\mathrm{G}'_1 \leqslant \lambda f_1 \leqslant \lambda\mathrm{F}'_1,$$

ce qui prouve que $\lambda f_1 \in \mathrm{P}(\mathrm{I})$. En outre $\lambda\Delta\mathrm{G}_1 = \Delta(\lambda\mathrm{G}_1) \leqslant p_-(\lambda f_1)$. En prenant la borne supérieure pour G_1 décrivant $s(f_1)$, on en déduit

$$\lambda p_-(f_1) \leqslant p_-(\lambda f_1).$$

De façon analogue, on obtient $p_+(\lambda f_1) \leqslant \lambda p_-(f_1)$. D'où la P-intégrabilité de λf_1 et l'égalité

$$p(\lambda f_1) = \lambda p(f_1).$$

Pour $\lambda = 0$, cette égalité est évidente. Pour $\lambda < 0$, comme on sait que $-f$ est P-intégrable, $\lambda f = (-\lambda)(-f)$ l'est aussi et

$$p(\lambda f) = (-\lambda)p(-f) = \lambda p(f).$$

Finalement, on a prouvé que l'ensemble des fonctions P-intégrables est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $f \longmapsto p(f)$ est une forme linéaire.

5° *b*) On garde les notations précédentes. En supposant $f_1 \leqslant f_2$, on a

$$G'_1 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant F'_2, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta G_1 \leqslant \Delta F_2$$

et, successivement $p_-(f_1) \leqslant \Delta F_2$ et $p_-(f_1) \leqslant p_+(f_2)$. La P-intégrabilité de f_1 et f_2 donne le résultat cherché.

PROBLEME II

PARTIE 1

1° *a*) Comme f est de classe C^∞, elle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de tout point $x_0 \in J$. Ce développement est donné par la formule de Taylor :

$$(1) \qquad f(x) = f(x_0) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + (x-x_0)^n g_n(x),$$

avec $\lim_{x \to x_0} g_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$, $g_n(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$. Il est clair que g_n est continue sur J.

Alors si x_0 est un zéro d'ordre au moins n de f, on a $f(x) = (x - x_0)^n g_n(x)$ et si x_0 est un zéro d'ordre n, $g_n(x_0) \neq 0$.

Inversement si $f(x) = (x - x_0)^n g_n(x)$ avec g_n continue sur J, on a un développement limité d'ordre $n - 1$ de f au voisinage de x_0 et l'unicité du développement limité donne $f^{(p)}(x_0) = 0$ pour $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Si, de plus, $g_n(x_0) \neq 0$, on a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ et x_0 est zéro d'ordre n de f.

b) Si x_0 est zéro d'ordre n de f, on a $f(x) = (x - x_0)^n g_n(x)$ avec $g_n(x_0) \neq 0$. Comme g est continue et J ouvert, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset J$ et pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $g_n(x) \neq 0$; $(x - x_0)^n \neq 0$ pour $x \neq x_0$, donne pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $x \neq x_0$, $f(x) \neq 0$ et f a pour seul zéro x_0 dans $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle a 0 pour zéro d'ordre infini et les nombres $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ pour zéro d'ordre 1. Dans tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, il y a une infinité de zéros de f.

c) Comme f est de classe C^∞ on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-u)^{n-1} f^{(n)}(u)\, du.$$

Comme

$$u \to (x-u)^{n-1} . f^{(n)}(u)$$

est continue, pour $x \neq x_0$ le changement de variable de classe C^1, $u = x - t(x - x_0)$ dans l'intégrale donne

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!} \int_0^1 t^{n-1} f^{(n)}(x + t(x_0 - x))\, dt,$$

résultat qui reste valable pour $x = x_0$.

Si x_0 est zéro d'ordre au moins n de f, on a alors

$$g_p(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 t^{p-1} f^{(p)}(x + t(x_0 - x))\, dt \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

L'application $(t, x) \to f^{(n)}(x + t(x_0 - x))$ de $[0, 1] \times J$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^∞ ; par suite g_n est de classe C^∞ sur J, donc $g_n \in \mathscr{E}$ et (dérivation sous le signe somme)

$$g_n^{(p)}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^p f^{(n+p)}(x + t(x_0 - x))\,dt,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2° **a)** Soit f n'ayant que des zéros d'ordre fini dans $[a, b]$. Si $Z(f)$ est infini, f a une infinité de zéros dans l'intervalle fermé borné $[a, b]$ et il existe $x_0 \in [a, b]$, x_0 zéro de f (car f continue) et point d'accumulation des zéros de f, ce qui contredit le résultat du **I. 1° a)**. Donc $Z(f)$ est fini.

b) Si $f(a)f(b) > 0$, on peut avoir $Z(f) = 0$. Si $f(a)f(b) < 0$, on a $Z(f) \geqslant 1$. Si f n'a que des zéros d'ordre pair : $x_1, x_2, \ldots, x_p$, avec

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_p < x_{p+1} = b,$$

sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $1 = 1, 2, \ldots, p + 1$, f prend des valeurs de signe indépendant de i ; il en résulte $f(a)f(b) > 0$. Soit (s'il en existe) $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tous les zéros d'ordre impair de f avec $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_p < x_{p+1} = b$; sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, \ldots, p + 1$, f est non nulle et est soit à valeurs toutes $\geqslant 0$ on toutes $\leqslant 0$, sur les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, $]x_i, x_{i+1}[$, $1 = 1, 2, \ldots, p$, f prend des valeurs de signes contraires, donc si $f(a)f(b) > 0$, p est pair donc $Z(f)$ pair, si $f(a)f(b) < 0$, p est impair donc $Z(f)$ impair. En conclusion $Z(f)$ est pair si $f(a)f(b) > 0$, $Z(f)$ est impair si $f(a)f(b) < 0$.

c) Si $Z(f) = 0$ ou 1 la propriété est évidente. Entre deux zéros distincts (s'il en existe) de f il y au moins un zéro de f' distinct de ces deux zéros. Donc si f à p zéros distincts, f' à $p - 1$ zéros distincts de ceux de f. Si x_0 est zéro d'ordre $n(n > 1)$ de f, x_0 est zéro d'ordre $n - 1$ de f', car $f(x) = (x - x_0)^n g_n(x)$ avec $g_n(x_0) \neq 0$ donne $f'(x) = (x - x_0)^{n-1}h_n(x)$ avec

$$h_n(x) = (x - x_0)g_n'(x) + ng_n(x),$$

h_n continue et $h_n(x_0) \neq 0$.

Il en résulte

$$Z(f') \geqslant Z(f) - p + p - 1 = Z(f) - 1.$$

Soit $f(x) = (x - a)(b - x)$ pour $x \in [a, b]$; alors $Z(f) = 2$ et $Z(f') = 1$, donc $Z(f') = Z(f) - 1$.

Si $f(a)f'(a) > 0$, on peut supposer en changeant au besoin f en $-f$ que $f(a) > 0$, donc $f'(a) > 0$. Soit x_0 le plus petit zéro de f (donc $x_0 \neq 0$), on a $f(x_0) - f(a) = -f(a) = (x_0 - a)f'(\xi)$ avec $\xi \in]a, x_0[$ et $f'(\xi) < 0$, comme $f'(a) > 0$, $f'(\xi) < 0$ et f' continue, il existe un zéro de f' dans $]a, x_0[$. Dans le résultat précédent ce zéro de f' n'a pas été pris en compte, il en résulte $Z(f') \geqslant Z(f)$. On obtient le même résultat avec $f(b)f'(b) < 0$.

d) Soit $Z(f) = +\infty$. Si f a une infinité de zéros dans $[a, b]$, f' a aussi une infinité de zéros dans $[a, b]$. Si f a un nombre fini de zéros dans $[a, b]$, l'un au moins est d'ordre infini, donc zéro d'ordre infini de f'. Dans tous les cas $Z(f') = +\infty$.

Soit f telle que $Z(f) = +\infty$; comme f est continue sur $[a, b]$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in [a, b]$; alors F définie par $F(x) = f(x) - m + 1$ vérifie $F(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in [a, b]$. On a $Z(F) = 0$, $F' = f'$ donc $Z(F') = +\infty$. La réciproque est fausse.

4° Si $Z(u) = 0$, u n'a aucun zéro dans I. Les seuls zéros de uf sont ceux de f. Si x_0 est zéro d'ordre n de f, on a $u(x)f(x) = (x - x_0)^n g_n(x)u(x)$ avec $g_n(x_0)u(x_0) \neq 0$, donc x_0 est zéro d'ordre n de uf. Si x_0 est zéro d'ordre infini de f, x_0 est zéro d'ordre infini de uf. Alors $Z(uf) = Z(f)$.

5° La fonction φ est continue strictement monotone car φ' ne s'annule pas. Comme $\varphi(J_1) \supset J \supset I$, l'image réciproque de I par φ est un intervalle I' contenu dans J_1.

Les fonctions φ et f étant de classe C^∞, la fonction $f \circ \varphi$ est de classe C^∞.

Soit x_0 un zéro d'ordre au moins n de f, alors $f(x) = (x - x_0)^n g_n(x)$, g_n continue sur I. Soit x et x' (uniques) dans I' tels que $\varphi(x') = x$, $\varphi(x_0') = x_0$; alors

$$f(\varphi(x')) = (\varphi(x') - \varphi(x_0'))^n g_n(\varphi(x')).$$

Comme

$$\varphi(x') - \varphi(x_0') = (x' - x_0')\theta_1(x'),$$

θ_1 continue sur x' avec $\lim\limits_{x' \to x_0'} \theta_1(x') = \varphi'(x_0) \neq 0$, on a

$$f(\varphi(x')) = (x' - x_0')^n(\theta_1(x'))^n g_n(\varphi(x')) \qquad \text{avec} \qquad x' \mapsto (\theta_1(x'))^n g_n(\varphi(x'))$$

continue sur I' et par suite (cf. **I. 1°**) x'_0 est zéro d'ordre au moins n de $f \circ \varphi$. Si de plus x_0 est zéro d'ordre n de f on a $(\theta_1(x'_0))^n g_n(\varphi(x'_0)) \neq 0$ et x'_0 est zéro d'ordre n de $f \circ \varphi$. Si x_0 est zéro d'ordre infini de f, x'_0 est zéro d'ordre infini de $f \circ \varphi$. En considérant les fonctions $f \circ \varphi$ et $(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$, on obtient qu'à tout zéro de $f \circ \varphi$ correspond un zéro de même ordre de f, par suite $Z(f) = Z(f \circ \varphi)$.

II

1° ***a)*** Montrons que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i e^{-\lambda_i x} = 0$$

entraîne $a_i = 0$ pour tout i. On a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i e^{-(\lambda_i - \lambda_0)x} = 0$$

pour tout x, car $e^{\lambda_0 x} \neq 0$, d'où

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i e^{-(\lambda_i - \lambda_0)x} = a_0 ;$$

puis de proche en proche $a_i = 0$. Si deux suites de coefficients et deux suites d'exposants sont associées à la même fonction f, on peut toujours en modifiant au besoin l'indexation et en complétant les suites de coefficients par des zéros, se ramener au cas où les deux suites d'exposants sont les mêmes. Le résultat en vue est alors une conséquence de la propriété précédente. En supprimant les zéros dans une suite finie $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, on obtient une nouvelle suite finie a' et $N(a) = N(a')$; donc $N(a)$ ne dépend que de f.

b) On a

$$(e^{\mu x} f(x))' = e^{\mu x}(\mu f(x) + f'(x)),$$

d'où

$$g(x) = \mu f(x) + f'(x) = \sum_{j=0}^{n} (\mu - \lambda_j) a_j e^{-\lambda_j x} = \sum_{j=0}^{i-1} (\mu - \lambda_j) a_j e^{-\lambda_j x} + \sum_{j=n}^{i} (\mu - \lambda_j) a_j e^{-\lambda_j x}.$$

Pour $0 \leqslant j \leqslant 1 - 1$, on a $(\mu - \lambda_j) > 0$, donc le nombre de changements de signe de la suite $a_0(\mu - \lambda_0)$, $a_1(\mu - \lambda_0)$, $\dots$, $a_{i-1}(\mu - \lambda_{i-1})$ est le même que celui de la suite $(a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$. Pour $i \leqslant j \leqslant n$, on a $(\mu - \lambda_j) < 0$, le nombre de changements de signe de la suite $(\mu - \lambda_i)a_i, \dots, (\mu - \lambda_n)a_n$ est le même que celui de la suite $(a_i, \dots, a_n)$. D'autre part $a_{i-1}a_i < 0$ entraîne

$$a_{i-1}(\mu - \lambda_{i-1}) a_i (\mu - \lambda_i) > 0$$

et il en résulte

$$N(b) = N(a) - 1.$$

Soit $u(x) = e^{\mu x}$, on sait que $Z(f) = Z(uf)$ car u sans zéro (cf. **I.4°**). Soit $v(x) = e^{-\mu x}$, on a $g(x) = v(x)(u(x)f(x))'$, donc $Z(g) = Z((uf)')$, mais $Z((uf)') \geqslant Z(uf) - 1$, par suite $Z(g) \geqslant Z(f) - 1$.

c) Si $N(a) = 0$, tous les a_i sont de même signe et comme $e^{-\lambda_i x} > 0$, on a pour tout x, $f(x) \neq 0$, donc $Z(f) = N(a) = 0$.

Soit $N(a) = p \geqslant 1$, en changeant au besoin l'indexation, on se ramène au cas où tous les coefficients sont non nuls, ce qui ne change pas $N(a)$. On peut construire, comme dans **II. 1° *b)*** $g_1(x) = e^{-\mu x}(e^{\mu x} f(x))'$ avec $N(b_1) = p - 1$, puis par le même procédé, à partir de g_1, g_2 avec $N(b_2) = p - 2$, puis de proche en proche g_i avec $N(b_i) = p - i$, $i = 1, 2, \dots, p$. Alors $N(b_p) = 0$, $Z(g_p) = 0$. Comme $Z(g_1) \geqslant Z(f) - 1$, $Z(g_i) \geqslant Z(g_{i-1}) - 1$ pour $1 = 2, \dots, p$, on obtient $0 \geqslant Z(f) - p$ c'est-à-dire $N(a) - Z(f) \geqslant 0$.

L'inégalité $Z(f) \leqslant N(a)$ montre que f a un nombre fini de zéros et il existe $\alpha < \beta$ tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \notin]\alpha, \beta[$, $f(\alpha)$ du signe de a_n, $f(\beta)$ du signe de a_0. Il résulte de **I. 2° *b)*** que $Z(f)$ est pair si $a_0 a_n > 0$, impair si $a_0 a_n < 0$. Mais $N(a)$ pair donne $a_0 a_n > 0$, $N(a)$ impair donne $a_0 a_n < 0$; alors $Z(f)$ et $N(a)$ sont de même parité, donc $N(a) - Z(f)$ est pair.

2° Posons pour $x > 0$, $X = -\operatorname{Ln} x$, alors soit

$$F(X) = f(e^{-X}) = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{-iX}.$$

Pour la fonction F, on a la situation précédente avec la suite d'exposants $0, 1, \dots, n$. Alors $N(a) - Z(F)$ est positif et pair. L'application $X \mapsto e^{-X}$ est de classe C^∞, strictement décroissante, donc (cf. **I. 5°**) $Z(F) = Z_1(f)$, donc $N(a) - Z_1(f)$ est positif et pair.

Posons pour $x < 0$, $X = -\text{Ln}(-x)$, alors soit

$$G(X) = f(-e^{-X}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i e^{-iX}$$

et comme ci-dessus $N(a') - Z_2(f)$ est positif et pair.

3° a) Si $F(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^x$, on peut écrire $F(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k e^{x \text{Ln} k}$. On a la situation du **II. 1°** avec la suite d'exposants : $-\text{Ln}(n), -\text{Ln}(n-1), \dots, -\text{Ln}(2), 0$ et la suite des coefficients

$$a = (C_n^n, -C_n^{n-1}, \dots, (-1)^{n-1} C_n^1).$$

Il est clair que $N(a) = n - 1$, d'où $Z(f) \leqslant n - 1$.

b) On a

$$F(j) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^j.$$

D'autre part (formule du binôme de Newton)

$$f_0(x) = (-1)^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k x^k, \qquad \text{donc} \qquad f_j(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^j x^k$$

pour tout $j \geqslant 1$. Il en résulte $f_j(1) = F(j)$ pour tout $j \geqslant 1$. Mais 1 est racine d'ordre n de f_0, donc d'ordre $n - j$, de f_j pour tout $j = 0, 1, \dots, n-1$ et non zéro de f_n. Il en résulte que les seuls zéros de F sont les nombres $1, 2, \dots, n-1$ à l'ordre 1 car $Z(f) \leqslant n - 1$.

III

1° Si $W(h_{n_1}, h_{n_2}, \dots, h_{n_p})(x_0) = 0$, il existe (propriété bien connue des déterminants) des constantes $a_1, a_2, \dots, a_p$ non toutes nulles telles que pour tout $i = 0, 1, \dots, p-1$ on ait $\sum_{j=1}^{p} a_j h_{n_j}^{i}(x_0) = 0$. Si on pose $h(x) = \sum_{j=1}^{p} a_j h_{n_j}(x)$, on a $h^{(i)}(x_0) = 0$ pour tout $i = 0, 1, \dots, p-1$, donc x_0 est un zéro d'ordre au moins p de h.

2° a) Si pour $x_0 \in I$, $W(h_{n_1}, \dots, h_{n_p})(x_0) = 0$, on a la situation précédente et pour la fonction h, $Z(h) \geqslant p$, mais pour la suite $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ on a $N(a) \leqslant p - 1$ et la propriété P_n donne $p \leqslant p - 1$ ce qui est absurde. Donc pour tout $x \in I$, $W(h_{n_1}, \dots, h_{n_p})(x) \neq 0$ et comme $x \mapsto W(h_{n_1}, \dots, h_{n_p})(x)$ est continue sur I, $W(h_{n_1}, \dots, h_{n_p})(x)$ est de signe constant sur I.

b) On doit avoir

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h_i^{(j)}(x_0) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h_i^{(n)}(x_0) = 1.$$

Les $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les solutions d'un système linéaire de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues, de déterminant $W(h_0, h_1, \dots, h_n)(x_0)$ qui est non nul d'après le résultat précédent : il en résulte l'existence et l'unicité des $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Les formules de Cramer donnent

$$a_0 = (-1)^n \frac{W(h_1, h_2, \dots, h_n)(x_0)}{W(h_0, h_1, \dots, h_n)(x_0)},$$

$$a_i = (-1)^{n+i} \frac{W(h_0, \dots, h_{i-1}, h_{i+1}, \dots, h_n)(x_0)}{W(h_0, h_1, \dots, h_n)(x_0)} \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$a_n = \frac{W(h_0, h_1, \dots, h_{n-1})(x_0)}{W(h_0, h_1, \dots, h_n)(x_0)}.$$

Les a_n sont tous non nuls (cf. **III. 2° *a***). Alors

$$\operatorname{sgn}(a_0 a_i) = (-1)^i \varepsilon(1, 2, \ldots, n)\varepsilon(0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

$$\operatorname{sgn}(a_0 a_n) = (-1)^n \varepsilon(1, 2, \ldots, n)\varepsilon(0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

On a $Z(h) \geqslant n$, donc $N(a) \geqslant n$, mais $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ donne $N(a) \leqslant n$, il en résulte $Z(h) = N(a) = n$ et pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_{i-1}a_i < 0$; par suite $\operatorname{sgn}(a_0 a_i) = (-1)^i$. Alors

$$\varepsilon(1, 2, \ldots, n) \times \varepsilon(0, 1, 2, \ldots, n-1) = 1,$$
$$\varepsilon(1, 2, \ldots, n) \times \varepsilon(0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) = 1$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, d'où le résultat demandé.

c) Soit $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$, $n'_1 < n'_2 < \cdots < n'_p$.

Si

$$n_1 < \cdots < n_{i-1} < n'_1 < n_{i+1} < \cdots < n_p,$$

la suite

$$h_{n_1}, \ldots, h_{i-1}, h_{n_1'}, h_{i+1}, \ldots, h_p$$

vérifie P_p (conséquence de P_n), on peut lui appliquer le résultat précédent, d'où en particulier $\varepsilon(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \varepsilon(n_2, \ldots, n_{i-1}, n'_1, n_{i+1}, \ldots, n_p)$, qui reste valable si $n'_1 = n_{i+1}$.

Si $n'_1 \leqslant n_1$, on a de même

$$\varepsilon(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \varepsilon(n'_1, n_2, \ldots, n_p)$$

et si $n'_1 > n_p$, $\varepsilon(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \varepsilon(n_2, n_3, \ldots, n_p, n'_1)$.

En appliquant plusieurs fois le même procédé, on obtient $\varepsilon(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \varepsilon(n'_1, n'_2, \ldots, n'_p)$.

d) La propriété Q_n, pour $p = 1$ se traduit par $h_i(x)$ est non nul et a un signe indépendant de $i = 0, 1, \ldots, n$ et de $x \in I$ (c'est d'ailleurs une conséquence directe de P_n). Pour $p = 2$ elle se traduit par $h_i(x)h'_j(x) - h_j(x)h'_i(x)$ (pour $i < j$) est non nul et a un signe indépendant de i et j et de $x \in I$. Compte tenu de $h_i(x) > 0$ (ou < 0) pour tout i et tout x, la suite

$$\frac{h'_0(x)}{h_0(x)}, \quad \frac{h'_1(x)}{h_1(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{h'_n(x)}{h_n(x)}$$

est strictement monotone.

3° *a*) On a (formule de Leibniz)

$$(\psi f_i)^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} C_k^j f_i^{(j)} \psi^{(k-j)},$$

les propriétés bien connues des déterminants donnent de suite

$$W(\psi f_1, \ldots, \psi f_p) = \psi^p W(f_1, \ldots, f_p).$$

Si f_j ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{f_i}{f_j}$ sont de classe C^∞ sur I. Si $\psi = \dfrac{1}{f_j}$, le résultat précédent donne pour $1 < j < p$

$$W\left(\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_{j-1}}{f_j}, 1, \frac{f_{j+1}}{f_j}, \ldots, \frac{f_p}{f_j}\right)(x) = \frac{1}{f_j(x))^p} W(f_1, f_2, \ldots, f_p)(x).$$

Dans le déterminant du premier membre de cette égalité, tous les éléments de la colonne d'indice j sont nuls sauf le premier qui est égal à 1 et le développement de ce déterminant par rapport à cette colonne donne

$$\frac{1}{(f_j)^p} W(f_1, \ldots, f_p) = (-1)^{j-1} W\left(\left(\frac{f_1}{f_j}\right)', \ldots, \left(\frac{f_{j-1}}{f_j}\right)', \left(\frac{f_{j+1}}{f_j}\right)', \ldots, \left(\frac{f_p}{f_j}\right)'\right).$$

On a le résultat du texte pour $j = 1$, $j = p$.

b) Soit

$$0 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_p \leqslant n-1.$$

Si $i \leqslant n_1$, on a

$$W(H_{n_1}, H_{n_2}, \ldots, H_{n_p}) = W\left(\left(\frac{h_{1+n_1}}{h_i}\right)', \ldots, \left(\frac{h_{1+n_p}}{h_i}\right)'\right)$$

Si $i > n_p$, on a $W(H_{n_1}, H_{n_2}, \ldots, H_{n_p}) = (-1)^p W\left(\left(\frac{h_{n_1}}{h_i}\right)', \ldots, \left(\frac{h_{n_p}}{h_i}\right)'\right)$ et la propriété **III. 3° *a*)** donne

$$W(H_{n_1}, \ldots, H_{n_p}) = \frac{1}{(h_i)^{p+1}} W(h_{n_1}, \ldots, h_{n_p}, h_i).$$

Si $n_j < i \leqslant n_{j+1}$, on a

$$W(H_{n_1}, H_{n_2}, \ldots, H_{n_p}) = (-1)^j W\left(\left(\frac{h_{n_1}}{h_i}\right)', \ldots, \left(\frac{h_{n_j}}{h_i}\right)', \left(\frac{h_{1+n_j+1}}{h_i}\right)', \ldots, \left(\frac{h_{1+n_p}}{h_i}\right)'\right)$$

et la propriété **III. 3° *a*)** donne

$$W(H_{n_1}, H_{n_2}, \ldots, H_{n_p}) = \frac{1}{(h_i)^{p+1}} W(h_{n_1}, \ldots, h_{n_j}, h_i, h_{1+n_j+1}, \ldots, h_{1+n_j}).$$

Alors si $h_0, \ldots, h_n$ a la propriété Q_n, la suite $H_0, \ldots, H_{n-1}$ a la propriété Q_{n-1}.

***c*)** On sait que $P_n \Rightarrow Q_n$ (cf. **III.2°**). On suppose que $h_0, \ldots, h_n$ vérifie Q_n et ne vérifie pas P_n. Il existe $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul tel que $h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i(x)$ vérifie $Z(h) > N(a)$. Comme Q_n donne les $h_i(x)$ non nuls et de même signe, on a $N(a) \geqslant 1$, donc $Z(h) \geqslant 2$. Si on pose $N(a) = p$, on a $Z(h) \geqslant p + 1 \geqslant 2$. Soit i tel que pour $0 \leqslant j < i - 1$ les a_j soient tous non nuls et de même signe et que a_i soit non nul et de signe contraire aux précédents. Posons

$$H(x) = \frac{h(x)}{h_i(x)}, \qquad \text{alors} \qquad Z(H) = Z(h).$$

On a $H'(x) = \sum_{j=0}^{i-1} (-a_j) H_j(x) + \sum_{j=i+1}^{n} a_j H_j(x)$ (si $i = n$ le deuxième terme du 2e membre de cette égalité n'existe pas) ; alors $Z(H') \geqslant Z(H) - i \geqslant p$. Si on pose $a' = (-a_0, \ldots, -a_{i-1}, a_i, \ldots, a_n)$, on a $a' \neq 0$ et $N(a') = N(a) - 1 = p - 1$, d'où $Z(H') > N(a')$, la suite $H_0, \ldots, H_{n-1}$ ne vérifie pas P_{n-1} et vérifie Q_{n-1}. En réitérant le procédé, on obtient au bout de p opérations une suite $K_0, K_1, \ldots, K_{n-p}$ d'applications de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant Q_{n-p}, ne vérifiant pas P_{n-p} car il existe $b = (b_0, \ldots, b_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$, $b \neq 0$, $N(b) = 0$, et si

$$K = \sum_{j=0}^{n-p} b_j K_j,$$

on a $Z(K) \geqslant 1$, comme Q_{n-p} entraîne $K_j(x) \neq 0$ et de signe constant pour tout x et tout j, on a une contradiction. Donc $Q_n \Rightarrow P_n$.

***d*)** Sur $I =]0, +\infty[$ la suite $1, X, \ldots, X^n$ vérifie P_n (cf. **II.2°**).