## 4.4 Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Théorème 4.10.** *Soit $E$ un* SEV *non nul de $\mathbb{R}^n$. Toutes les bases de $E$ ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la* ***dimension*** *de $E$ et se note $\dim E$. On a de plus ici $\dim E \leq n$.*

Par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est 0 : $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini s'appelle son **cardinal**. Toutes les bases de $E$ ont donc même cardinal et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim E$ pour toute base $\mathcal{B}$ de $E$.

*Démonstration.* Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$ de cardinaux respectifs $p$ et $p'$. L'application

$$C_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{B}'} : \mathbb{R}^{p'} \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est un isomorphisme comme composé d'isomorphismes et donc $p = p'$. De plus $\mathcal{B}'$ est libre donc $L_{\mathcal{B}'} : \mathbb{R}^{p'} \to E \subset \mathbb{R}^n$ est injective et $\dim(E) = p' \leq n$. □

L'application $C_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{B}'} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ donne les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ de $E$ dans la base $\mathcal{B}$ à partir de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ :

$$\begin{aligned}
(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_p) \xmapsto[L_{\mathcal{B}'}]{} \vec{v} &= \lambda'_1 \vec{v_1}' + \lambda'_2 \vec{v_2}' + \dots + \lambda'_p \vec{v_p}' & \mathcal{B}=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_p}) \\
\mathcal{B}'=(\vec{v_1}',\vec{v_2}',\dots,\vec{v_p}') \qquad &= \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \dots + \lambda_p \vec{v_p} \xmapsto{C_{\mathcal{B}}} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)\,.
\end{aligned}$$

**Définition 4.11.** La matrice de l'application linéaire $C_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{B}'}$ est **la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$**. On la note (pour le moment) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

## 4.5 Calculs de dimensions et de bases

$\boxed{\mathbb{R}^n}$ La base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ de $\mathbb{R}^n$ est formée de $n$ vecteurs : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et donc toute base de $\mathbb{R}^n$ est formée de $n$ vecteurs.

La famille $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $L_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to E_{\mathcal{B}} = \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme. De plus, la $i$-ème colonne de sa matrice associée dans la base canonique est $L_{\mathcal{B}}(\vec{e_i}) = \vec{v_i}$, i.e. $\mathrm{Mat}(L_{\mathcal{B}}) = \left(\vec{v_1} \,\middle|\, \vec{v_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \vec{v_n}\right)$.

Or pour tout *endomorphisme* de $\mathbb{R}^n$ (une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même) :

$$f \text{ isomorphime de } \mathbb{R}^n \iff \mathrm{Mat}(f) \text{ inversible} \iff \text{rang de } \mathrm{Mat}(f) \text{ égale } n.$$

Ceci nous donne pour $f = L_{\mathcal{B}}$,

**Proposition 4.12.** *La famille $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice $\left(\vec{v_1} \,\middle|\, \vec{v_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \vec{v_n}\right)$ est de rang $n$.*

On en déduit des procédures pour

- <u>déterminer si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$</u> :
  on forme et on échelonne la matrice de $L_{\mathcal{B}} = \left( \overrightarrow{v_1} \,\middle|\, \overrightarrow{v_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \overrightarrow{v_n} \right)$, si la matrice obtenue a $n$ pivots, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Et si tel est le cas :

- <u>connaître les coordonnées de $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}$</u> : on calcule $C_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v})$, c'est-à-dire que l'on inverse $L_{\mathcal{B}}$ et on calcule $L_{\mathcal{B}}^{-1}(\overrightarrow{v})$.

| Droites et plans vectoriels |
|---|

Du fait de leur définition même, la dimension d'une droite vectorielle est 1, celle d'un plan vectoriel 2.

On remarque (exercice facile – mais à faire !), qu'une famille de *deux* vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée (i.e. il existe des réels non nuls $\lambda$ et $\mu$ tels que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$) si et seulement si les vecteurs sont colinéaires (i.e. il existe un réel $\lambda$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$).

On obtient donc que $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un plan vectoriel *ssi* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre (et donc) *ssi* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

| Les SEV de $\mathbb{R}^n$ |
|---|

En général, on copie la procédure utilisée dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}) \subset \mathbb{R}^n$ et $E_{\mathcal{F}} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ le SEV engendré. On forme la matrice $A = \left( \overrightarrow{v_1} \,\middle|\, \overrightarrow{v_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \overrightarrow{v_p} \right)$ et on échelonne :

| l'équation $AX = 0$,<br>colonnes pivots $i_1$, $i_2$, …, $i_r$<br>on a $\mathrm{rang}(A) = r = \dim(E_{\mathcal{F}})$ et<br>$\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \cdots, \overrightarrow{v_{i_r}})$ base de $E_{\mathcal{F}}$. | $\longleftrightarrow$ | le système homogène $(S_0)$ associé,<br>inconnues principales $x_{i_1}$, $x_{i_2}$, …, $x_{i_r}$<br>on a $\mathrm{rang}(S_0) = r = \dim(E_{\mathcal{F}})$ et<br>$\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \cdots, \overrightarrow{v_{i_r}})$ base de $E_{\mathcal{F}}$. |
|---|---|---|

Il semble alors naturel de définir le *rang* d'une famille de vecteurs :

**Définition 4.13.** Le **rang** de la famille $\mathcal{F}$ est la dimension du SEV engendré $E_{\mathcal{F}}$.

C'est donc aussi le rang de $A$ et celui de $(S_0)$ !

*Démonstration.* • On commence par montrer que la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \cdots, \overrightarrow{v_{i_r}})$ est libre. Supposons qu'il existe des réels $x_{i_1}$, $x_{i_2}$, …, $x_{i_r}$ tels que $x_{i_1}\overrightarrow{v_{i_1}} + x_{i_2}\overrightarrow{v_{i_2}} + \cdots + x_{i_r}\overrightarrow{v_{i_r}} = \overrightarrow{0}$. Ceci donne une solution de $(S_0)$, en prenant toutes les inconnues secondaires nulles.

Mais les inconnues secondaires déterminent une unique solution, et la solution où *toutes* les inconnues (principales et secondaires) sont nulles est solution puisque le système est homogène. C'est donc nécessairement celle-là ! Les $x_{i_1}$, $x_{i_2}$, …, $x_{i_r}$ sont donc tous nuls et $\mathcal{B}$ est libre.

• On montre maintenant que $B$ est génératrice. Soit $x_j$ une inconnue secondaire. Comme les inconnues secondaires déterminent (uniquement) une solution, il existe une unique solution de $(S_0)$ avec $x_j = 1$ et toutes les autres inconnues secondaires nulles.

Ceci donne la combinaison linéaire $v_j + (x_{i_1}\overrightarrow{v_{i_1}} + x_{i_2}\overrightarrow{v_{i_2}} + \cdots + x_{i_r}\overrightarrow{v_{i_r}}) = \overrightarrow{0}$, dont on peut déduire que $v_j = -(x_{i_1}\overrightarrow{v_{i_1}} + x_{i_2}\overrightarrow{v_{i_2}} + \cdots + x_{i_r}\overrightarrow{v_{i_r}}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \cdots, \overrightarrow{v_{i_r}}) = E_{\mathcal{B}}$. Donc *tous* les vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ (que $i$ soit l'indice d'une inconnue principale ou secondaire) appartiennent à $E_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{B}$ engendre $E_{\mathcal{F}}$. □

Voici deux conséquences essentielles de la méthode que l'on vient de décrire.

La philosophie de ces deux situations est qu'une *famille génératrice* engendre le SEV tout entier mais peut contenir des vecteurs « redondants » qu'il faut retirer pour obtenir une base, alors qu'au contraire, une *famille libre* ne contient pas de vecteurs « redondants » mais ne permet peut-être pas d'engendrer tout le SEV et l'on doit lui ajouter certains vecteurs.

**Théorème 4.14** (Extraction)**.** *$\mathcal{F}$ une famille finie et génératrice d'un* SEV *non nul $E$. Alors on peut* extraire *une base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{F}$, i.e. trouver une sous-famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{B}$ est une base de $E$.*

On suit exactement la même procédure. On échelonne la matrice $A = \left(\overrightarrow{v_1} \,\middle|\, \overrightarrow{v_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \overrightarrow{v_p}\right)$. Les colonnes $i_1$, $i_2$, ..., $i_r$ correspondant aux pivots de la matrice échelonnée déterminent une base $(\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_r}})$ de $E$.

**Théorème 4.15** (Complétion)**.** *$\mathcal{F}$ une famille libre d'un* SEV *$E$ muni d'une base $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$. Alors on peut* compléter *$\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B}$ de $E$.*

Pour cela il suffit d'ajouter $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{F}$ : on obtient une famille génératrice dont on peut extraire une base $\mathcal{B}$ comme précédemment. Comme on démarre avec une famille $\mathcal{F}$ qui est libre, on peut conserver tous ses vecteurs comme inconnues principales dans le processus.

SEV présenté par un système homogène

**Attention !** Cette notion « duale » est importante mais peut être source de confusion.

Il s'agit de calculer la dimension d'un sev donné comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

**Théorème 4.16.** *Soit $(S_0)$ un système linéaire homogène dont on appelle $E$ l'espace des solutions. Alors la dimension de $E$ est égale au nombre d'**inconnues secondaires** d'un système $(S)$ échelonné, équivalent à $(S_0)$.*

*Exemple.* Dans $\mathbb{R}^3$, l'équation $x + by + cz = 0$ est un système (homogène échelonné !) dont $y$ et $z$ (par exemple) sont les inconnues secondaires. L'ensemble des solutions de l'équation a donc dimension 2. (Ouf ! L'équation cartésienne d'un plan détermine bien un plan...)

*Exemple.* L'espace vectoriel des solutions du système homogène $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ \quad\ y + 2z &= 0 \end{cases}$ avec $z$ (par exemple) comme inconnue secondaire a dimension 1.

(Ouf ! L'intersection de 2 plans vectoriels non parallèles est une droite...)

*Idée de la démonstration du théorème.* Soit $r$ le rang du système $(S)$ échelonné équivalent à $(S_0)$, $i_1$, $i_2$, $\cdots$, $i_r$ les indices de ses inconnues principales et $j_1$, $j_2$, $\cdots$, $j_{p-r}$ celles de ses inconnues *non* principales. On définit $\overrightarrow{v_{j_k}}$ *la (seule)* solution de $(S_0)$ déterminée par $x_{j_k}=1$ et toutes les autres inconnues non principales $x_{j_\ell}=0$ (pour $1\leq \ell\leq p-r$ et $\ell\neq k$).

Affirmation : $(\overrightarrow{v_{j_1}},\overrightarrow{v_{j_2}},\dots,\overrightarrow{v_{j_{p-r}}})$ est une base de $E=\mathrm{Sol}(S_0)$.

En effet, par Gauss–Jordan toute solution de $(S_0)$ correspond à un unique $(x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_{p-r}})$, dit autrement : tout élément de $E$ correspond à une unique combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_{j_k}}$. $\square$

Cette idée de la preuve explique aussi comment déterminer une base de $E$. Pour le comprendre, traitons un ...

**Exemple récapitulatif.**

Soit $E$ le SEV défini comme ensemble des solutions de $(S_0)$ : $\begin{cases} x+y-z+t+u=0\\ 2x+y+2z-t+u=0\end{cases}$ dont $(S)$ : $\begin{cases} \boxed{x}+y-z+t+u=0\\ \qquad\boxed{y}-4z+3t+u=0\end{cases}$ est un système échelonné équivalent.

$(S)$ a deux pivots donc 3 inconnues non principales et donc $\dim(E)=3$.

On calcule maintenant trois solutions particulières, obtenues en fixant successivement l'une des trois inconnues secondaires à 1 et les deux autres à 0.

Ceci nous donne, comme $(S)$ est équivalent à $\begin{cases} x=-3z+2t\\ y=\quad 4z-3t-u\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \text{ pour } \begin{cases} z=1\\ t=u=0\end{cases} \quad\Big|\quad \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \text{ pour } \begin{cases} t=1\\ z=u=0\end{cases} \quad\Big|\quad \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \text{ pour } \begin{cases} u=1\\ z=t=0\end{cases}$$

Pour obtenir une base de $E$, il suffit de « compléter » ces vecteurs en vecteurs de $\mathbb{R}^5$ grâce aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (c'est $\mathbb{R}^{5-2}$ !).

$$\text{On obtient } \overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une base de $E$.

Remarquez que du fait de la dernière étape, il est évident que $A=\left(\overrightarrow{v_1}\,\middle|\,\overrightarrow{v_2}\,\middle|\,\overrightarrow{v_3}\right)$ est de rang 3, ce qui montre bien que $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une famille libre.