# RAPPELS DE COURS

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ sera dit non trivial si il est non vide et non réduit à un point.

## Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soit $X$ un ensemble quelconque et $(u_n)$ une suite d'applications de $X$ dans $\mathbb{K}$. Soit $u : X \to \mathbb{K}$. On dit que la suite de fonctions $(u_n)$ converge simplement vers $u$ si pour tout $x \in X$ la suite numérique $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$ ce qui se traduit par

$$(CS) \qquad \forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

On dit que la suite $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ (sur $X$) si elle converge simplement vers $u$ et si l'entier $N(\varepsilon, x)$ définit ci dessus peut être choisi indépendamment de $x$, ce qui se traduit par

$$(CU) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

La suite de fonctions $(u_n)$ est dite uniformément convergente si il existe une fonction $u : X \to \mathbb{K}$ telle que la suite $(u_n)$ soit uniformément convergente vers $u$.

Si $Y$ est un sous ensemble non vide de $X$ on dit que la suite $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ sur $Y$ si la suite des restrictions $(u_n|_Y)$ converge uniformément vers $u|_Y$. Ceci se traduit par

$$(CU_Y) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall x \in Y, \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) La suite $(u_n)$ converge uniformément vers $u$.
2) La suite $\|u_n - u\|_\infty := \sup_{x \in X} |u_n(x) - u(x)|$ tend vers 0 ; (elle est donc finie à partir d'un certain rang!).
3) Il existe une suite réelle positive $(a_n)$ de limite nulle et un entier $n_0$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n(x) - u(x)| \leqslant a_n$ pour tout $x \in X$.

*Critère de Cauchy pour la convergence uniforme*
La suite $(u_n)$ de fonctions de $X$ dans $\mathbb{K}$ est uniformément convergente sur $X$ si et seulement si elle satisfait au critère de Cauchy pour la convergence uniforme : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que $|u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in X$, tout $n \geqslant N$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \Rightarrow |u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

## Théorèmes fondamentaux

**THEOREME 1 (Conservation de la continuité)**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(u_n : I \to \mathbb{K})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions convergeant **uniformément** vers une fonction $u : I \to \mathbb{K}$. Si toutes les fonctions $u_n$ sont continues en $x_0$, la fonction $u$ est continue en $x_0$.

**COROLLAIRE**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(u_n : I \to \mathbb{K})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions et $u : I \to \mathbb{K}$. On suppose

1) Pour tout $n$ la fonction $u_n$ est continue sur $I$.

2) Pour tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$ la suite $(u_n)$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $u$.

Alors, la fonction $u$ est continue sur $I$.
La conclusion reste valable si on suppose, au lieu de 1) qu'il existe un entier $n_0$ tel que toutes les fonctions $u_n$ pour $n \geqslant n_0$ sont continues sur $I$.

**THEOREME 2 (Intégration)**
Soit $[a, b]$ un intervalle **fermé borné** de $\mathbb{R}$ et $(u_n : [a, b] \to \mathbb{K})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions **continues convergeant uniformément** vers une fonction $u : [a, b] \to \mathbb{K}$. Alors

$$\int_a^b u(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b u_n(t)\, dt$$

Il est important de noter que ce résultat tombe en défaut si on ne supose plus la convergence uniforme, ou si on ne suppose plus l'intervalle d'intégration fermé borné. (voir exercices 2 et 3)

**THEOREME 3 (Dérivation)**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ et $v$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) Il existe un point $x_0 \in I$ telle que la suite $(u_n(x_0))_{n \geqslant 0}$ soit convergente.

2) Toutes les fonctions $u_n$ sont de classe $C^1$ sur $I$.

3) La suite **des dérivées** $(u_n')$ converge sur $I$ vers $v$ et la convergence **est uniforme sur tout intervalle fermé borné** $[a, b] \subset I$.

Alors

1) La suite $(u_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonctions $u : I \to \mathbb{K}$ et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$.

2) La limite $u$ est de classe $C^1$ sur $I$ et $u' = v$.

## Séries de fonctions

Soit de nouveau $X$ un ensemble quelconque et $(u_n)$ une suite d'applications de $X$ dans $\mathbb{K}$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $I$ ssi la suite des sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k$ converge uniformément. Dans ce cas, elle converge évidemment simplement et on peut définir une fonction $S : X \to \mathbb{K}$ par $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) La série $\sum u_n$ converge uniformément sur $X$.

2) La série $\sum u_n$ converge simplement sur $X$ et la suite des restes $R_n = \sum\limits_{k \geqslant n+1} u_k$ (qui est donc définie) converge uniformément sur $X$ vers 0.

3) La série $\sum u_n$ converge simplement sur $X$ et il existe une suite réelle $(a_n)$ de limite nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $\left| \sum\limits_{k \geqslant n+1} u_k(x) \right| \leqslant a_n$.

Une série de fonctions $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente sur $X$ ssi elle satisfait au critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $x \in X$, tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| \leqslant \varepsilon$.

*Convergence normale*

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $X$ si chacune des fonctions $u_n$ est bornée sur $X$ et si la série numérique de terme général $\|u_n\|_\infty := \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$ est convergente.

Le critère suivant est d'un usage courant :

Une série de fonctions $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $X$ si et seulement si il existe une série numérique à termes réels positifs convergente $\sum a_n$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n(x)| \leqslant a_n$.

**THEOREME 4**
Soit, pour tout $n$, $u_n : X \to \mathbb{K}$. Si la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $X$ elle est uniformément convergente sur $X$.

Les théorèmes fondamentaux énoncés pour les suites se traduisent pour les séries de la manière suivante.

**THEOREME 5**
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u_n : I \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions. Si chacune des fonctions $u_n$ est continue en $x_0 \in I$ et si la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $I$, sa somme $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$ est continue en $x_0$.

**COROLLAIRE** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u_n : I \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions. Si chacune des fonctions $u_n$ est continue sur $I$ et si la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle fermé borné contenu dans $I$, sa somme $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$ est continue sur $I$.

**THEOREME 6**
Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et une suite de fonctions $u_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ continues sur $[a, b]$. Si la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, la série de terme général $\int_a^b u_n(t)\, dt$ est convergente et on a l'égalité :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\, dt$$

**THEOREME 7**
Soient $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $u_n : I \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions vérifiant les propriétés suivantes :

1) Pour tout $n$, la fonction $u_n$ est de classe $C^1$ sur $I$.

2) Il existe un point $x_0 \in I$ tel que la série numérique $\sum u_n(x_0)$ converge.

3) La série des dérivées $\sum u_n'$ est uniformément convergente sur tout intervalle fermé borné contenu dans $I$.

Alors

1) La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $I$, la convergence étant uniforme sur tout intervalle fermé borné contenu dans $I$.

2) Sa somme est de classe $C^1$ sur I et on a l'égalité , pour tout $x$ de $I$ :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$$