Orsay
Préparation Agreg interne

Correction du devoir n° 1

Exercice 1

Rappel : (1) Un ensemble $O \subset \mathbb{R}$ est un ensemble ouvert si et seulement si : $\forall x_0 \in O \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ ]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset O$.

(2) Un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fermé si son complémentaire $\complement^{\mathbb{R}} F$ est ouvert ou de manière équivalente si tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge admet une limite dans F.

(3) Un ensemble $K \subset \mathbb{R}$ qui est fermé et borné est un compact de $\mathbb{R}$, c'est à dire toute suite d'éléments de K admet une sous suite convergente dans K. Réciproquement, un compact de $\mathbb{R}$ est un ensemble fermé, borné

(a) Oui, c'est le contenu du théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Non, si l'on considère la fonction $f(x)=1$, c'est une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ mais $f(]-1,1[) = \{1\} = [1]$ qui est un intervalle fermé.

Considerons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ qui est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Cet intervalle est fermé car son complémentaire $]-\infty, 1[$ est ouvert (appliquer la définition) et son image $f([1,+\infty[) =]0,1]$ n'est pas un intervalle fermé.

(c) Considérons la fonction $f(x) = 1/x$ qui est continue sur l'intervalle borné $]0,1]$ mais $f(]0,1]) = [1,+\infty[$ qui est un intervalle non borné.

Un intervalle fermé borné K est un compact de $\mathbb{R}$ et l'image

$f(K)$ par une application f continue sur K est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires et qui est fermé borné car compact. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(K)^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$ alors ; $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K / f(x_n) = y_n$) puisque K est compact, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$ qui converge dans K vers un élément $\ell \in K$ et avec la continuité de f sur K on obtient $\lim_{n\to\infty}(y_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty}(f(x_{\varphi(n)})) = f(\ell)$ donc $(y_n) \in f(K)^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente

$\Rightarrow f(K)$ compact de $\mathbb{R} \Rightarrow f(K)$ intervalle fermé borné.

Exercice 2

ⓐ L'ensemble $\{f(x)$ où $x \in]-\infty, a[\} \subset \mathbb{R}$ est majoré par $f(a)$ avec la croissance de f et cet ensemble est non vide puisque $]-\infty, a[\neq \emptyset$, d'après la propriété de la borne supérieure l'ensemble considéré admet une borne supérieure notée M. Montrons que $M = \lim_{x \xrightarrow{<} a}(f(x)) = f(a-0)$, en effet :

(i) Soit $\varepsilon > 0$, alors par définition de M il existe $x_0 < a$ telle que $f(x_0) > M - \varepsilon$, posons $\eta = a - x_0 > 0$ alors :

$$0 < a - x \leq \eta \Leftrightarrow x_0 \leq x < a \Rightarrow M - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq f(a),$$

de plus $x < a$ entraine $f(x) \leq M \Rightarrow 0 \leq M - f(x) < \varepsilon$ pour $a - \eta \leq x < a$

$\Rightarrow \lim_{x \xrightarrow{<} a}(f(x))$ existe et vaut M.

Des raisonnements analogues montrent que f admet une limite à droite en tout réel a qui est donnée par $f(a+0) = \lim_{x \underset{>}{\to} a} (f(x)) = \mathrm{Min}\{f(x) / x > a\}$. (2)

b) Avec les mêmes notation pour une fonction decroissante on a pour tout réel a ;

$$\lim_{x \underset{<}{\to} a} (f(x)) = f(a-0) = \mathrm{Min}(f(x) / x < a)$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} a} (f(x)) = f(a+0) = \mathrm{Max}(f(x) / x > a) .$$

c) On suppose que f est une fonction numerique monotone définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et que f n'est pas continue en $a \in I$ alors il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$a_n \xrightarrow[(n \to \infty)]{} a$ et $f(a_n)$ ne tend pas vers $f(a)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite $(b_n) \subset (a_n)$ telle que $|f(b_n) - f(a)| > \varepsilon$ et $\lim_{n \to \infty} (b_n) = a$.

Supposons que $b_n > a \ (\forall n \in \mathbb{N})$ alors la croissance de f entraîne que $f(b_n) > f(a) + \varepsilon \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

Alors, pour tout $x > a$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n < x$ et $f(a) + \varepsilon < f(b_n) < f(x)$ de plus $f(y) \leq f(a) \ (\forall y \leq a)$, donc $]f(a), f(a)+\varepsilon] \not\subset f(I)$ alors que

$$]f(a), f(a)+\varepsilon] \subset]f(a), f(b_n)] \subset f(I)$$ qui est un intervalle

contradiction

On peut effectuer des raisonnements symétriques si $b_n < a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Enfin, on peut extraire une sous suite de (a_n) qui tend vers a par valeurs supérieures ou inférieures. Donc, f continue sur I.

Reciproquement, si f continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 3

1) On considère c et $d \in \mathbb{R}$ / $a < c < d < b$

$f \nearrow$ strict $\Rightarrow f(c) < f(d)$

et par définition des limites à droite et à gauche :

$$\exists \eta_1 \, / \, 0 < x - a < \eta_1 \Rightarrow 0 < f(x) - f(a+0) < \frac{f(d)-f(c)}{2};$$

$$\exists \eta_2 \, / \, 0 < b - x' < \eta_2 \Rightarrow 0 < f(b-0) - f(x') < \frac{f(d)-f(c)}{2}$$

Si x et x' verifient :

$$0 < x - a < \mathrm{Inf}(c-a, \eta_1) \Rightarrow f(a+0) < f(x) + \frac{f(d)-f(c)}{2}$$

$$< \frac{f(c)+f(d)}{2} \text{ car } f(x) < f(c)$$

$$0 < b - x' < \mathrm{Inf}(b-d, \eta_2) \Rightarrow f(b-0) > f(x') - \frac{f(d)-f(c)}{2}$$

$$> \frac{f(c)+f(d)}{2} \text{ car } f(x') > f(d)$$

$\Rightarrow \underline{f(b-0) > f(a+0)}$

b) Soit $y \in]\mathrm{Inf}(f), \mathrm{Sup}(f)[$, alors :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a<b \ \text{ et } \ f(a) < y < f(b)$$

Les ensembles

$$I_y = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \leq y\} \quad \text{et} \quad J_y = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \geq y\}$$

sont donc des parties non vides de $\mathbb{R}$ respectivement minorée par a et majorée par b et donc qui admettent une borne supérieure et inférieure notée :

$$I = \mathrm{Sup}(I_y) \quad \text{et} \quad S = \mathrm{Inf}(J_y)$$

On a

– $\underline{I \leq S}$ sinon $\exists (a,b) \in J_y \times I_y \ / \ S < a < b < I$
$\rightarrow\leftarrow$ avec la croissance de f.

– Si $\underline{I < S}$ alors $\exists x \in]I,S[$ avec $f(x) > y$ puisque $x \notin I_y$
— $f(x) < y$ — $x \notin J_y$
$\rightarrow\leftarrow$

Donc $\underline{S = I = x \in \mathbb{R}}$

c) $\underline{1^{er} \text{ cas}}$ $\underline{f(x) = y}$ $\Rightarrow$ on a l'existence de x par construction de $f(x-0)$ et $f(x+0)$

$\underline{2^e \text{ cas}}$ $\underline{f(x) \neq y}$ alors $\underline{f(x-0) \leq y}$ sinon

$$\exists \eta > 0 \ / \ 0 < |x' - x| < \eta \Rightarrow |f(x') - f(x-0)| < \frac{f(x-0) - y}{2}$$

$$\Rightarrow f(x') > \frac{f(x-0) + y}{2} > y$$

$\Rightarrow \exists x' < x = S \ / \ x' \in J_y$ contradiction avec la déf

De même $f(x+0) \geq y$

$\Rightarrow$ existence de $x \in \mathbb{R}$ / $y \in [f(x-0), f(x+0)]$

Si $\exists y \in]Inf(f), Sup(f)[$ / et $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ /

$$- \ x < x'$$

et

$$- \ \begin{cases} y \in [f(x-0), f(x+0)] \\ y \in [f(x'-0), f(x'+0)] \end{cases}$$

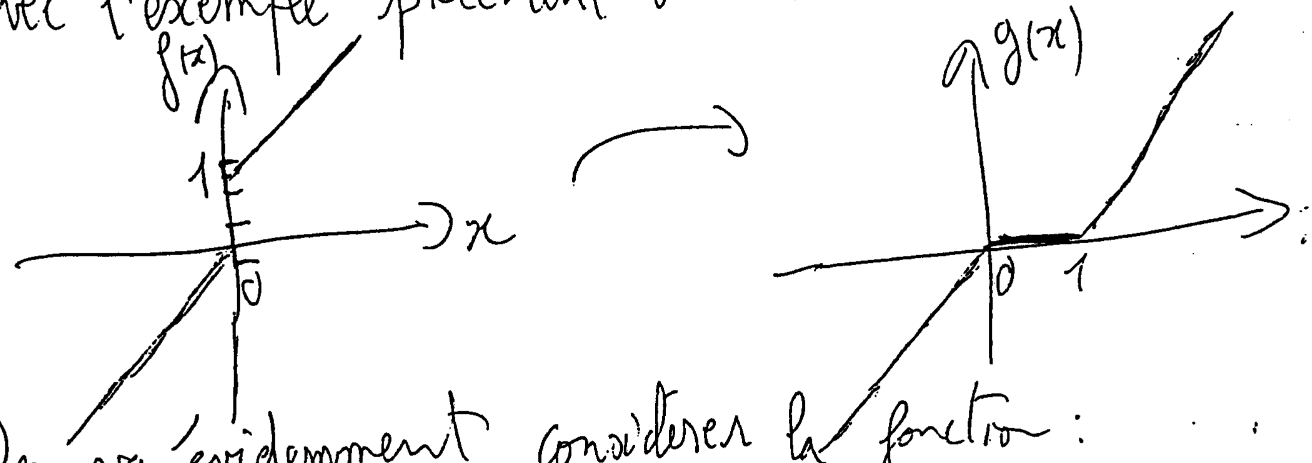
alors

$$f(x+0) \geq f(x'-0) \quad \text{et} \quad x < x' \rightarrow\leftarrow \text{ avec la question (a)}$$

$\Rightarrow$ unicité de x.

Considérer $f(x) = x$ sur $]-\infty, 0[$ et $f(x) = 1 + x$ sur $[0, +\infty[$

d) 1) Avec l'exemple précédent on a :



2) On va évidemment considérer la fonction :

$$g :]Inf(f), Sup(f)[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto x \ / \ y \in]f(x-0), f(x+0)[$$

L'existence et l'unicité de l'image est garantie pour tout $y \in]Inf(f), Sup(f)[$ avec la question (c) ; de plus $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$

④

La fonction g est croissante (pas nécessairement strictement croissante)

en effet :

Si $\exists (y,y') \in]Inf(f), Sup(f)[^2 /$ $- y < y'$ et $- g(y') < g(y)$

$$\underset{x'}{\overset{\|}{g(y')}} < \underset{x}{\overset{\|}{g(y)}}$$

alors ⓐ $\Rightarrow f(x'+0) < f(x-0)$

et $y' \leq f(x'+0) < f(x-0) \leq y \longrightarrow\!\!\!\!\times$

Continuité de g ?

Supposons qu'il existe $y_0 \in]Inf(f); Sup(f)[/$

$\exists \varepsilon > 0 / \forall h > 0 \quad \exists y \in]Inf(f); Sup(f)[/$ $* |y - y_0| < h$

$* |g(y) - g(y_0)| > \varepsilon$

on peut considérer le cas où il existe une infinité de $y > y_0$ vérifiant la propriété précédente et, compte tenu de la croissance de g, on a :

$\exists \varepsilon > 0 / \forall h > 0 \quad \exists y$ avec $0 < y - y_0 < h$

et

$g(y) - g(y_0) > \varepsilon$

Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2 /$ $g(y_0) < x < x' < g(y_0) + \varepsilon$, on a alors :

$$g(y_0) < g(f(x)) < g(f(x')) < g(y_0) + \varepsilon < g(y_0 + h/2)$$

croissance de $g \Rightarrow y_0 < f(x) < f(x') < y_0 + h/2 \quad (\forall h > 0)$

Sinon $f(x) \neq f(x')$ et $f(x), f(x')$ appartiendraient à un intervalle de longueur nulle $\longrightarrow\!\!\!\!\times$

③ Unicité de g ?

Supposons qu'il existe $g_1 :]\mathrm{Inf}(f), \mathrm{Sup}(f)[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_2 :]\mathrm{Inf}(f), \mathrm{Sup}(f)[\longrightarrow \mathbb{R}$ / $-\ g_1$ et g_2 $C^0 \nearrow$

$-\ g_1 \circ h = Id$

$-\ g_2 \circ h = Id$

Sur $f(\mathbb{R})$ on a nécessairement $g_1 = g_2$ (ie : $y = f(x) \Rightarrow g_1(y) = g_2(y)$)

tous les points où g_1 et g_2 peuvent différer sont de la forme

$$y \in]\mathrm{Inf}(f), \mathrm{Sup}(f)[\ / \ \exists x \in \mathbb{R} \text{ avec } y \in [f(x-0), f(x+0)] \text{ et } f(x-0) < f(x)$$

Supposons que $g_1(y) \neq g_2(y)$ alors nécessairement on $g_1(y) \neq x$ ou $g_2(y) \neq x$; nous allons perdre, par ~~exemple~~ : $g_1(y) < x$.

On a $g_1(f(x-0)) = g_1(f(x+0)) = x$ car ;

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ / \ x_n \nearrow x \text{ alors } f(x_n) \longrightarrow f(x-0)$$

donc

$$g_1 \ C^0 \Rightarrow g_1(f(x_n)) = x_n \xrightarrow[(n \to \infty)]{} x = g(f(x-0))$$

même raisonnement pour $g_1(f(x+0))$.

Donc $f(x-0) \leq y$ ~~et~~ $g_1(y) < g_1(f(x-0))$ contradiction avec la croissance de g_1

Non, il suffit de considérer l'exemple traité à la question ① sur $[0,1]$

$g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ ssi f est C^0 (laissé en devoir).

④ <u>Rappel</u>: Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un <u>homéomorphisme</u> de I sur $f(I)$ si: ⑤

ⓐ f est une bijection ⓑ f est continue sur I

ⓒ f^{-1} ——————— $f(I)$.

⊛ Considérons f strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$ alors:

$\Rightarrow$ f est continue sur I.

De plus:

$$\begin{cases} f(I) = J \Rightarrow f \text{ est une surjection de } I \text{ sur } J \\ f \text{ strictement monotone} \Rightarrow f \text{ est une injection de } I \text{ sur } J \end{cases}$$

donc f est une bijection de I sur J et l'application réciproque f^{-1} existe.

On montre facilement que f^{-1} est une fonction strictement monotone dans le même sens que f.

Enfin, f^{-1} est définie sur l'intervalle J et $f^{-1}(J) = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ donc d'après la question ② ⓒ, la fonction f^{-1} est continue.

$\Rightarrow$ f est un homéomorphisme de I sur J.

⊛ Réciproquement: soit f un homéomorphisme d'un intervalle I sur un intervalle J, montrons que f est strictement monotone

Soient $(x,y,z) \in I^3$ tels que $x<y<z$ et $\begin{cases} f(x)<f(y) \\ f(y)>f(z) \end{cases}$

alors il existe $A \in]\mathrm{Sup}(f(x),f(z)), f(y)[$, on a :

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [x,y] \\ A \in]f(x), f(y)[\end{array}\right) \Rightarrow \exists a_1 \in]x,y[\text{ tel que } f(a_1)=A$$

par le théorème des valeurs intermédiaires.

De même, il existe $a_2 \in]y,z[$ tel que $f(a_2)=A$.

Donc $f(a_1)=f(a_2)$ et $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f$ non injective et on a une <u>contradiction</u> avec la bijectivité de f.

On obtient le même type de contradiction si $f(x)>f($ et $f(y)<f(z)$. Donc, f est strictement monotone sur. (on a bien la stricte monotonie de f car f est injective)

Exercice 4

① ⓐ On a $f_{(r,s)}$ continue sur $]0,1]$ et

$$\left(\begin{array}{l} |f_{(r,s)}(x)| \leqslant |x|^r \\ \text{où } r>0 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (f_{(r,s)}(x)) = 0 = f_{(r,s)}(0) \Rightarrow f_{(r,s)} \text{ continue en } 0$$

$\Rightarrow$ <u>$f_{r,s}$ continue sur $[0,1]$ pour tout $(r,s) \in \mathbb{R}$</u>

...

(7) Dans les questions qui suivent, nous aurons besoin du lemme (6)

Lemme

La fonction $x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$ admet une limite en 0 si et seulement si $\underline{\alpha > 0}$ et dans ce cas cette limite est égale à 0.

Démonstration : Si $\underline{\alpha > 0}$ alors, comme dans la question précédente, on a $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right)\right) = 0$

Si $\underline{\alpha = 0}$, on considère les suites :

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1/\beta} \text{ et } y_n = \left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1/\beta} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = 0$ car $\beta > 0$ et :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(x_n^{-\beta}\right)\right) = 1 \text{ alors que } \lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(y_n^{-\beta}\right)\right) = -1.$$

donc $\sin(x^{-\beta})$ n'admet pas de limite en 0.

Si $\underline{\alpha < 0}$, on considère les suites précédentes et on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^\alpha \sin\left(x_n^{-\beta}\right)\right) = +\infty \text{ alors que } \lim_{n\to\infty}\left(y_n^\alpha \sin\left(y_n^{-\beta}\right)\right) = -\infty$$

donc $x^\alpha \sin(x^{-\beta})$ admet pas de limite en 0.

Retour à la question (b)

Ici, $f_{r,s}$ est de classe C^1 sur $]0,1]$ et $f_{r,s}$ est dérivable en 0 si et seulement si la limite en 0 de $x^{r-1}\sin\left(\frac{1}{x^s}\right)$ existe. D'après le lemme, ceci est vérifié si et seulement si $\underline{(r,s) \in E =]1,+\infty[\times\mathbb{R}^{*+}}$

et, dans ce cas, $f'_{r,s}(0)=0$.

(c) On a $f'_{r,s}(0)=0$ pour $(r,s)\in E$ et

$$f'_{r,s}(x) = r\, f_{r-1,s}(x) - s\, x^{r-s-1}\cos\left(\frac{1}{x^s}\right)$$

comme $r>1$, on a $f_{r-1,s}$ borné sur $[0,1]$ donc $f'_{r,s}$ borné sur $[0,1]$ si et seulement si $x^{r-s-1}\cos\left(\frac{1}{x^s}\right)$ est borné sur $[0,1]$. Ceci est vérifié si et seulement si $\underline{r \geq s+1}$ et $\underline{s>0}$, en effet :

⊛ $|x^{r-s-1}\cos(x^{-s})| \leq |x|^{r-s-1} \leq 1$ pour $|x|\leq 1$ si $r\geq s+1$.

⊛ Si $r<s+1$, on considère la suite $x_n=(2n\pi)^{-1/s}$ où $n\in\mathbb{N}^*$ alors $\lim_{n\to\infty}(x_n)=0$ et $\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{r-s-1}\cos(x_n^{-s})\right)=+\infty$ CQFD

(d) Si $f'_{r,s}$ est continue sur $[0,1]$ alors $f'_{r,s}$ est borné sur $[0,1]$ et d'après la question précédente : $r\geq s+1$ et $s>0$. Notamment $r>1$ entraîne $f_{r-1,s}$ continue sur $[0,1]$ donc $f'_{r,s}$ continue sur $[0,1]$ si et seulement si $x^{r-s-1}\cos(x^{-s})$ est continue sur $[0,1]$. Avec des arguments analogues à ceux de la question précédente, ceci est vérifié si et seulement si $\underline{r>s+1}$ et $\underline{s>0}$

(2) Soit g continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que $\underline{g'(0).g'(1)<0}$ alors on peut supposer que $\underline{g'(0)<0<g'(1)}$.

Puisque g est continue sur $[0,1]$ qui est un intervalle fermé et borné, il existe $c\in[0,1]$ tel que $g(c)=\mathrm{Inf}_{x\in[0,1]}(g(x))$. →

Si $\underline{c=0}$, alors g est croissante au voisinage de 0 et $g'(0) \geq 0$, ce qui donne une <u>contradiction</u>. (7)

Si $\underline{c=1}$, alors g décroît au voisinage de 1 et $g'(1) \leq 0$ donc on a encore une <u>contradiction</u>.

Ainsi $\underline{c \in]0,1[}$ avec une dérivé à gauche (resp. à droite) qui est négative (resp : positive) donc $\underline{g'(c)=0}$ CQFD

3) Soient $\alpha < \beta$ deux éléments de $[0,1]$ et <u>λ compris entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$</u>. On considère la fonction $g(x) = f(x) - \lambda x$, alors g est continue et dérivable sur $[\alpha, \beta]$ avec

$$g'(\alpha)\, g'(\beta) = \left(f'(\alpha) - \lambda\right) \cdot \left(f'(\beta) - \lambda\right) < 0 \Rightarrow \exists x \in]\alpha, \beta[\ / \ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{f'(x) = \lambda}$$

<u>Remarque</u> : On se ramène au cas où la fonction est continue et dérivable sur $[0,1]$ en considérant la fonction $\gamma(\lambda) = g((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta)$.

4).a) Par des raisonnements analogues à ceux de la question 1 de l'exercice précédent, on montre que f et g vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (i.e. : on montre que l'image d'un intervalle de $[0,1]$ est un intervalle).

b) Pour toute fonction h continue sur $[0,1]$, la primitive $H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ existe, est continuement dérivable sur $[0,1]$ et vérifie $\underline{H' = h}$. Donc $\mathcal{C}^0([0,1])$ est inclus dans l'ensemble des fonctions qui sont des dérivés de fonctions dérivables sur $[0,1]$ →

De plus :

$$f'_{21}(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2f_{11}(x) - f(x) \text{ pour } x \in]0,1]$$

et $f'_{21}(0) = 0 = 2f_{11}(0) - f(0)$

donc $f'_{21} = 2f_{11} - f \Rightarrow \underline{f = 2f_{11} - f'_{21}}$.

La fonction f_{11} est continue sur $[0,1]$ donc il existe une fonction g dérivable sur $[0,1]$ telle que $g' = f_{11}$. Ainsi $\underline{f = h'}$ où $\underline{h = 2g - f_{21}}$ est une fonction dérivable sur $[0,1]$. CQFD

ⓒ On a $\begin{cases} f(x) - g(x) = 0 & \text{pour } x \in]0,1] \\ f(0) - g(0) = -1 \end{cases}$

donc $f-g$ ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires et, d'après la question précédente, $f-g$ ne peut pas être la dérivé d'une fonction dérivable sur $[0,1]$.

Donc $\underline{g = f - (f-g)}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires mais ne peut pas être la dérivé d'une fonction dérivable sur $[0,1]$, sinon $g = \tilde{h}'$ et

$f - g = h' - \tilde{h}' = (h - \tilde{h})'$ et on aboutit à une contradiction.