Les différentes formules de Taylor

Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur un intervalle $[a,b]$, on dira que f est dérivable sur $[a,b]$ si $f'(x)$ existe pour tout $x\in]a,b[$ et f admet une dérivée à droite (resp. à gauche) en a (resp. en b), enfin on notera $f'(a)=f'_d(a)$, $f'(b)=f'_g(b)$. Les dérivées successives seront définies de la même manière, par exemple pour la dérivée seconde on notera :

$$f''(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\right) \text{ pour } x_0\in]a,b[$$

$$f''(a)=\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f'(x)-f'_d(a)}{x-a}\right)\ ;\ f''(b)=\lim_{x\to b^-}\left(\frac{f'(x)-f'_g(b)}{x-b}\right)$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre $k>2$.
Avec ces notations, on a les théorèmes suivants :

Formule de Taylor-Lagrange.
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a,b]$, admettant une dérivée d'ordre n continue sur ce segment (i.e. : $f\in\mathcal{C}^n([a,b])$) et une dérivée d'ordre $n+1$ sur l'intervalle $]a,b[$. Alors, pour deux points quelconques distincts α et β de $[a,b]$, il existe un point γ de $]\alpha,\beta[$ tel que :

$$f(\beta)=f(\alpha)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}f^{(k)}(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\gamma). \qquad (1)$$

Remarque. 1) Cette proposition se résume au théorème des accroissements finis lorsque $n=0$.
2) La formule de Taylor-Lagrange reste vraie si on suppose seulement que f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b[$ et admet une dérivée d'ordre $n+1$ sur $]a,b[$.
3) Le réel γ est souvent désigné par $\gamma=\alpha+\theta(\alpha-\beta)$ avec $0<\theta<1$.
Lorsque $\alpha=0$, en posant $\beta=x$, on obtient la **formule de Taylor-Mac Laurin** :

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\ (0<\theta<1). \qquad (2)$$

Formule de Taylor-Young.
Soit f une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque E définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $f^n(x_0)$ existe. Alors la fonction :

$$\rho \,:\, x \longmapsto \rho(x) = \frac{1}{(x-x_0)^n}\left[f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(x_0)}\right]$$

tend vers zéro lorsque x tend vers x_0.
En posant $\rho(x_0) = 0$, on en déduit qu'il existe une fonction $\rho : x \mapsto \rho(x)$, définie sur un voisinage de x_0 et à valeurs dans E, qui tend vers zéro lorsque x tend vers x_0 et qui vérifie :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \rho(x). \tag{3}$$

Remarque. La formule de Taylor-Young est *locale* (elle est valable uniquement au voisinage de x_0) alors que la formule de Taylor-Lagrange est *globale* (elle est valable sur tout l'intervalle $[a, b]$), en contrepartie les hypothèses nécessaires pour établir la formule de Taylor-Young sont beaucoup moins restrictives.

Formule de Taylor avec reste intégral.
Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, définie sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée d'ordre $n+1$ continue sur ce segment (i.e. : $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$). Alors, pour tout $x \in [a, b]$, on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \tag{4}$$

Remarque. Cette formule donne les estimations les précises sur le reste.