ORSAY 2008-2009

Ecrit d'analyse

Fonctions d'une variable réelle, deuxième partie

Dérivées successives.

Exercice 1. – On considère la fonction $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur R.

b) Démontrer qu'il existe une fonction φ de classe C^∞ sur R telle que $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$.

Exercice 2. – Appliquer la formule de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = x^{n-1}\exp(1/x)$ en l'entier non nul n.

Inégalités et formules de Taylor ; applications

Exercice 3. – Montrer les inégalités :

1) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $x \in]0, +\infty[$.

2) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $x \in]0, +\infty[$.

3) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $x \in R$.

Exercice 3. –

Soit $I = (a, b)$ un intervalle de R et $N_{\infty,I}(f) = \mathrm{Sup}_{x\in I}|f(x)|$.

I. Estimation ponctuelle pour le cas des fonctions de classe C^2 positives.

Dans la partie A.I., f désigne une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1. *Estimation ponctuelle de f'.*

a) Montrer en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que

$$\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') \geqslant 0$$

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')f(x)}$. (1)

2. *Application.* On pose $g = \sqrt{f}$

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point x où $f(x) \neq 0$.

b) Soit x_o un réel où $f(x_o) = 0$. Déduire de (1) que $f'(x_o) = 0$. Montrer que $f''(x_o) \geqslant 0$. (En étudiant les variations de f au voisinage de x_o, on remarquera que si $f''(x_o)$ était strictement négative, f prendrait des valeurs strictement négatives.)

Montrer que, pour tout réel $x \neq x_o$, il existe un réel c compris entre x et x_o tel que $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_o)^2 f''(c)$. En déduire que si $f''(x_o) > 0$, g n'est pas dérivable en x_o.

c) Soit $x_o \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_o) = f'(x_o) = f''(x_o) = 0$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On note I_r l'intervalle $[x_o - r, x_o + r]$ et I_{2r} l'intervalle $[x_o - 2r, x_o + 2r]$ et $M_r(f'') = N_{\infty,I_{2r}}(f'')$ et on suppose $M_r(f'') \neq 0$.

1) Montrer que $\forall x \in I_r,\ |f'(x)| \leqslant rM_r(f'')$

2) Soit $x \in I_r$, montrer que si $2M_r(f'')f(x) < f'^2(x)$, $\tau(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2}M_r(f'')$, admettrait deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ appartienne à $[-r, r]$ et que $f(x + \mu) \leqslant \tau(\mu) < 0$.

En déduire que : $\forall x \in I_r,\ |f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_r(f'')f(x)}$.

d) Déduire des questions précédentes que, si f est une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f'' s'annule en tous les zéros de f (s'il en existe), $g = \sqrt{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II. Estimation en norme uniforme sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$.

1. Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}_+$, de longueur $2r$ avec $r > 0$, et soit $f \in C^2(I, \mathbb{R})$. A l'aide de la formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction f en l'un des couples $(x, x+r)$ ou $(x, x-r)$, montrer que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant \frac{2}{r}N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2}N_{\infty,I}(f'')$.
En déduire que : $N_{\infty,I}(f') \leqslant \frac{2}{r}N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2}N_{\infty,I}(f'')$ (2)

2. *Application 1.* Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; on suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}_+$.
a) Déduire de la question précédente que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $r > 0$,
$$N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leqslant \frac{2}{r}N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) + \frac{r}{2}N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'') \qquad (3)$$
b) En minimisant le second membre de (3) par rapport à $r > 0$, montrer que
$$N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leqslant 2\sqrt{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f)N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')} \qquad (4)$$

Exercice 4. –

Le but de cet exercice est de montrer que si f est de classe C^n de R dans R est si f et $f^{(n)}$ sont bornés sur R, alors $f^{(k)}$, $k \in \{1, \ldots n-1\}$, est bornée sur R.

On considère la matrice $H_{n-1} = (k^l) \in \mathcal{M}_{n-1}(R)$ où $(k,l) \in \{1, \ldots n-1\}^2$ et on pose

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1} \begin{pmatrix} \frac{f'(x)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} \text{ pour tout } x \in R.$$

1) Montrer que H_{n-1} est une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n-1}(R)$.

2) A l'aide d'une des formules de Taylor, montrer que l'on a la majoration :

$$|F_k(x)| \leq 2\mathrm{Sup}_{x\in R}|f(x)| + \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{Sup}_{x\in R}|f^{(n)}(x)|.$$

3) Conclure.

Exercice 5.– Soit f une fonction de classe C^2 de $[a,b]$ dans R, telle que : $f'(a) = f'(b) = 0$.

1) Montrer que pour tous x et y dans $]a,b[$, il existe ξ dans $]a,b[$ tel que : $|f''(x) - f''(y)| = 2|f''(\xi)|$ *(utiliser le théorème de Rolle pour montrer que 0 est une valeur prise par f'', puis le théorème des valeurs intermédiaires).*

En déduire qu'il existe un réel ξ de $]a,b[$ tel que :

$$|f(b) - f(a)| = \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$$

(écrire une formule de Taylor sur chaque demi-intervalle).

2) Retrouver le résultat en intégrant l'inégalité $|f''(x)| \leq M$ sur chaque demi-intervalle.

3) Raffiner le raisonnement du 2) pour montrer que si f n'est pas constante, il existe un réel η de $]a,b[$ tel que :

$$|f''(\eta)| > \frac{4}{(b-a)^2}|f(a) - f(b)|.$$

Interpolation

Exercice 6. – On considère quatre réels $c < a < b < d$ et f une application du segment $[a, b]$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. de classe $\mathcal{C}^n$), est ce qu'il existe un fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) définie sur $[c, d]$ qui prolonge f sur le segment $[c, d]$?

Exercice 7. – Soit f une application continue du segment $[a, b]$ dans R, deux fois dérivables sur l'intervalle $]a, b[$, et qui s'annule en a et en b. Montrer que pour tout point c du segment $[a, b]$, il existe un point ξ dans $]a, b[$ tel que :

$$f(c) = (c - a)(c - b)\frac{f''(\xi)}{2}$$

(Appliquer le théorème de Rolle à la différence de la fonction f et de son polynôme d'interpolation en a, b et c, de la forme (t-a)(t-b)A).

Exercice 8. – **Polynôme d'interpolation de Lagrange.** Soit f une fonction réelle de variable réelle, et $x_0, x_1, \ldots, x_q$ $(q+1)$ réels distincts. Le **polynôme d'interpolation** de f en ces points est, par définition, le polynôme de plus bas degré qui coïncide avec f en ces points.

1) Construction.

1a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à q?

1b. On définit les polynômes $W_0, \ldots, W_q$ par :

$$W_i = \Pi_{0 \leq j \leq q, j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Calculer $W_i(x_j)$ pour $0 \leq j \leq q$, $0 \leq i \leq q$. Montrer que la famille $(W_i)_{0 \leq i \leq q}$ est libre.

1c. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à q prenant en chaque réel x_i, $0 \leq i \leq q$, la même valeur que f. On exprimera ce polynôme, noté P, en fonction des polynômes W_i.

2a. On suppose que la fonction f est $(q+1)$ fois dérivable sur un intervalle I contenant les réels x_i, $0 \leq i \leq q$. Etant donné un point x de l'intervalle I, montrer qu'il existe un point ξ de I tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(q+1)!} f^{(q+1)}(\xi) \Pi_{0 \leq i \leq q}(x - x_j)$$

(Dans le cas où x n'est pas un des x_i, on appliquera le théorème de Rolle de manière répétée à une fonction bien choisie).

2b. Donner un exemple de fonction f, différente d'un polynôme, définie sur un segment de R, telle que toute suite de polynômes d'interpolation obtenue en augmentant le nombre $(q+1)$ de points d'interpolation converge uniformément vers la fonction f.

Application au calcul approché d'intégrales

Exercice 8. – **Formule du trapeze.**

Soit f une fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans R de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$.

On suppose que $|f^{(3)}(t)| \leq M$ pour $t \in]a, b[$.

1) Calculer les dérivées de :

$$h(t) = f(c+t) - f(c-t) - t\,[f'(c+t) + f'(c-t)] \text{ pour } c = \frac{a+b}{2} \text{ et } |t| < \frac{b-a}{2}.$$

2) Majorer $|h''(t)|$.

3) Montrer que : $\left|f(a) - f(b) - \frac{b-a}{2}\,[f'(a) + f'(b)]\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$.

4) Soit f une application continue du segment $[a, b]$ dans R, deux fois dérivable sur $[a, b]$ et soit c le milieu de $]a, b[$.On suppose que $|f^{(2)}(t)| \leq M$ pour $t \in]a, b[$.

Appliquer la question précédente pour montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{6}[f(a) + f(b) + 4f(c)]\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$$

Ecrire l'approximation, I_n, de $\int_a^b f(t)dt$ obtenue en découpant l'intervalle $]a, b[$ en n intervalles de même longueur et en appliquant la question précédente sur chaque intervalle. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_n\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

5) Donner les estimations équivalentes avec la formule de Simpson qui interpole la fonction aux extrémités et au centre de chaque intervalle.