# INTEGRALES SIMPLES

## EXERCICE 1 (Lemme de Riemann Lebesgue)

**Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$, intégrable; pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $I_n = \int_a^b f(x)e^{inx}\,dx$; montrer que $\lim\limits_{n\infty} I_n = 0$. On considérera d'abord le cas d'une fonction en escalier; on étudiera de même les limites de**

$$J_n = \int_a^b f(x)\cos nx\,dx \quad \text{et de} \quad K_n = \int_a^b f(x)\sin nx\,dx.$$

## EXERCICE 2

**Pour $a \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère**

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$$

**1° Calculer $I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi)$; en déduire $I_n(\pi)$ pour tout $n$.**

**2° Pour $a \in ]0, \pi[$, comparer $I_n(a)$ et $I_n(\pi - a)$; montrer, en utilisant l'exercice n° 1, ci-dessus, que**

$$\lim_{n\infty} [I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0,$$

**puis que $\lim\limits_{n\infty} I_n(a) = \frac{\pi}{2}$.**

**3° Déterminer**

$$\lim_{n\infty} \int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

**et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.**

## EXERCICE 3

**Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, positive et $M = \sup f(x)$; prouver que**

$$\lim_{n\infty} \left(\int_a^b [f(x)]^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

**Que dire de l'existence et de la valeur de cette limite si $f$ est non continue mais positive croissante?**

## EXERCICE 4

a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0 t\,(\pi - t)\cos(2n\,t)\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que pour $N \geq 1$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin((2N+1)\,t)\,\mathrm{d}t$, où $\varphi$ est une application continue de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$.

En utilisant le lemme de *Riemann-Lebesgue* (T.D.1), montrer que:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE 5

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Prouver que $P_n$ et ses dérivées successives prennent des valeurs entières aux points 0 et $\frac{p}{q}$.

b) Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^{p/q} P_n(t) \sin t \, dt$ converge vers 0.

c) En déduire que $\pi$ est irrationnel.

***Indication:*** on supposera par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$; on montrera que $I_n$ est un entier naturel non nul en procèdant à $2n$ *intégrations par parties* successives dans $I_n$.

EXERCICE 6

**Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *intégrale de Wallis* de rang $n$ le nombre réel:**

$$w_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt .$$

**a) Exprimer $w_{n+2}$ en fonction de $w_n$.**
**En déduire une expression de $w_n$ sous forme de produit, en discutant suivant la parité de $n$.**

**b) Calculer, si $n \in \mathbb{N}^*$, $n \, w_n \, w_{n-1}$.**

**Montrer que $(w_n)$ décroît, puis que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.**

**En déduire $w_n \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.**

**c) *Application*: calcul de *l'intégrale de Gauss* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , ce symbole désignant $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-x^2} dx$ , cette limite étant réelle.**

**c-1) Vérifier l'existence du nombre réel $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .**

**c-2) Vérifier que:**

$$\forall u \in [0, 1] \quad e^{-u^2} \geq 1 - u^2$$
$$\forall u \in [0, +\infty[ \quad e^{-u^2} \leq \frac{1}{1 + u^2} .$$

**c-3) Exprimer en fonction des *intégrales de Wallis*, $I_n = \int_0^1 (1 - u^2)^n du$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, (défini comme $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{du}{(1 + u^2)^n}$).**

**c-4) Déduire des questions précédentes la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.**

EXERCICE 7

Déterminer $\lim_{n \to \infty} S_n$ avec

*a)* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n + k}{n^2 + k^2}$;

*b)* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{n^3 + k^3}}$;

EXERCICE 8

**On considère, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in [0, 2\pi]$,**

$$\varphi(\theta, a) = \frac{1}{2} \ln (a^2 - 2a \cos \theta + 1)$$

**et**

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta, a)\, d\theta.$$

**Montrer que $I(a) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \varphi(2\theta, a^2)\, d\theta = \frac{1}{2} I(a^2)$.**
**En déduire $I(1)$.**

**En supposant $0 < |a| < 1$, montrer $|I(a)| < 2\pi \ln (1 + |a|)$;**
**calculer $I(a)$ pour $|a| < 1$. Montrer que**

$$I(a) - I\left(\frac{1}{a}\right) = 2\pi \ln |a|;$$

**en déduire $I(a)$ pour $|a| > 1$.**

EXERCICE 9

a) Soit $g$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a-1) Montrer que si $f$ est une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $g \circ f$ est également continue par morceaux sur $[a, b]$.
a-2) Montrer l'équivalence:

$$g \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{CM}([0, 1], \mathbb{R}),\ g\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 g \circ f.$$

b) Soit $a < b$ et $\varphi$ une application continue strictement positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer *l'inégalité de Jensen*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln \circ \varphi \leq \ln\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi\right).$$

**Exercice 10** . –

**1)** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to R$ une application de classe $\mathcal{C}^m$ telle que :

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = 0 \text{ avec } a \in I \text{ et } p \leq m.$$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que l'application $g$ définie sur $I$ par $g(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^p}$ si $x \neq a$ et $g(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$ est égale à :

$$g(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 (1-u)^{p-1} f^p(a + (x-a)u) du \text{ pour tout } x \in I.$$

En déduire que $g$ est de classe $\mathcal{C}^{m-p}$ sur $I$ et que l'on a :

$$\forall x \in I, \ ||g^{(m-p)}(x)|| \leq \frac{(m-p)!}{m!} \sup_{t \in J} ||f^m(t)||$$

où $J$ est le segment d'extrémités $a$ et $x$.

**2)** Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $R$, on suppose que :

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0 \text{ où } k \in N^*.$$

Montrer que l'on peut écrire $f(x) = x^k g_k(x)$ où $g_k$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $R$.

**3)** La fonction $F$ définie sur $R^*$ par $F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ est-elle prolongeable de façon $\mathcal{C}^\infty$ en 0? (Considérer la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$)

Même question avec les fonctions $G(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ et $H(x) = \frac{x}{\sin(x)}$ définies sur $R \backslash \{\pi Z\}$.

**Exercice 11** . –

Soit $f \in C^1(R, C))$, $2\pi$-périodique et ne s'annulant pas. On pose

$$I(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

1) Montrer que $I(f) \in Z$.

2) On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss. Soit $P \in C[X]$ un polynme de degré $n \geq 1$. On suppose que $P$ n'admet pas de racines dans $C$. On pose, pour $r \geq 0, f_r(t) = P\left(re^{it}\right)$. Montrer que la fonction $h$ définie par $h(r) = I(f_r)$ est continue sur $R_+$.

Calculer $h(0)$ et $\lim_{r \to \infty} h(r)$. Conclure.

3) Soit toujours $P \in C[X]$ et $R > 0$ tel que $P$ n'ait aucune racine de module $R$. Déterminer $I(f_R)$ au moyen des racines de $P$.

**Exercice 12** . –

On pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $R$.
2. Etudier $F(x) + G^2(x)$ sur $R$ avec $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du.$.
3. En déduire l'existence et la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.