TD1 Suites et séries de fonctions

RAPPELS DE COURS

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ sera dit non trivial si il est non vide et non réduit à un point.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soit X un ensemble quelconque et (u_n) une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. Soit $u : X \to \mathbb{K}$. On dit que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers u si pour tout $x \in X$ la suite numérique $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$ ce qui se traduit par

$$(CS) \qquad \forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

On dit que la suite (u_n) converge uniformément vers u (sur X) si elle converge simplement vers u et si l'entier $N(\varepsilon, x)$ définit ci dessus peut être choisi indépendamment de x, ce qui se traduit par

$$(CU) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

La suite de fonctions (u_n) est dite uniformément convergente si il existe une fonction $u : X \to \mathbb{K}$ telle que la suite (u_n) soit uniformément convergente vers u.

Si Y est un sous ensemble non vide de X on dit que la suite (u_n) converge uniformément vers u sur Y si la suite des restrictions $(u_n|_Y)$ converge uniformément vers $u|_Y$. Ceci se traduit par

$$(CU_Y) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall x \in Y, \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) La suite (u_n) converge uniformément vers u.
2) La suite $\|u_n - u\|_\infty := \sup\limits_{x \in X} |u_n(x) - u(x)|$ tend vers 0 ; (elle est donc finie à partir d'un certain rang!).
3) Il existe une suite réelle positive (a_n) de limite nulle et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n(x) - u(x)| \leqslant a_n$ pour tout $x \in X$.

Critère de Cauchy pour la convergence uniforme
La suite (u_n) de fonctions de X dans $\mathbb{K}$ est uniformément convergente sur X si et seulement si elle satisfait au critère de Cauchy pour la convergence uniforme : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que $|u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in X$, tout $n \geqslant N$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Théorèmes fondamentaux

THEOREME 1 (Conservation de la continuité)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(u_n : I \to \mathbb{K})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions convergeant **uniformément** vers une fonction $u : I \to \mathbb{K}$. Si toutes les fonctions u_n sont continues en x_0, la fonction u est continue en x_0.

COROLLAIRE
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(u_n : I \to \mathbb{K})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions et $u : I \to \mathbb{K}$. On suppose

1) Pour tout n la fonction u_n est continue sur I.

2) Pour tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$ la suite (u_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers u.

Alors, la fonction u est continue sur I.
La conclusion reste valable si on suppose, au lieu de 1) qu'il existe un entier n_0 tel que toutes les fonctions u_n pour $n \geqslant n_0$ sont continues sur I.

THEOREME 2 (Intégration)
Soit $[a,b]$ un intervalle **fermé borné** de $\mathbb{R}$ et $(u_n : [a,b] \to \mathbb{K})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions **continues convergeant uniformément** vers une fonction $u : [a,b] \to \mathbb{K}$. Alors

$$\int_a^b u(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt$$

Il est important de noter que ce résultat tombe en défaut si on ne supose plus la convergence uniforme, ou si on ne suppose plus l'intervalle d'intégration fermé borné. (voir exercices 2 et 3)

THEOREME 3 (Dérivation)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et v une fonction de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) Il existe un point $x_0 \in I$ telle que la suite $(u_n(x_0))_{n\geqslant 0}$ soit convergente.

2) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur I.

3) La suite **des dérivées** (u'_n) converge sur I vers v et la convergence **est uniforme sur tout intervalle fermé borné** $[a,b] \subset I$.

Alors

1) La suite (u_n) converge simplement sur I vers une fonctions $u : I \to \mathbb{K}$ et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$.

2) La limite u est de classe C^1 sur I et $u' = v$.

Séries de fonctions

Soit de nouveau X un ensemble quelconque et (u_n) une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I ssi la suite des sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} u_k$ converge uniformément. Dans ce cas, elle converge évidemment simplement et on peut définir une fonction $S : X \to \mathbb{K}$ par $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) La série $\sum u_n$ converge uniformément sur X.

2) La série $\sum u_n$ converge simplement sur X et la suite des restes $R_n = \sum\limits_{k\geqslant n+1} u_k$ (qui est donc définie) converge uniformément sur X vers 0.

3) La série $\sum u_n$ converge simplement sur X et il existe une suite réelle (a_n) de limite nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $\left|\sum\limits_{k\geqslant n+1} u_k(x)\right| \leqslant a_n$.

Une série de fonctions $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente sur X ssi elle satisfait au critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $x \in X$, tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur X si chacune des fonctions u_n est bornée sur X et si la série numérique de terme général $\|u_n\|_\infty := \sup_{x\in X} |u_n(x)|$ est convergente.

Le critère suivant est d'un usage courant :

Une série de fonctions $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur X si et seulement si il existe une série numérique à termes réels positifs convergente $\sum a_n$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n(x)| \leqslant a_n$.

THEOREME 4
Soit, pour tout n, $u_n : X \to \mathbb{K}$. Si la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur X elle est uniformément convergente sur X.

Les théorèmes fondamentaux énoncés pour les suites se traduisent pour les séries de la manière suivante.

THEOREME 5
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u_n : I \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions. Si chacune des fonctions u_n est continue en $x_0 \in I$ et si la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur I, sa somme $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est continue en x_0.

COROLLAIRE Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u_n : I \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions. Si chacune des fonctions u_n est continue sur I et si la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle fermé borné contenu dans I, sa somme $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est continue sur I.

THEOREME 6
Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et une suite de fonctions $u_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ continues sur $[a, b]$. Si la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, la série de terme général $\int_a^b u_n(t)\,dt$ est convergente et on a l'égalité :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt$$

THEOREME 7
Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $u_n : I \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions vérifiant les propriétés suivantes :

1) Pour tout n, la fonction u_n est de classe C^1 sur I.

2) Il existe un point $x_0 \in I$ tel que la série numérique $\sum u_n(x_0)$ converge.

3) La série des dérivées $\sum u_n'$ est uniformément convergente sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.

Alors

1) La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I, la convergence étant uniforme sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.

2) Sa somme est de classe C^1 sur I et on a l'égalité , pour tout x de I :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$$

EXERCICES

Exercice 1

1) Trouver une suite de fonctions continues $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction non continue.
2) Trouver une suite de fonctions $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues, intégrables convergeant uniformément vers la fonction nulle et telle que $\int_0^\infty u_n(t)\,dt$ ne converge pas vers 0.
3) Soit $\lambda \in [0,+\infty]$. Trouver une suite de fonctions $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, convergeant simplement vers 0 et telles que $\int_0^1 u_n(t)\,dt$ tende vers λ.
4) Trouver une suite de fonctions de classe C^∞, $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers la fonction $x \to |x|$.

Exercice 2

Soit I un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ et (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 3

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions (a, b réels, $a < b$). On suppose que pour tout entier n la fonction f_n est croissante et que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que la convergence de la suite (f_n) vers la fonction f est uniforme. (A.T. p. 324)

Application : Soit $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues et convexes convergeant simplement vers une fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que g est convexe et que la convergence de la suite (g_n) est uniforme.

Exercice 4

On pose, lorsque cela a un sens $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$, de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, et vérifie sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$. f est elle dérivable en 0?

Exercice 5

Soit $u \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u^n = \underbrace{u \circ u \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$. On suppose qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ |u^n(x) - u^n(x')| \leqslant a_n|x - x'|$.
2) La série $\sum a_n$ converge.

Montrer que pour tout x la suite $(u^k(x))_{k\geqslant 0}$ converge vers λ unique point fixe de u et que la convergence est uniforme sur tout compact.

Exercice 6 (Fonction zeta)

Pour $x > 1$ on pose
$$\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est définie et de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$. Limite de $\zeta(x)$ quand x tend vers l'infini?

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right) = \gamma$ (constante d'Euler) (AT p.334) .

Exercice 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,\alpha}(x) = n^\alpha x e^{-nx^2}$.
a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_{n,\alpha}(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S_α sa somme.
b) Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que S_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
d) Calculer S_1.
e) On suppose dans cette question $\alpha = -\frac{1}{2}$ et on pose $u_n = u_{n,-\frac{1}{2}}$. Soit $R_n(x) = \sum\limits_{k\geqslant n+1} u_k(x)$.

Montrer que, pour $x > 0$, $R_n(x) \geqslant 2\displaystyle\int_{x\sqrt{n+1}}^{\infty} e^{-u^2}\,du$. La série $\sum u_n$ est elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$?
f) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série $\Sigma u_{n,\alpha}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

TD2 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Trouver une suite de fonctions continues $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction non continue.

Exercice 2

Trouver une suite de fonctions $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues, intégrables convergeant uniformément vers la fonction nulle et telle que $\int_0^\infty u_n(t)\,dt$ ne converge pas vers 0.

Exercice 3

Soit $\lambda \in [0,+\infty]$. Trouver une suite de fonctions $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, convergeant simplement vers 0 et telles que $\int_0^1 u_n(t)\,dt$ tende vers λ.

Exercice 4

Soit I un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ et (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall\, x \neq 0,\ |f(x)| < |x|$. On pose $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Montrer que la suite $(f^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers la fonction nulle uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit V un sous espace vectoriel de dimension finie de $C^0([a,b],\mathbb{R})$. Pour $x \in [a,b]$, soit $\varepsilon_x : V \to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon_x(f) = f(x)$. Montrer que la famille des ε_x engendrent l'espace dual V^* de V.
Soit (f_n) une suite d'éléments de V convergeant simplement vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que $f \in V$ et que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

Exercice 7

Soit, pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}e^{-nx}$. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,+\infty[$, $]\,0,+\infty\,[$, $[a,+\infty[$, $a < 0$.

Exercice 8

Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ converge uniformément sur tout intervalle $[-A,A]$ de $\mathbb{R}$.
Montrer que la suite de fonctions $g_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ converge uniformément vers $g(x) = e^x$ sur tout intervalle $[-A,A]$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions (a,b réels, $a < b$). On suppose que pour tout entier n la fonction f_n est croissante et que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que la convergence de la suite (f_n) vers la fonction f est uniforme. (A.T. p. 324)

Application : Soit $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues et convexes convergeant simplement vers une fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que g est convexe et que la convergence de la suite (g_n) est uniforme.

Exercice 10

Soit, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\cos^n\theta \cdot \sin(n\theta)$. Etudier la dérivabilité de f. Calculer f.

Exercice 11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_{n,\alpha}(x) = n^\alpha x e^{-nx^2}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_{n,\alpha}(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S_α sa somme.

b) Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que S_α est continue sur $\mathbb{R}^*$.

d) Calculer S_1.

Exercice 12

a) Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

b) On note S sa somme. Calculer $\lim_{x\to\infty} S(x)$.

c) Calculer $S(x)$ pour $x \geqslant 0$. Retrouver ainsi le résultat de b).

Exercice 13

Montrer que

$$\int_0^1 e^{-xt\ln(t)}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^n}$$

Exercice 14

Montrer que $f(x) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(x)$. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}^*$ la valeur de

$$I_p = \int_0^\pi \frac{\sin(x)\sin(px)}{5 - 4\cos(x)}\, dx$$

Exercice 15

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\, dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

TD3 révisions : algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, f_a l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est un système libre de $\mathbb{R}^I$.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathbb{L}$ un sous corps de $\mathbb{K}$.
1) Montrer que E et $\mathbb{K}$ sont des $\mathbb{L}$-espaces vectoriels.
2) On suppose que E est de dimension finie q sur $\mathbb{K}$; soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une base de E sur $\mathbb{K}$. On suppose également que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-ev de dimension finie p et on note $(k_1, \ldots, k_p)$ une base de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{L}$. Montrer que la famille $(k_i e_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est une base de E sur $\mathbb{L}$. En déduire que E est un $\mathbb{L}$-ev de dimension finie et donner $\dim_{\mathbb{L}} E$.
3) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie. Combien vaut $\dim_{\mathbb{R}} E$?

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $p : E \to E$ un projecteur. Comparer $\mathrm{tr}(p)$ et $\mathrm{rg}(p)$.
Soient $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des projecteurs de E. Montrer que $p = p_1 + \cdots + p_n$ est un projecteur ssi $p_i \circ p_j = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sous espaces de E de même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in L(E)$. On considère les propriétés suivantes :
(1) $E = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$; (2) $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^2)$; (3) $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$; (4) $\ker(f) = \ker(f^2)$
a) Montrer que (1) $\Leftrightarrow$ (2) et que (3) $\Leftrightarrow$ (4).
b) On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer que les quatre propriétés sont équivalentes.
c) Donner des exemples où (1) est vrai et non (3) ; où (3) est vrai et non (1).

Exercice 6

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie, F et G deux sous espaces de E, $f \in L(F, E')$ et $g \in L(G, E')$. Trouver une CNS pour qu'il existe $\varphi \in L(E, E')$ telle que $\varphi|_F = f$ et $\varphi|_G = g$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in L(E, F)$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$
Montrer que $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \Leftrightarrow \mathrm{im}(f + g) = \mathrm{im}(f) \oplus \mathrm{im}(g)$.

Exercice 8

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
1)Soient $f \in L(E, F)$, $g \in L(E, G)$. Montrer $(\exists h \in L(F, G) \mid g = h \circ f) \Leftrightarrow \ker(f) \subset \ker(g)$.
2) En déduire que, si $u, v \in L(E, F)$, $w \in L(E, G)$, on a

$$\ker(u) \cap \ker(v) \subset \ker(w) \Leftrightarrow \exists\ (a, b) \in L(F, G)^2 \mid w = a \circ u + b \circ v$$

Exercice 9

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
1) Soient $h \in L(F, G)$, $g \in L(E, G)$. Montrer $(\exists f \in L(E, F) \text{ tq } g = h \circ f) \Leftrightarrow \mathrm{im}(g) \subset \mathrm{im}(h)$.
2) En déduire que si $u, v \in L(F, G)$, $w \in L(E, G)$, on a

$$\mathrm{im}(w) \subset \mathrm{im}(u) + \mathrm{im}(v) \Leftrightarrow \exists\ (a, b) \in L(E, F)^2 \mid w = u \circ a + v \circ b$$

Exercice 10

1) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in L(E)$. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est bijective.
Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$ puis que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.
2) Soit $f \in L(E)$. Montrer qu'il existe $g \in L(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g$ bijective ssi $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Exercice 11

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, i.e. telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ \ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible. (*On pourra raisonner par l'absurde en supposant* $\ker(A) \neq \{0\}$).

Exercice 12

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $B, C \in GL(n, \mathbb{K})$ telles que $A = B + C$.

Exercice 13

1) Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer $A\ E_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
2) En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$.
3) Montrer que si une matrice A commute avec toutes les matrices de $GL(n, \mathbb{K})$, elle commute avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$. En déduire le centre de $GL(n, \mathbb{K})$.

Exercice 14

1) Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ telles que $M = (a_i b_j)$.
2) Soient $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
a) Montrer que la matrice $M = (a_i b_j)$ est de rang 1.
b) Déterminer le noyau et l'image de M. Montrer que M est nilpotente ssi $\mathrm{tr}(M) = 0$.
c) Calculer M^p en fonction de M pour tout $p \in \mathbb{N}$.
d) Montrer que $I + M$ est inversible ssi $\mathrm{tr}(M) \neq -1$.

Exercice 15

Montrer que toute matrice de rang r est la somme de r matrices de rang 1.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in L(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
1) Déterminer $\dim(\ker(f))$.
2) Soit W un sous espace vectoriel non nul de E stable par f ; que dire de $\dim(\ker(f) \cap W)$.
3) Soit $C(f) = \{g \in L(E) \,|\, g \circ f = f \circ g\}$ le commutant de f.
Montrer que $C(f) = \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k \ ; \ (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \right\} = \{P(f) \ ; \ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Exercice 17

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n et $u \in L(E)$ nilpotent. Soit F un sev non nul de E stable par u. Montrer que $\dim[u(F)] < \dim(F)$.
En déduire que si $A_1, \dots, A_n$ sont n matrices appartenant à $M_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et deux à deux commutantes, on a $A_1 A_2 \cdots A_n = 0$.

Exercice 18

Soit $M_n(\mathbb{Z}) = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall i, j \ a_{i,j} \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $M_n(\mathbb{Z})$ est un sous anneau de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible dans $M_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 19

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $V(x_1, \dots, x_n) = \det(M)$ où M est la matrice définie par $m_{i,j} = x_i^{j-1}$. Montrer que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

TD4 : Séries entières

Exercice 1
Rayon de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et étude aux bornes de l'intervalle de convergence dans les cas suivants :

$$a_n = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right) \;;\quad a_n = \sin(n\alpha) \;:\quad a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} \;;\quad a_n = \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$$

Rayon de convergence de $\sum n^n z^{(n^2)}$; $\sum \cosh(n) z^{2n}$; $\sum n! z^{n!}$

Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ si a_n est le n-ième chiffre de l'écriture décimale propre du réel $a > 0$.

Exercice 2
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\, dt$. Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

Exercice 3
Soit R_a (respectivement R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ (respectivement de $\sum b_n x^n$); que peut on dire du rayon de convergence de $\sum a_n b_n x^n$, de $\sum a_n^2 x^n$?

Exercice 4
Calculer, lorsqu'elles sont définies, les sommes

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(3n)!} z^{3n} \ (z \in \mathbb{C}) \;;\quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{n(n+1)}{(n-1)!} z^{n-1} \;;\quad \sum_{n \geqslant 0} (n^2 - 5n + 6) z^n \;;$$

Exercice 5
Développer en série entière au voisinage de 0

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin(\alpha)}{1 - x\cos(\alpha)}\right) \;;\quad g(x) = \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Exercice 6
On donne $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall\, n \geqslant 1$ $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.
1) On se propose de montrer par l'absurde que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$. En supposant que ce n'est pas le cas, montrer qu'il existe $\lambda \geqslant 2$ tel que $a_{n+1} - a_n \sim \lambda/n$. Conclure.
2) Montrer que $\forall\, n$ $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3) On note $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ lorsque cela a un sens. Montrer que pour $|x| < 1$ on a $(1-x)f'(x) = (1+2x)f(x)$. En déduire f.

Exercice 7
Déterminer les solutions développables en série entière de l' équation différentielle $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 8
Soit (a_n) une suite réelle positive. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $\sum a_n$ converge
(2) $f(x)$ a une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
Dans le cas où ces propriétés sont satisfaites, comparer $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$.

Exercice 9 (Comparaison des sommes)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes, où l'on suppose b_n équivalent à a_n quand n tend vers l'infini. Montrer que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence R. On suppose désormais $R > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n > 0$. On pose, pour $|x| < R$ $A(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $B(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$.

1) Si $R = +\infty$ montrer que $A(x) \underset{x\to\infty}{\sim} B(x)$

2) Si $R = 1$, et $\sum b_n$ divergente, montrer que $A(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} B(x)$

Applications:

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrer l'existence de $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\alpha}\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{\alpha-1}x^n\right)$

(2) Calculer $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$. En déduire un équivalent, quand x tend vers 1 de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(n)x^n$.

Exercice 10 (Théorème de convergence radiale d'Abel Dirichlet)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. (On pourra effectuer une transformation d'Abel sur le reste de la série)

En déduire que si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ qui converge au point $Re^{i\theta}$ du cercle de convergence, on a

$$\lim_{\substack{r\to R\\ r<R}}\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n e^{ni\theta} = \sum_{n\geqslant 0} a_n R^n e^{ni\theta}$$

Applications:

Calculer

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n\theta)}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n}$$

Théorème de Mertens: soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. Soit pout tout n $c_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q$. On suppose que les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$$

Exercice 11 (Inégalités de Cauchy)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme.

Pour $0 < r < R$ on pose $M(r) = \sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$. Justifier l'existence de $M(r)$.

Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt$. En déduire que, pour tout n entier et tout $r \in]0, R[$ on a $|a_n| \leqslant M(r)r^{-n}$.

Application : théorème de Liouville

Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est constante.

Que peut on dire si on a seulement $f(z) = O\left(|z|^p\right)$ quand $|z|$ tend vers l'infini ?

Exercice 12

Soit (a_n) une suite réelle telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose $A = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $A_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} a_k$. Montrer que les séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(t^n/n!)$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t^n/n!)$ ont un rayon de convergence infini. On note $f(t)$ et $g(t)$ leurs sommes respectives. Montrer que $f' = g' - g$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\int_0^t f(u)e^{-u}\,du = (g(t) - f(t))\,e^{-t}$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-u}f(u)\,du$ existe et vaut A.

TD5 réduction des endomorphismes

$\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1

1) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe une droite et un plan stables par f.

2) Déterminer les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-ev E, et $E_k, 1 \leqslant k \leqslant p$ les sous-espaces propres de f. Soit F un sous espace vectoriel de E.

Montrer que F est stable par f ssi $F = \overset{k=p}{\underset{k=1}{\oplus}} (F \cap E_k)$.

On suppose que f admet n valeurs propres distinctes. Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f?

Exercice 3

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer qu'il existe $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

Exercice 4

Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$, $H(X) = X^{n+1} + a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ et $f : E \to E$ qui à $P \in E$ associe le reste R de la division euclidienne de XP par H.

1) Montrer que les valeurs propres de f sont les racines de H et que les espaces propres sont de dimension 1.

2) En déduire une CNS pour que f soit diagonalisable.

3) Matrice de f dans la base canonique de E.

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et$f \in L(E)$ de rang 1. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1) f est diagonalisable.

2) $f^2 \neq 0$.

3) $\mathrm{tr}(f^2) \neq 0$.

Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Exercice 6

Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ où $\forall i \ m_{i,i} = 0$ et $m_{i,j} = -m_{j,i} = 1$ si $i < j$. Valeurs propres de M ? M est elle diagonalisable, est elle inversible ?

Exercice 7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in L(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$

2) Montrer que u est nilpotent.

3) Montrer que $\ker(u)$ est stable par v. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en déduire que u et v ont un vecteur propre commun. (RDO p.112)

Exercice 8
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall\, X \in M_n(\mathbb{C}),\ \Phi(X) = AX - XB$.

1) Soient $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$. Montrer que $\alpha - \beta \in \mathrm{Sp}(\Phi)$
2) Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $X \neq 0$ et $\Phi(X) = \mu X$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = XP(B + \mu I_n)$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ tels que $\mu = \alpha - \beta$.
3) Montrer $(\exists\, X \in M_n(\mathbb{C}),\ X \neq 0,\ \text{et} AX = XB) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.
4) On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que Φ est diagonalisable.

Exercice 9
Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$

1) On suppose $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.
2) On suppose $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N}$ et que $\mathrm{tr}(A) \leqslant 4n$.
3) On suppose $A^3 = A^2$ et $\mathrm{tr}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$. (Monier algèbre 2)

Exercice 10
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in L(E)$ et $L_f : L(E) \to L(E)$ défini par $L_f(g) = f \circ g$. Comparer les valeurs propres de f et celles de L_f. Montrer : L_f diagonalisable $\Leftrightarrow$ f diagonalisable.

Exercice 11 (Commutant d'un endomorphisme diagonalisable)
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in L(E)$ diagonalisable et $\Gamma(f) = \{g \in L(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.
Montrer que $\Gamma(f)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.
Soit $g \in L(E)$. Montrer que $g \in \Gamma(f)$ ssi g laisse stable tous les sous-espaces propres de f. On note $d_1, \ldots, d_p$ les dimensions des différents sous-espaces propres de f. Calculer $\dim(\Gamma(f))$ en fonction des nombres d_k.
On suppose que f admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes. Montrer que $\Gamma(f) = \{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Exercice 12
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que A nilpotente $\Leftrightarrow \forall p \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathrm{tr}(A^p) = 0$.

Exercice 13
Soient $M \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $X^k = M$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$). Montrer que X est diagonalisable.

Exercice 14
Soient $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ ayant même polynôme minimal et même polynôme caractéristique. Montrer que A et B sont semblables. Montrer que ce résultat tombe en défaut dans $M_4(\mathbb{C})$.

Exercice 15
Soit G un sous groupe commutatif fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, pour toute $A \in G$.

Exercice 16
Dans les trois questions suivantes, $A, C \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ et $I = I_n \in M_n(\mathbb{C})$.

1) Soit $B = \begin{pmatrix} A & 64 \\ A & 2A \end{pmatrix}$; montrer B diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable.
2) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix}$; montrer B diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable et inversible.
3) Soit $B = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$; on suppose en outre que A et C commutent. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)C \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. En déduire M diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $C = 0$.

TD 6 : Intégration

Exercice 1

Existence et calcul éventuel des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)}\, dt \ ; \ I_2 = \int_0^{\infty} \frac{t - \arctan(t)}{t(1+t^2)\arctan(t)}\, dt \ ; \ I_3 = \int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1-t^2)^{3/2}}\, dt \ ; \ I_4 = \int_1^{\infty} \left(\arcsin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Réponses : $I_1 = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$; $I_2 = \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; $I_3 = -\ln(2)$; $I_4 = 1 - \dfrac{\pi}{2} + \ln(2)$.

Exercice 2

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\, dx$ et de $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\, dx$.

Exercice 3

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$; montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. (*On pourra commencer par montrer que ff' a une limite quand x tend vers l'infini dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, puis que cette limite est nulle*)

Exercice 4

On pose, lorsque celà a un sens $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$. Préciser le domaine de définition de Γ. Montrer que pour $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\alpha > 0$. Montrer

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t - 1}\, dt = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)$$

Exercice 5

En utilisant la relation $e^{-t} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ montrer que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ln(t)\, dt = -\gamma$ (constante d'Euler)

Exercice 6

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\, dt$. Existence et développement en série entière.

On pourra utiliser, après l'avoir justifiée l'inégalité $0 \leqslant b_n := \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^n}{\cosh(t)}\, dt \leqslant (2n)!$

Exercice 7

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{e^t + 1}\, dt = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{n}{x^2 + n^2}$

Exercice 8

Soit $f \in C^0([1, \infty[, \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty f(t)\, dt$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge.

Exercice 9
Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies λ (resp. λ') quand x tend vers 0 (resp. ∞). Soient a, b réels, tels que $0 < a < b$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(bt) - f(at)}{t}\, dt$ converge et vaut $(\lambda' - \lambda) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 10
On pose

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\, dt\,,\ J = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt \ \text{ et pour } n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\, dx \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\, dx$$

Calculer I_n. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (I_n - J_n) = 0$. En déduire la valeur de I puis celle de J.

Revisions : intégrales d'une fonction continue sur un segment

Exercice 11

Soit $\alpha \in \mathbb{R},\ |\alpha| \neq 1$. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \left(1 - 2\alpha \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \alpha^2\right) = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n} - 1)$

En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2\right)\, dx$

Exercice 12

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(t))\, dt \leqslant \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt\right)$. Généraliser.

Exercice 13
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 t^n f(t)\, dt = f(1)$.
Indication : commencer par le cas $f(1) = 0$ et couper l'intégrale.

Exercice 14
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f\|_n = \left(\int_a^b |f(t)|^n\, dt\right)^{1/n}$
Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f\|_n = \|f\|_\infty \left(= \sup\limits_{t\in[a;b]} |f(t)|\right)$

Exercice 15
Soient $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ $I = \int_0^1 f(t)\, dt$ et $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$.
Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} n^2(I_n - u_n) = \frac{f'(1) - f'(0)}{24}$$

Appliquer la formule de Taylor à une primitive de f entre k/n et $(2k-1)/2n$ puis entre $(k-1)/n$ et $(2k-1)/2n$.

Exercice 16
Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Exercice 17
Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2^2 3^3 \cdots n^n)^{4/n^2}} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^k\right)^{1/n^2} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n} e^{\frac{1}{k+n}}\right) - n \qquad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$$

TD 7 : Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^k et $a \in I$. On suppose que f a en a un zéro d'ordre $h \leqslant k$, c'est à dire que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(h-1)}(a) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{K}$ de classe C^{k-h} telle que $\forall x \in I\ f(x) = (x-a)^h g(x)$.

Exercice 2

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$, 2π-périodique et ne s'annulant pas. On pose $I(f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt$

1) Montrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.
2) On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. On suppose que P n'admet pas de racines dans $\mathbb{C}$. On pose, pour $r \geqslant 0, f_r(t) = P\left(re^{it}\right)$. Montrer que la fonction h définie par $h(r) = I(f_r)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $h(0)$ et $\lim\limits_{r \to \infty} h(r)$. Conclure.
3) Soit toujours $P \in \mathbb{C}[X]$ et $R > 0$ tel que P n'ait aucune racine de module R. Déterminer $I(f_R)$ au moyen des racines de P.

Exercice 3

On pose, lorsque cela a un sens $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \quad G(x) = \int_o^{\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\, dt \quad \text{et} \quad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. Former une équation différentielle simple du second ordre vérifiée par F.
2. Montrer que G est définie et continue sur $]0, +\infty[$ de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie la même équation différentielle que F sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\forall\, x > 0,\ F(x) = G(x)$. En déduire la valeur de I.

Exercice 4

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+itx}\, dt$ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F vérifie une équation différentielle simple. Expliciter $F(x)$ (on admettra que $F(0) = \sqrt{\pi}$).

Exercice 5

Montrer que, pour $x > 1$

$$\int_0^{\infty} e^{-xt}\frac{\sinh(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Exercice 6

Etudier $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln|x|}{x^2-1} dx$.

Exercice 7

On définit $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\, dt$
1. Montrer que Φ est définie, continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que Φ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. Former une équation différentielle vérifiée par Φ.
3. Calculer $\Phi(0)$ et $\Phi'(0)$. Vérifier que Φ' est bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire I et la valeur de

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt$$

TD 8 : Dualité

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E. Montrer que F est égal à l'intersection des hyperplans qui le contiennent.
Que peut on dire de la dimension de l'intersection de p hyperplans dans un espace vectoriel de dimension n?

Exercice 2

Soient $f, g, h \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Montrer : $\mathrm{rg}(f, g, h) = 2 \Leftrightarrow \ker(f) \cap \ker(g) \cap \ker(h)$ est une droite vectorielle.

Exercice 3

Soient E un K-ev, F, G deux sev tels que $E = F \oplus G$. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Montrer que $E^* = F^o \oplus G^o$ et interpréter la transposée ${}^tp$ de p.

Exercice 4

Soit $M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, M \in M_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AM) = 0$. Montrer que $A = 0$. (tr = trace)

2) Soit Φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, M \in M_n(\mathbb{K}),\ \Phi(M) = \mathrm{tr}(AM)$

Exercice 5

Soit V un sous espace vectoriel de dimension finie de $C^0([a, b], \mathbb{R})$. Pour $x \in [a, b]$, soit $\varepsilon_x : V \to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon_x(f) = f(x)$. Montrer que la famille des ε_x engendrent l'espace dual V^* de V.
Soit (f_n) une suite d'éléments de V convergeant simplement vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que $f \in V$ et que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

Exercice 6

Soient $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\Delta : E \to E$ défini par $\Delta(P) = P(X+1)-P(X)$ et $\varphi_k : E \to \mathbb{K}$ définis par $\varphi_k(P) = \left(\Delta^k(P)\right)(0)$.
Montrer que $(\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1})$ est une base de E^* et déterminer la base de E dont c'est la base duale.
Application : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(n)\frac{X^n}{n!}$

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$. On définit $P_0 = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$. Enfin, on note, pour k entier, φ_k l'application $E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_k(Q) = \left(D^k(Q)\right)(k) = Q^{(k)}(k)$.
1. Montrer que $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$ pour tout $k \geqslant 1$.
2. Montrer que $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est la base duale de $(P_0, \cdots, P_n)$.

3. En déduire $\forall x, y \in \mathbb{C},\quad (x+y)^n = y^n + x\sum\limits_{k=1}^{k=n} C_n^k (x-k)^{k-1}(y+k)^{n-k}$

(TAD, tome 3, p. 22)

Exercice 8 (Interpolation d'Hermite)

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soient $E = \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ et pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $u_k, v_k : E \to \mathbb{K}$ définies par $u_k(P) = P(a_k)$ et $v_k(P) = P'(a_k)$.
1) Montrer que $\beta = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ est une base du dual E^* de E.
2) On pose $T(X) = (X-a_1)\cdots(X-a_n)$ et $T_k(X) = \dfrac{T(X)}{X-a_k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer la base préduale de β. On exprimera ces vecteurs au moyen de T et de ses dérivées ainsi que des T_k.
3) Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n$ dans I deux à deux distincts et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{2n}. Montrer qu'il existe un unique polynôme H_f à coefficients réels, de degré au plus $2n-1$ tel que pour tout k entre 1 et n on ait $H_f(a_k) = f(a_k)$ et $H_f'(a_k) = f'(a_k)$. Montrer que $\forall x \in I,\ |f(x) - H_f(x)| \leqslant \dfrac{1}{(2n)!}\left\|f^{(2n)}\right\|_\infty ((x-a_1)\cdots(x-a_n))^2$.

TD 9 : Topologie

Exercice 1

Déterminer les points d'accumulation des ensembles

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{m+n} \; ; \; m, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \; ; \; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 2

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose $E_N = \{a_n - b_m \; ; \; n \geqslant N, \; m \geqslant 0\}$. Montrer que E_N est dense dans $\mathbb{R}$.
Application : Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(\sin(\sqrt{n}))$ et $\cos(\ln(n))$. (RDO An 1, p 19).

Exercice 3

Soit (E, d) un espace métrique. On définit pour $(x, y) \in E^2$, $\delta(x, y) = \min(1, d(x, y))$ et $h(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Montrer que δ et h sont des distances bornées sur E définissant la même topologie que d.
Indication : vérifier d'abord que pour $a, b, c > 0$, on a $c \leqslant a + b \Rightarrow \frac{c}{1+c} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.

Exercice 4

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, A et B deux parties de X telles que $X = A \cup B$ et $f : X \to Y$. On suppose que les applications $f|_A : A \to Y$ et $f|_B : B \to Y$ sont continues
Montrer que si A et B sont tous les deux ouverts (resp. fermés), f est continue.
Donner un exemple où f n'est pas continue.

Exercice 5

Soit$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe a et b réels positifs tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \; |f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 7

Soit $f \in C^1\big([0, +\infty[\,\mathbb{R}\big)$ admettant une limite finie en ∞.
1) On suppose que f' est uniformément continue. Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
2) Donner un contreexemple dans le cas où f' n'est pas uniformément continue.

Exercice 8

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et $g \in E$ fixé. Pour $f \in E$, on pose $N_g(f) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)g(t)|$. Déterminer une CNS sur g pour que N_g soit une norme. Si c'est le cas, déterminer une CNS sur g pour que cette norme soit équivalente à celle de la convergence uniforme.

Exercice 9

Soient X un espace métrique et E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $a \in X$ fixé. Pour $x \in X$, on définit $\varphi_x : X \to \mathbb{R}$ par $\varphi_x(y) = d(x, y) - d(y, a)$.
Montrer que $\varphi_x \in E$. Montrer que $\Phi : x \to \varphi_x$ est une isométrie de X sur un sous ensemble X' de E.

Exercice 10

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.
1. Soit $a \in \mathring{C}$ et $x \in \overline{C}$. Montrer que $[a, x[\subset \mathring{C}$ (où, par définition, $[a, x[= \{(1 - t)a + tx \, ; \, 0 \leqslant t < 1\}$).
2. Montrer que l'intérieur de C et l'adhérence de C sont convexes.
3. On suppose en outre que l'intérieur de C est non vide. Montrer que $\overline{C} = \overline{\mathring{C}}$ et que $\mathring{C} = \mathring{\overline{C}}$.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{R}$-ev normé, $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et $H = \ker(f)$.
On suppose que f n'est pas continue. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de points de E convergeant vers 0 telle que $\forall n,\ f(x_n) = 1$.
En déduire que f est continue si et seulement si H est fermé.
Soit $H' = f^{-1}(1)$. On suppose f continue. Montrer $d(0, H') = 1/\|f\|$.

Exercice 12

Sur $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$, on considère les formes linéaires μ_n, $n \in \mathbb{N}^*$ et μ définie par

$$\forall f \in E,\ \mu(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{et } \mu_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Calculer $\|\mu_n\|$, $\|\mu\|$, $\|\mu - \mu_n\|$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(f)$ pour $f \in E$. Conclusion ?

Exercice 13

Soit $E = C^0(([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et $F = \left\{f \in E \ \middle|\ \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$.
1. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.
2. Montrer que toute $u \in E$ admet une unique primitive v appartenant à F.
3. On note $v = T(u)$. Montrer que T est linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel normé ; on se propose de montrer qu'il n'existe pas de couple (u,v) d'endomorphismes continus de E tels que $uv - vu = Id_E$.
Justifier cette affirmation si E est de dimension finie.
On suppose désormais que E est de dimension infinie et qu'il existe un tel couple (u,v). Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u^n v - v u^n = n u^{n-1}$. En comparant les normes des deux membres de cette inégalité montrer que u est nilpotent. Conclure.

Exercice 15

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(x-n)^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et T l'application de E dans E qui à $g \in E$ associe $T(g)$ définie par

$$\forall x \in [0,1], T(g)(x) = g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Montrer que T est linéaire continue et que $\|T\| = 2$. Calculer $T\left(h|_{[0,1]}\right)$. En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$$

Exercice 16

Soient

$$E = l^1 = \left\{ (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ \middle|\ \sum_{n\geqslant 0} |x_n| \text{ converge} \right\} \quad \text{muni de la norme } \|x\|_1 = \sum_{n\geqslant 0} |x_n|$$

et

$$F = l^\infty = \left\{ (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (x_n) \text{ est bornée } \right\} \text{ muni de la norme } \|x\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0} |x_n|$$

Montrer que pour tout $\alpha = (\alpha_n) \in F$ et tout $x = (x_n) \in E$, la série $\sum \alpha_n x_n$ est absolument convergente. On pose $\varphi_\alpha(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n x_n$.
Montrer que pour tout α fixé, φ_α est une forme linéaire continue sur E, et que $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$.
Montrer que toute forme linéaire continue sur E est de cette forme. Conclusion ?

TD 10 : Formes bilinéaires

Exercice 1

Réduire, par la méthode de Gauss les formes quadratiques suivantes, et déterminer, pour chacune d'elles, rang, noyau et signature.

1. Sur $\mathbb{R}^6$: $q(x,y,z,t,u,v) = xy + xz + xt + tu + uv + vx$
2. Sur $\mathbb{R}^3$: $q(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 4xz - 2y^2 + 7yz - 6z^2$
3. Sur $\mathbb{R}^4$: $q(x,y,z,t) = 2xy - 6xz - 6yt + 2zt$
4. Sur $\mathbb{R}^4$: $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - xy - yz - zt - tx - xz - yt$

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall P, Q \in E \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k \geqslant 0} e^{-k} P(k) Q(-k)$. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E et déterminer sa signature.

Exercice 3

Soit Φ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n, de signature $(n-1,1)$, de forme polaire φ.
1. Soit F un sev de E tel qu'il existe $v \in F$ vérifiant $\Phi(v) < 0$. Montrer que la restriction de Φ à F est non dégénérée. Quelle est la signature de cette restriction ?
2. Soient $a, b \in E$ indépendants, tels que $\Phi(a) < 0$, $\Phi(b) < 0$. Montrer que $|\varphi(a,b)|^2 \geqslant \Phi(a)\Phi(b)$.

Exercice 4

Soit $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$ (tr désigne la trace).

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $M_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que pour toute forme linéaire θ sur $M_n(\mathbb{K})$ il existe une matrice A telle que $\theta(M) = \mathrm{tr}(AM)$ pour toute $M \in M_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $C(A)$ le commutant de A. Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer :

$$\exists X \in M_n(\mathbb{K}) \; B = AX - XA \Leftrightarrow \forall Y \in C(A) \;\; \mathrm{tr}(YB) = 0$$

4. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ déterminer la signature de φ.

Exercice 5 (Cône isotrope)

Soit Φ une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n , $C(\Phi)$ son cône isotrope. On suppose que $C(\Phi)$ est un sous espace vectoriel de E ; montrer que deux éléments quelconques de $C(\Phi)$ sont φ-orthogonaux. En déduire que $C(\Phi)$ est un sous espace vectoriel de E ssi $C(\Phi) = \ker(\varphi)$.
Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donner une cns sur Φ pour que $C(\Phi) = \ker(\varphi)$.
On suppose $n \geqslant 3$, $C(\Phi) \neq \{0\}$ et Φ non dégénérée ; montre que $C(\Phi)$ n'est contenu dans aucun hyperplan de E. En déduire l'existence, dans ce cas, d'une base de E formée de vecteurs isotropes.

Exercice 6

Soient Φ une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n, φ sa forme polaire et $G_\Phi = \{f \in L(E) \; ; \; \forall x \in E, \; \Phi(f(x)) = \Phi(x)\}$. Montrer que G_Φ est un sous groupe de $GL(E)$. (On pourra commencer par montrer que, si $f \in G_\Phi$, on a, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$.
On suppose $E = \mathbb{R}^2$ et $\Phi(x,t) = -x^2 + t^2$; soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique d'un élément $f \in G_\Phi$. Montrer que $(\det(A))^2 = 1$ et que $d^2 \geqslant 1$. Déterminer toutes les matrices A avec $\det(A) = 1$ et $d > 0$.

Exercice 7 (Orthogonalité)

Soient Φ une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, φ sa forme polaire, F un sous espace vectoriel de E et F' son φ-orthogonal. On note enfin φ_F la restriction de φ à $F \times F$. Montrer que $F' = {}^o(s_\varphi(F))$. En déduire $\dim(F) + \dim(F') = \dim(E) + \dim(F \cap \ker(\varphi))$
Déterminer le noyau de φ_F. Donner un exemple où $\ker(\varphi) \cap F \subsetneq \ker(\varphi_F)$.
Montrer que $E = F \oplus F'$ si et seulement si $\varphi|_{F \times F}$ est non dégénérée.
Donner un exemple de forme φ sur un $\mathbb{R}$-ev E et de sous espace F de E tels que $F = F'$.

TD 11 : Topologie 2

Exercice 1

Soient A et B deux parties compactes disjointes d'un espace métrique E. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall (x, y) \in A \times B,\ d(x, y) \geqslant r$. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U,\ B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| > B \Rightarrow \|f(x)\| > A$.

2) L'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que f possède ces propriétés. Montrer que l'image par f d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$. Montrer que la fonction $x \to \|f(x)\|$ a un minimum.
Application : Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites de $\mathbb{R}^3$ euclidien deux à deux non parallèles et non sécantes. Montrer que parmi tous les triangles $M_1M_2M_3$ où $M_i \in \Delta_i$ il y en a un de périmètre minimum.

Exercice 3

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ telle que $\forall (x, y) \in X^2,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.
Montrer que f a un unique point fixe. (*Considérer la fonction* $h(x) = d(f(x), x)$

Exercice 4

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ telle que $\forall (x, y) \in X^2,\ d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Soient $a \in X$ et (x_n) la suite définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite (x_n). En déduire que f est une bijection. Montrer que l'ensemble des isométries d'un espace compact est un groupe pour la loi $\circ$. (G. Analyse p.125 ou LS tome 4 p. 88) .

Exercice 5 Théorème de Dini

Soient X un espace compact et (f_n) une suite d'applications continues $f_n : X \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) est décroissante (i .e. $\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$) et qu'elle converge simplement vers une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme. (A.T. p.323).

Exercice 6

Soit E un espace affine réel de dimension finie n. L'envelope convexe $\mathrm{Conv}(A)$ d'une partie $A \subset E$ est le plus petit convexe de E contenant A.
1) Justifier l'existence de l'enveloppe convexe d'un sous ensemble quelconque de E.
2) Soit A un sous ensemble non vide de E. Pour p entier naturel, $p \geqslant 1$, on désigne par $C_p(A)$ l'ensemble des points de E qui sont barycentres à coefficients positifs d'au plus p points de A. Montrer que $\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{p \geqslant 1} C_p(A)$.
3) Soient $m > n+1$ et $(y_1, \ldots, y_m)$ des points de E. Montrer qu'il existe des réels non tous nuls $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ vérifiant $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \lambda_i x_i = 0$ et $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \lambda_i = 0$.
En déduire que $C_m(A) = C_{m-1}(A)$.
En conclure que $\mathrm{Conv}(A) = C_{n+1}(A)$. (Théorème de Carathéodory).
4) Déduire de ce qui précède que l'envelope convexe d'une partie compacte de E est compacte.

Exercice 7

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $f : S \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe deux points diamètralement opposés sur S qui ont la même image par f.

Exercice 8

Soit H un sous espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n \setminus H$ est il connexe ?

Exercice 9

Soient E un evn de dimension finie et (u_n) une suite bornée de points de E telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un compact connexe de E.
Application : Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ continue et u la suite de premier terme $u_0\in[a,b]$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=f(u_n)$. Montrer que u converge ssi $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.

Exercice 10

Soient $(K_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de compacts d'un espace métrique E, $K=\bigcap\limits_{n\geqslant 0}K_n$ et Ω un ouvert de E tel que $K\subset\Omega$. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $K_n\subset\Omega$. En déduire que l'intersection d'une suite décroissante de compacts connexes non vides est un compact connexe non vide.

Exercice 11

Montrer que l'application qui à toute matrice $M\in M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) associe son polynôme caractéristique χ_M est une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ continue.
L'application $M_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}_n[X]$ qui à une matrice M associe son polynôme minimal est elle continue?

Exercice 12

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $GL(n,\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
En déduire une démonstration du fait que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique

Exercice 13

Montrer que $GL(n,\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie ($\mathbb{K}$ sous corps de $\mathbb{C}$). Montrer que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées sur E est un ouvert de l'espace $Q(E)$ des formes quadratiques sur E. Quelle est son adhérence ?
On suppose maintenant $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques définies positives est un ouvert de $Q(E)$.

Exercice 15

Soient $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_pX^p$, $Q(X)=b_0+b_1X+\cdots b_qX^q$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degrés respectifs p et q. On leur associe la matrice $M\in M_{p,q}(\mathbb{K})$ suivante :

$$M=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0\\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_0 & \vdots & & & b_0\\ a_p & & \ddots & & b_q & & & b_1\\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_p & 0 & \cdots & 0 & b_q \end{pmatrix}\qquad \text{soit}\quad m_{i,j}=\begin{cases} a_{i-j} & \text{si } 1\leqslant j\leqslant q \text{ et } j\leqslant i\leqslant j+p\\ b_{q+i-j} & \text{si } q+1\leqslant j\leqslant q+p \text{ et } j-q\leqslant i\leqslant j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Le déterminant de Sylvester des polynômes P et Q est par définition $\Delta(P,Q)=\det(M)$.

1) Soit $S=\big(P,XP,\ldots,X^{q-1}P,Q,XQ,\ldots,X^{p-1}Q\big)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   (a) P et Q sont premiers entre eux.
   (b) S est une base de $\mathbb{K}_{p+q-1}[X]$.
   (c) $\Delta(P,Q)\neq 0$.
   En déduire qu'une CNS pour que les racines de P dans $\mathbb{C}$ soient toutes simples et que $D(P):=\Delta(P,P')\neq 0$.
2) Calculer $D(P)$ pour $P=aX^2+bX+c$ puis pour $P=X^3+pX+q$.
3) Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ ayant n racines distinctes est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$.
4) Soit $\mathcal{D}_n\subset M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et $\Omega_n\subset M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que Ω_n est ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{C})$, puis que l'intérieur de $\mathcal{D}_n$ est Ω_n.

TD 12 : Espaces complets, espaces préhilbertiens

Exercice 1
Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que E est un espace vectoriel. On définit $N : E \to \mathbb{R}$ par
$$\forall\, f \in E,\ N(f) = \sup_{x\in I} |f(x)| + \sup_{x,y\in I, x\neq y} \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right|$$
Montrer que N est une norme sur E. E muni de cette norme est il complet ?

Exercice 2
On munit $E = C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ de la norme $\| \ \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. Montrer, en considérant la suite (f_n) définie par $f_n(t) = \min\left(n, t^{-1/2}\right)$, que $(E, \| \ \|_1)$ n'est pas complet.

Exercice 3
Soit $E = C^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$. E muni de la norme $\| \ \|_\infty$ de la convergence uniforme est il complet ? Pour $f \in E$, on pose $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N_1 est une norme et que (E, N_1) est complet. Comparer N_1 et $\| \ \|_\infty$.

Exercice 4
Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$. On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que f^p soit contractante. ($f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$). Montrer que f a un unique point fixe $a \in X$. Montrer que pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n) de premier terme x_0 vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Exercice 5
Soient $E = C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et $\Phi : E \to E$ définie par $\forall\, f \in E, \Phi(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \sin\left(f(t)\right)\, dt$. On munit E de la norme de la convergence uniforme. Montrer que Φ est contractante. En déduire que l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}\sin(y)$ admet une solution unique sur $[0,1]$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 6
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle qu'on ait $f(x) + \frac{1}{2}f(x^2) = g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 7
Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, $L_c(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E et $T : E \to E$ définie par
$$\forall x \in E\ \forall t \in [0,1] \quad T(x)(t) = \int_0^t x(u)du$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe une fonction continue $K_n : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in E\ \forall t \in [0,1] \quad T^n x(t) = \int_0^t K_n(t,u)x(u)du$$
2. Montrer que $T^n \in L_c(E)$ et que la série $\sum_{n\geqslant 0} T^n$ converge dans $L_c(E)$.
3. Soit $g \in E$. Déduire de ce qui précède qu'il existe un $x \in E$ unique tel que
$$\forall t \in [0,1] \ \ x(t) - \int_0^t x(u)du = g(t)$$

Exercice 8 (Théorème du point fixe à paramètres.)
Soient (X, d) un espace métrique complet, Λ un espace métrique et $f : \Lambda \times X \to X$ une application. On suppose qu'elle est contractante en x, uniformément par rapport à $\lambda \in \Lambda$, c'est à dire qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que $d\left(f(\lambda,x), f(\lambda,x')\right) \leqslant kd(x,x')$ pour tout $(x,x') \in X^2$ et tout $\lambda \in \Lambda$. On note $\varphi(\lambda) \in X$ l'unique point fixe de l'application $x \to f_\lambda(x) := f(\lambda,x)$. Montrer que

- Si f est continue, φ est continue.
- Si f est lipschitzienne, φ est lipschtzienne

Application :
1) Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y) = \big(x + \frac{1}{4}\sin(x-y), y + \frac{1}{4}\cos(x+y)\big)$. Montrer que Φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 3/8$ l'équation $x^3 - x + \lambda = 0$ a exactement deux racines positives dont une et une seule, notée x_λ comprise entre 0 et 1/2. Montrer que l'application $\lambda \to x_\lambda$ de $[0, 3/8]$ dans $[0, 1/2]$ est lipschitzienne.

Exercice 9

Soit $E, \langle\ |\ \rangle$ un espace préhilbertien, B la boule unité ouverte, $B' = \overline{B}$ la boule unité fermée. Montrer que B' est strictement convexe, c'est à dire que $\forall x, y \in B'\ \forall \lambda \in]0,1[\ x \neq y \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in B$.

Exercice 10

Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que lafonction $t \to \dfrac{(f(t))^2}{t}$ soit intégrable sur $[0,1]$.
1. Soient $f, g \in E$. Montrer que la fonction $t \to \dfrac{f(t)g(t)}{t}$ est intégrable sur $[0,1]$. En déduire que E est un sous espace vectoriel de l'espace $C([0,1], \mathbb{R})$ et que l'application

$$(f,g) \to \langle f\,|g\,\rangle = \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{t}dt$$

est un produit scalaire sur E.
2. Pour $n \geqslant 1$ on note $E_n(t) = t^n$. Vérifier que $E_n \in E$. Soit (P_n) la suite de fonctions obtenues en appliquant à la suite $(E_n)_{n\geqslant 1}$ le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Montrer que pour tout n, P_n est un polynôme de degré n. Calculer P_1, P_2, P_3.
3. Soit $F = \{f \in E \mid \exists a,\ 0 < a < 1\,; \forall t \in [0,a]\ f(t) = 0\}$. Montrer que F est un sev de E dense dans E.
En déduire que pour toute $f \in E$ on a

$$f = \sum_{n\geqslant 1} \langle P_n\,|f\,\rangle\, P_n$$

Exercice 11 (Espaces de Hilbert)

1) Soient $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien et C une partie de E convexe, non vide et complète. Soient $x \in E$ et $r = d(x, C)$.

   a) Pour $a > 0$ on pose $P_a = C \cap B'(x, r+a)$ où $B'(x,\rho)$ est la boule fermée de centre x et de rayon ρ. Montrer que P_a est une partie fermée de E et que le diamètre de P_a tend vers 0 quand a tend vers 0.

   b) En déduire qu'il existe un point $x' \in C$ et un seul tel que $\|x - x'\| = d(x, C)$. On note p_C l'application qui à x associe x'.

   c) Soit $y \in C$. Montrer que $y = p_C(x) \Leftrightarrow \forall u \in C, \mathrm{Re}\,(\langle x - y\,|u - y\rangle) \leqslant 0$.
   En déduire que l'application p_C est 1-lipschitzienne.

2) On suppose maintenant que E un espace hilbertien.

   a) Soit F un sous espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$ de E. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que la projection orthogonale sur F est continue de norme 1.

   b) Soit E' le dual topologique de E, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E. Soit $J : E \to E'$ l'injection canonique définie par $\forall x \in E,\ J(x) = \langle x \mid \cdot\ \rangle$. En utilisant ce qui précède, montrer que J est une isométrie bijective de E sur E'.

TD 13 : Groupes

Exercice 1

Soit G un groupe fini d'ordre $n = 2m$. Montrer qu'il existe un élément $g \in G$ d'ordre 2. (On pourra considérer l'application $x \to x^{-1}$ de G dans G).

Exercice 2

Soient G un groupe et H un sous groupe tel que $[G : H] = 2$. Montrer que H est distingué dans G. Donner des exemples.

Exercice 3 (Ordre d'un élément)

a) Soient G un groupe, a et b deux éléments de G tels que $ab = ba$. Montrer que si $O(a)$ et $O(b)$ sont premiers entre eux, on a $O(ab) = O(a)O(b)$. Si $\mathrm{pgcd}\,(O(a), O(b)) = d > 1$ a-t-on $O(ab) = \mathrm{ppcm}\,(O(a), O(b))$?
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux groupes cycliques soit cyclique.
c) Donner un exemple de groupe possédant deux éléments a et b d'ordre 2 tels que ab ne soit pas d'ordre fini.
d) Donner un exemple de groupe G infini dont tous les éléments sont d'ordre fini.
e) Soient a et b deux éléments d'un groupe G. On suppose ab d'ordre fini. Montrer qu'il en est de même de ba et que ab et ba ont même ordre.

Exercice 4

Soit G un groupe, $C = \{g \in G \mid \forall x \in G,\ gx = xg\}$ son centre et H un sous groupe de C. Montrer que H est distingué dans G. On suppose le groupe quotient G/H monogène. Montrer que G est abélien.

Exercice 5

Soit G un groupe non trivial dont les seuls sous-groupes sont G et $\{e\}$. Montrer qu'il existe un nombre entier p premier tel que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 6

Soit G un groupe ayant six éléments, que l'on suppose non cyclique.
1) Montrer que G contient un élément a d'ordre 3.
2) Soit $A = G \setminus < a >$.
a) Montrer que A est constitué par les éléments d'ordre 2 de G.
b) Montrer que le centre de G est réduit à 1.
c) Montrer que G opère sur A par automorphismes intérieurs. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 7

Soit K un corps fini de caractéristique différente de 2 et de cardinal > 3. On pose $A = \{x \in K \mid x^2 + 1 = 0\}$. Soient $E = K \setminus \{-1, 0, 1\}$ et $f : E \to E$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Calculer f^k pour $k = 2, 3, 4$.
Montrer que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times E \to E$ définie par $(\alpha, x) \to f^a(x)$ où a est le reste modulo 4 de α est une action du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur E. En déduire que $\mathrm{card}(A) \equiv \mathrm{card}(K) - 3 \bmod 4$.
Soit p un nombre premier impair et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que -1 est un carré dans K ssi $p \equiv 1 \bmod 4$.
On suppose $p = 4m + 1$; en utilisant le théorème de Wilson, trouver une solution explicite de l'équation $x^2 = -1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Montrer que l'ensemble des nombres premiers de la forme $4m + 1$ est infini.

Exercice 8

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E. Pour $\sigma \in G$, on note F_σ l'ensemble des points fixes de σ i.e. $F_\sigma = \{x \in E \mid \sigma * x = x\}$. Soit N le nombre total d'orbites. En calculant de deux manières le cardinal de l'ensemble $S = \{(\sigma, x) \in G \times E \mid \sigma * x = x\}$ démontrer la formule de Burnside : $\mathrm{card}(G) = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{\sigma \in G} \mathrm{card}(F_\sigma)$.

TD 14 : Séries de Fourier

Exercice 1

Soit f la fonction 2π périodique telle que $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Déterminer la série de Fourier de f, étudier sa convergence.

En déduire $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi^2 t^2}{8} - \frac{\pi t^3}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(2p+1)t}{(2p+1)^4}$

Exercice 2

Déterminer la série de Fourier de la fonction définie par $f(x) = |\sin x|$. Etudier sa convergence. Montrer que l'équation différentielle $y'' - y = |\sin x|$ admet une solution périodique et une seule et déterminer son développement en série de Fourier.

Exercice 3

Développer en série de Fourier $f(\theta) = \frac{1}{1 - 2e^{i\theta}}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos(\theta)}$

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = \exp(\alpha e^{ix})$. Montrer $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\alpha \cos(x)}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_n(f)}{ni} e^{inx} = \int_0^x f(t)\, dt - c_0(f)x + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_n(f)}{ni}$$

Exercice 6 (Procédé de sommation d'Abel)

Soit $r \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe une fonction continue 2π périodique et une seule P_r telle que $c_n(P_r) = r^{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et déterminer P_r.
Pour f continue et 2π périodique, on pose $A_r(f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{nit}$. Montrer que $A_r(f) = P_r * f$ (produit de convolution). Montrer que $A_r(f)$ converge uniformément vers f quand r tend vers 1. En déduire une autre démonstration du théorème de Parseval pour les fonctions continues.

Exercice 7 (Fonction θ)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que les fonctions $x \to (1 + x^2)f(x)$ et $x \to (1 + x^2)f'(x)$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On pose $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 et 2π-périodique. Calculer les coefficients de Fourier de F. Montrer que

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(2p\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-niy}\, dy \right)$$

Application : On définit la fonction $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-n^2 \pi t)$. Montrer que

$$\forall\, t > 0,\ \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

(On pourra utiliser la fonction $f(x) = \exp(-ux^2)$ avec $u > 0$ et admettre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{ixy}\, dy = \sqrt{\pi} e^{-y^2/4}$.)

Exercice 8

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de la norme de la convergence quadratique et $g \in E$. Si $f \in E$, on définit $T(f)$ par $T(f) = g * f$, c'est à dire $T(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-t)f(t)\,dt$. Montrer que T est une application linéaire continue de E dans E et que $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|$.

Exercice 9 (équation de la chaleur)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, 2π périodique et de classe C^1 par morceaux. On notera γ_n les coefficients de Fourier exponentiels de φ. On se propose de déterminer une fonction $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times\,]0, +\infty[$ telle que

1) $\forall t \geqslant 0,\ x \to u(x, t)$ est 2π périodique.

2) $\forall (x, t) \in \mathbb{R}\times\,]0, +\infty[,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x, 0) = \varphi(x)$

1. On suppose l'existence d'une telle fonction u. Pour $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ on note $c_n(t)$ le coefficient de Fourier exponentiel d'indice n de $x \to u(x, t)$. Montrer que la fonction $t \to c_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie une équation différentielle linéaire simple. En déduire l'expression de $c_n(t)$.
2. Prouver qu'il existe une et une seule fonction u solution du problème posé.

Exercice 10 (Inégalité isopérimétrique)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 et 2π périodique telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt$ et préciser les cas d'égalité.

2) Soit P un plan affine euclidien. On identifie l'espace vectoriel associé au plan $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soient Γ une courbe fermée simple et régulière de classe C^1 de P, L sa longueur et A l'aire limitée par Γ. Montrer que l'on peut choisir une origine dans P et un pramétrage $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de Γ de classe C^1 et 2π périodique vérifiant

   (1) $\gamma|_{[0,2\pi[}$est injectif. (2) $\forall t \in \mathbb{R},\ |\gamma'(t)| = L/2\pi$ (3) $\int_0^{2\pi} \gamma(t)\,dt = 0$

   On rappelle que $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt$. Montrer que $4\pi A \leqslant L^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 11 (Développements eulériens)

Soit, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi],\ f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$.

1) Déterminer la série de Fourier de f_α et étudier sa convergence.

2) En déduire les égalités suivantes

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \pi\cot(\pi\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

3) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$.

4) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ \dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \displaystyle\prod_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)$.

TD 15 : Espaces euclidiens

Exercice 1

Soit dans $\mathbb{R}^4$ euclidien, le sous espace F donné par les équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right.$. Déterminer la matrice M de la projection orthogonale sur F.

Exercice 2

Soit $(E,\langle\mid\rangle)$ un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) p est un projecteur orthogonal.
(2) p est autoadjoint.
(3) p est normal (c'est à dire $p\circ p^*=p^*\circ p$)
(4) $\forall x\in E,\ \|p(x)\|\leqslant\|x\|$
(5) $\forall x\in E,\ \forall y\in\mathrm{Im}(p),\ \|x-p(x)\|\leqslant\|x-y\|$

Exercice 3

Soient $(E,\langle\mid\rangle)$ un espace euclidien et $u\in L(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de u^*.

Exercice 4

Montrer que la somme des carrés des coefficients d'une matrice symétrique réelle est égale à la somme des carrés des valeurs propres de cette matrice.

Exercice 5

Soient $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ symétriques et positives. Montrer que $\mathrm{tr}(AB)\leqslant\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Exercice 6

Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P\in O(n)$ telle que $P^{-1}({}^tAA)P=A\,{}^tA$.

Exercice 7 (Racice carrée d'un endomorphisme positif)

Soit $(E,\langle\mid\rangle)$ euclidien et $f\in L(E)$ autoadjoint. On dit que f est positif (respectivement défini positif) si $\forall x\in E,\ \langle f(x)\,|x\rangle\geqslant 0$ (respectivement $\forall x\in E,\ x\neq 0\Rightarrow\langle f(x)\,|x\rangle>0$).
Soit f autoadjoint positif. Montrer qu'il existe $h\in L(E)$, autoadjoint positif tel que $h^2=f$. Montrer que h est unique. Que dire de h si f est défini positif ?
Montrer qu'il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $h=P(f)$.
Enoncé matriciel correspondant ?

Exercice 8 (Décomposition polaire d'un automorphisme)

Soit $(E,\langle\mid\rangle)$ euclidien et $u\in L(E)$.
Montrer que les endomorphismes $f=u^*\circ u$ et $f'=u\circ u^*$ sont autoadjoints positifs. On suppose $u\in GL(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple (h,v) avec h autoadjoint défini positif et $v\in O(E)$ tel que $u=v\circ h$. Montrer de même l'existence et l'unicité d'un couple (h',v') avec h' autoadjoint défini positif et $v'\in O(E)$ tel que $u=h'\circ v'$. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ soit une base orthogonale de E.
On ne suppose plus que $u\in GL(E)$. Montrer qu'il existe h autoadjoint positif et $v\in O(E)$ tels que $u=v\circ h$. Le couple (h,v) est il unique dans ce cas ?

Exercice 9 (Endomorphismes antisymétriques)

Soit $(E,\langle\mid\rangle)$ un espace euclidien et $u\in L(E)$.
1) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $\forall x\in E,\ \langle u(x)\,|x\rangle=0$.
2) On suppose u antisymétrique. Montrer que $\mathrm{im}(u)^{\perp}=\ker(u)$ et que le rang de u est pair. Que dire de u^2 ? du polynôme caractéristique de u ?
3) Montrer qu'il existe des réels $0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_m$ et une base orthonormée de E dans laquelle la matrice A de u est diagonale par blocs : $A=\mathrm{diag}(B_1,\dots,B_m,0,\dots,0)$ où $B_k=\begin{pmatrix}0 & -a_k\\ a_k & 0\end{pmatrix}$.

Exercice 10 (Quotients de Rayleigh et théorème de Courant Fischer)
Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$, $\lambda_1(u) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(u)$ les valeurs propres de u comptées avec multiplicité et rangées dans l'ordre croissant. Pour $x \in E, x \neq 0$, on pose $R_u(x) = \dfrac{\langle u(x) \mid x \rangle}{\langle x \mid x \rangle}$.
Montrer que $R_u(E \setminus \{0\}) = [\lambda_1(u), \lambda_n(u)]$.
Montrer que l'application "rayon spectral ": $u \to \rho(u)$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-ev des endomorphismes symétriques de E.
Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ on note G_k l'ensemble des sous espaces vectoriels de E de dimension k.
Soit k entre 1 et n. Montrer

$$\lambda_k(u) = \min_{W \in G_k} \left(\max_{x \in W, x \neq 0} R_u(x) \right) = \max_{W \in G_{k-1}} \left(\min_{x \perp W, x \neq 0} R_u(x) \right)$$

Application
Soit h un endomorphisme symétrique. Montrer que $\lambda_k(u) + \lambda_1(h) \leqslant \lambda_k(u+h) \leqslant \lambda_k(u) + \lambda_n(h)$. En déduire que $|\lambda_k(u+h) - \lambda_k(u)| \leqslant \rho(h)$.

Exercice 11
Soient $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ un système de $n+1$ vecteurs de E vérifiant les propriétés suivantes :
1) $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n+1,\ \|x_i\| = 1$
2) $(x_2 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1)$ est un système libre.
3) $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall i, j\ \ i \neq j \Rightarrow \langle x_i \mid x_j \rangle = k$.

1. Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \neq 0$.
2. En déduire $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = \vec{0}$ et $k = -1/n$.
3. Montrer l'existence, dans tout espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ d'un tel système $(x_1, \ldots, x_{n+1})$.

Exercice 12
Montrer que

$$A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rotation. Préciser l'axe et l'angle.

Exercice 13
Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux coniques (C) et (C') d'équations respectives : $(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2 = 1$ et $(ax+a'y)^2+(bx+b'y)^2 = 1$ où a, b, a', b' sont des réels tels que $ab'-ba' \neq 0$.
Montrer que ce sont des ellipses isométriques et calculer leur aire.

Exercice 14
Nature dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien de la surface (S) d'équation $5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 6yz - 1 = 0$.

Exercice 15
Soient (D) et (D') deux droites non coplanaires d'un espace affine euclidien de dimension trois E. Déterminer l'ensemble des points de E équidistants de (D) et de (D').

Exercice 16
Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et q la forme quadratique associée.
Montrer qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs isotropes de q si et seulement si $\mathrm{tr}(u) = 0$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoide d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Montrer que le plan (P) d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ est tangent à $\mathcal{E}$ si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - h^2 = 0$. En déduire l'ensemble des points de l'espace par lesquels passent trois plans tangents à $\mathcal{E}$, deux à deux orthogonaux.

TD 16 : Calcul différentiel

Exercice 1 (Théorème de Darboux)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
(RDO Analyse 1 p.81 ; FJ An p.93)

Exercice 2 (formule des trapèzes)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,a,b\,[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)\,(f'(a)+f'(b))}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

Exercice 3
Soit $f : [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant M$ et $\alpha > 0$ tel que $\forall x \geqslant 0,\ \alpha f(x) \leqslant f''(x)$. Montrer que f est décroissante, que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ et enfin que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant f(0)e^{-x\sqrt{\alpha}}$.

Exercice 4
Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe des constantes M_0 et M_2 telles que $\forall x,\ |f(x)| \leqslant M_0$ et $|f''(x)| \leqslant M_2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ |f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{t} + \frac{M_2}{2}t$. En déduire $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 5
Soit $f :]\,0,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ convexe et $g :]\,0,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - xf'_d(x)$. Montrer que g est décroissante. Etudier le sens de variation de la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$.
On suppose que $g(x)$ admet une limite finie b quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $\varphi(x)$ admet une limite finie a quand x tend vers l'infini. En déduire que le graphe de f admet une droite asymptote. Que dire de $\lim\limits_{x\to\infty} f'_d(x)$, de $\lim\limits_{x\to\infty} f'_g(x)$?

Exercice 6
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe un réel $\alpha \in \,]\,0,1\,[$ tel que $\forall (x,y) \in I^2\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$. Montrer que f est convexe sur I.

Exercice 7 (Transformation de Legendre)
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, strictement convexe. Soit, pour p réel $F(x,p) = px - f(x)$.
a) Montrer que l'ensemble des p réels tels que l'équation en x $\frac{\partial F}{\partial x}(p,x) = 0$ ait une solution est un intervalle ouvert J et que pour $p \in J$ cette solution est unique. On la notera $x(p)$.
b) Soit $g : J \to \mathbb{R}$ définie par $g(p) = F(p, x(p))$. Montrer que g est de classe C^∞. On note $g = L(f)$. Montrer que $L(g) = f$.
c) Montrer que $\forall (x,p) \in I \times J,\ xp \leqslant f(x) + g(p)$
d) Calculer $L(f)$ pour $f(x) = \frac{x^a}{a}$, a réel strictement positif.

Exercice 8
Etudier continuité, différentiabilité en $(0,0)$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ sinon.

Exercice 9
Etudier la continuité et la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

Exercice 10
Soient $E=\mathbb{R}^n$ euclidien, $\Omega=E\setminus\{0\}$, $k\in\mathbb{R}^*$ et $F:\Omega\to\Omega$ définie par $F(x)=k\dfrac{x}{\|x\|^2}$. Pour $a\in\Omega$, déterminer la différentielle $dF(a)$ et la caractériser géométriquement.

Exercice 11
Soit $\Delta=\{(t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}^2\setminus\Delta\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Montrer que g a un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$ ssi f est de classe C^1.

Exercice 12
Soient $E=\mathbb{R}^n$ euclidien et $u\in L(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. Soit $f:E\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\langle u(x)\,|x\rangle}{\langle x\,|x\rangle}$. Montrer que f est différentiable. Calculer la différentielle d_af en un point $a\in E\setminus\{0\}$. Montrer que f est majorée et atteint sa borne supérieure. En déduire une autre démonstration de l'existence d'une valeur propre de u.

Exercice 13
Etudier les extrema locaux des fonctions de deux variables
$f_1(x,y)=x^2+y^4$; $f_2(x,y)=x^2+y^3$; $f_3(x,y)=x^2-y^2+y^4/4$; $f_4(x,y)=xy\ln(x+y)$; $f_5(x,y)=xe^y+ye^x$

Exercice 14 (Fonctions harmoniques dans le plan)
Si f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ on appelle laplacien de f la fonction Δf définie par $\Delta f\,(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,(x_1,\ldots,x_n)$. f est dite harmonique si Δf est identiquement nulle dans Ω. Dans toute la suite $n=2$.

1) Soit g une fonction de classe C^2 définie sur une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$. Exprimer le laplacien de g en coordonnées polaires.
2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^2. Pour $(a;b)\in\Omega$, on définit, pour $r>0$ assez petit, $h(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\,d\theta$.
   - On suppose f harmonique; montrer que f possède la propriété de la moyenne, c'est à dire :
     $\forall(a,b)\in\Omega, f(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\,d\theta$ pour tout $r>0$ assez petit.
     (*former une équation différentielle du second ordre vérifiée par h*)
   - Montrer (sans supposer f harmonique) que $h(r)=h(0)+\frac{r^2}{2}\Delta f(a,b)+\underset{r\to0}{o}(r^2)$. En déduire que si f possède la propriété de la moyenne, elle est harmonique dans Ω.
   - Soit U un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f:\overline{U}\to\mathbb{R}$ continue sur $\overline{U}$ et harmonique dans U. Montrer que le maximum de f sur $\overline{U}$ est atteint en un point du bord de U. (principe du maximum)
     (Considérer $\left\{x\in U\mid f(x)=\sup\limits_{z\in\overline{U}}f(z)\right\}$).
     Application: soient f et g deux fonctions continues sur $\overline{U}$, harmoniques dans U et qui coïncident sur le bord de U. Montrer que$f=g$.

Exercice 15
Montrer qu'il existe un voisinage U de I_n dans $M_n(\mathbb{R})$ et une application de classe C^∞, $r:U\to M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M\in U$, $(r(M))^2=M$.

Exercice 16
Montrer que la relation $\arctan(xy)=\exp(x+y)-1$ définit au voisinage de $(0,0)$ une fonction $y=f(x)$ et déterminer un développement limité à l'ordre 4 de f en 0. (Rep : $f(x)=-x-x^2-x^3-3x^4/2+o(x^4)$).
Même question pour $xy-\sin y+x=0$. (Rep : $f(x)=x+x^2+7x^3/6+5x^4/3+o(x^4)$).

Exercice 17
Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose qu'il existe $k>0$ tel que $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, $\|f(x)-f(y)\|\geqslant k\,\|x-y\|$.

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $df(x)$ est un isomorphisme.
2) Montrer que pour tout sous ensemble fermé $F\subset\mathbb{R}^n$, l'ensemble $f(F)$ est fermé.
3) Déduire des questions précédentes que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

TD 17 : Isométries

Exercice 1 (Groupes d'isométries du plan euclidien.)
Soit P un plan affine euclidien. On note $\mathrm{Isom}(P)$ le groupe des isométries de P.

1) Soient u et v deux déplacements de P. Déterminer $uvu^{-1}v^{-1}$. En déduire :
   1) Tout sous groupe fini du groupe $\mathrm{Isom}^+(P)$ des déplacements du plan est commutatif.
   2) Si F est un ensemble borné non vide de P, le groupe des déplacements qui conservent F est commutatif.

2) Soit G un sous groupe fini de $\mathrm{Isom}(P)$. Montrer qu'il existe un point de P fixe par tous les éléments de G.

3) Déterminer tous les sous groupes finis du groupe $\mathrm{Isom}^+(P)$.

4) Soit G un sous groupe fini de $\mathrm{Isom}(P)$, non contenu dans $\mathrm{Isom}^+(P)$ et $H = G \cap \mathrm{Isom}^+(P)$.
   1) Montrer que H est un sous groupe distingué de G d'indice 2. En déduire que le cardinal de G est pair.
   2) On pose $\mathrm{card}(G) = 2n$. Montrer que G est engendré par $\{r, s\}$ où r est une rotation d'angle $2\pi/n$ et s une réflexion dont l'axe passe par le centre O de r.

   Il n'y a donc, à isomorphisme près qu'un seul sous groupe de $\mathrm{Isom}(P)$, non contenu dans $\mathrm{Isom}^+(P)$, de cardinal $2n$. On le note $\mathcal{D}_n$ (groupe diédral).
   3) Déterminer le centre de $\mathcal{D}_n$.
   4) Montrer que $\mathcal{D}_3$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
   5) Soit K un groupe engendré par deux éléments a et b tels que $O(a) = n$, $O(b) = O(ab) = 2$. Montrer que K est isomorphe à $\mathcal{D}_n$. ($O(x)$ désigne l'ordre de l'élément x).

5) Déterminer le groupe des isométries de P qui conservent un rectangle non carré ; un losange. Pourquoi ces deux groupes sont ils isomorphes?

Exercice 2 (Groupe des isométries du cube)
Soit K un cube de l'espace affine euclidien de dimension 3. On note O le centre de K et G (respectivement G_+) le groupe des isométries (respectivement des déplacements) de l'espace conservant K. 1. Montrer que $[G : G_+] = 2$ et que G est isomorphe au produit cartésien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G_+$.
2. Vérifier que G_+ contient au moins 24 rotations distinctes et les caractériser.
3. Soit D l'ensemble dont les éléments sont les quatre grandes diagonales du cube. Montrer que G_+ agit naturellement sur D et que cette action est fidèle. En déduire que G_+ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 3
Soit $a, b \in \mathbb{C}$ $|a| = 1$ et $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$.
1. Montrer que $f_{a,b}$ est une réflexion ssi $a\bar{b} + b = 0$. Dans ce cas, déterminer son axe.
2. Montrer que si $a\bar{b} + b \neq 0$, $f_{a,b}$ est une symétrie glissée. Déterminer sa décomposition canonique sous la forme $t_{\vec{u}} \circ f_{a,b'}$ en exprimant $\vec{u}$ et b' en fonctions de a et b.

Exercice 4
Soit f un vissage d'un espace affine euclidien de dimension 3 ; montrer que l'axe de f est l'ensemble des points m de E tels que la distance $d(m, f(m))$ soit minimale.

Exercice 5
On considère l'application d'un espace affine euclidien de dimension 3 dans lui même, définie dans une repère orthonormé par $f(M) = M'$ avec :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}\left(x - y - \sqrt{2}z\right) + 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}\left(-x + y - z\sqrt{2}\right) - 1 \\ z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y)) \end{cases}$$

Montrer que f est un vissage et déterminer sa forme réduite.

TD 18 : Equations différentielles

Exercice 1

Résoudre (E) $\quad xy'' + 2y' + xy = 0$. (On commencera par chercher les solutions développables en série entière).

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)^2y'' + 2t(1+t^2)y' + y = 0$ au moyen d'un changement de variables.

Exercice 3 (Equation d'Euler)

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, a, b, c des réels avec $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle (E) $\quad ax^2y'' + bxy' + cy = f(x)$. Montrer que le changement de variables $t = \ln(|x|)$ transforme (E) en une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Application : résoudre $x^2y'' + xy' - y = 2x$

Exercice 4 (Propriétés élémentaires des équations du second ordre)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues et (E) l'équation différentielle $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
1) Soit $[a, b]$ un intervalle compact contenu dans I et f une solution non nulle de (E). Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $[a, b]$.
2) Soient f et g deux solutions indépendantes de (E) sur I. Montrer que f et g n'ont pas de zéros communs.
3) Soient u, v une base de solutions de (E). On suppose que u s'annule en au moins deux points de I. Soit $x_0 < x_1 \in I$ deux zéros consécutifs de u. (Justifier que celà a un sens de parler de zéros consécutifs). Montrer que v s'annule dans l'intervalle $]\, x_0, x_1 \,[$.

Exercice 5

Soit $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et l'équation différentielle (E) $y'' - q(x)y = 0$. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de (E). Montrer que la fonction $u = y^2$ est convexe. Montrer que toute solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}$ est non bornée

Exercice 6

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle (E) $\quad y'' + q(x)y = 0$.
Montrer que si y est une solution de (E), bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$. En déduire que (E) admet des solutions non bornées. *(On pourra considérer le wronskien de deux solutions indépendantes.)*

Exercice 7

Soient $q : [0, +\infty\,[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \geqslant 0,\ q(x) \geqslant 0$ et (E) l'équation différentielle $y'' - q(x)y = 0$.
1) Soit u la solution de (E) vérifiant $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$. Montrer que :
(a) $\forall x > 0,\ u(x) > 0$.
(b) $\forall x \geqslant 0,\ u(x) \geqslant x$.
(c) La fonction $1/u^2$ est intégrable sur $[1, +\infty\,[$.

2) On pose, pour $x > 0$, $v(x) = u(x) \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{dt}{u^2(t)}$. Montrer que v est une solution de (E) sur $]\,0, +\infty\,[$, que v est décroissante, convexe, et qu'elle admet une limite finie en 0. Montrer enfin que (u, v) est une base de solutions de (E) sur $[0, +\infty\,[$.

Exercice 8

Soit q une fonction continue sur $[a, +\infty\,[$ à valeurs réelles. On suppose en outre qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que $\forall x \geqslant a,\ m \leqslant q(x) \leqslant M$. Soit y une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$.

1) Montrer que pour tout $x_0 \geqslant a$, y s'annule sur l'intervalle $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}\right]$.
2) Soient x_1 et x_2 deux zéros de y. Montrer que $|x_2 - x_1| \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{M}}$.
3) Montrer que y a une infinité dénombrable de zéros dans $[a, +\infty[$ et qu'on peut numéroter cet ensemble en une suite croissante $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
4) Application : Soit y une solution non nulle de l'équation $y'' + e^x y = 0$. Avec les notations précédentes, trouver un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 9

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que le système $X' = AX$ a toutes ses solutions bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable et toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

Exercice 10

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} \in O(n)$. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3. Soit $\vec{e} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ et $u \in L(E)$ défini par $\forall \vec{v} \in E,\ u(\vec{v}) = \vec{e} \wedge \vec{v}$. Calculer e^{tu}.

Exercice 11

Soient A, B, $C \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA}e^{tB} = e^{tC}$. Montrer que $A + B = C$ et que $AB = BA$.

Exercice 12

Résoudre les systèmes (S) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2y - z \\ y' & = & x - y \\ z' & = & -x - y + z \end{array}\right.$ (S') $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x - 3y + z + t \\ y' & = & x + t + 1 \\ z' & = & y + t + 1 \end{array}\right.$

Exercice 13

Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $y''+2y'+y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$

b) $y''+y = \dfrac{2}{\cos^3(x)}$
c) $y^{(4)} - 2y'' + y = \cosh(x)$

Problèmes donnés en concours blancs en 2007-2008

AI 1993 1ère épreuve
AI 2000 2ème épreuve
AI 1996 2ème épreuve
AI 2004 2ème épreuve
AI 2005 2ème épreuve (?)