Cours du 23/03/2020 (14h30).

Cours du 16/03 : 4.2 Définition < Bases Coordonnées.

4.3 Indépendance linéaire.

Cours du 17/03 : 4.4 Dimension d'un SEV

4.5 Méthodes pour déterminer dimension et une base d'un SEV.

Vect($\mathcal{F}$) ou Solutions ($\mathcal{S}$)

6. Conséquences utiles.

$\mathcal{F} = (\vec{v_1}, \dots \vec{v_p})$, $\vec{v_i} \in E$.
$Card(\mathcal{F}) = p$.

Prop E sev, $\mathcal{F}$ famille de vecteurs de E.

(i) $\mathcal{F}$ libre alors $Card(\mathcal{F}) \leq \dim E$.

(ii) $\mathcal{F}$ génératrice alors $Card(\mathcal{F}) \geq \dim E$.

(iii) $\mathcal{F}$ libre et $Card(\mathcal{F}) = \dim E$, alors $\mathcal{F}$ base de E

(iv) $\mathcal{F}$ génératrice et $Card(\mathcal{F}) = \dim E$, alors $\mathcal{F}$ base de E.

Conséquences directes de l'extraction/complétion de bases.

Rmq. • $n = \dim E = card(\mathcal{F}) = p$

$\mathcal{F}$ est une base ssi $\mathcal{F}$ est libre

ssi $\mathcal{F}$ est génératrice.

• En général,

- $p = Card(\mathcal{F}) > n$, alors $\mathcal{F}$ est lié,
- $p = Card(\mathcal{F}) < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Prop. (Croissance de la dimension)

F un sev de E (de dim finie),

(i) $\dim F \leq \dim E$,

(ii) si $\dim F = \dim E$, alors $E = F$.

Rmq. E, F sev de $\mathbb{R}^n$, pour mq $E = F$:

- $\dim E \neq \dim F$ ⤳ absurde.
- $\dim E = \dim F$, il suffit de mq $E \subset F$ ou $F \subset E$.

7. $AX = Y$ et le Théorème du rang.

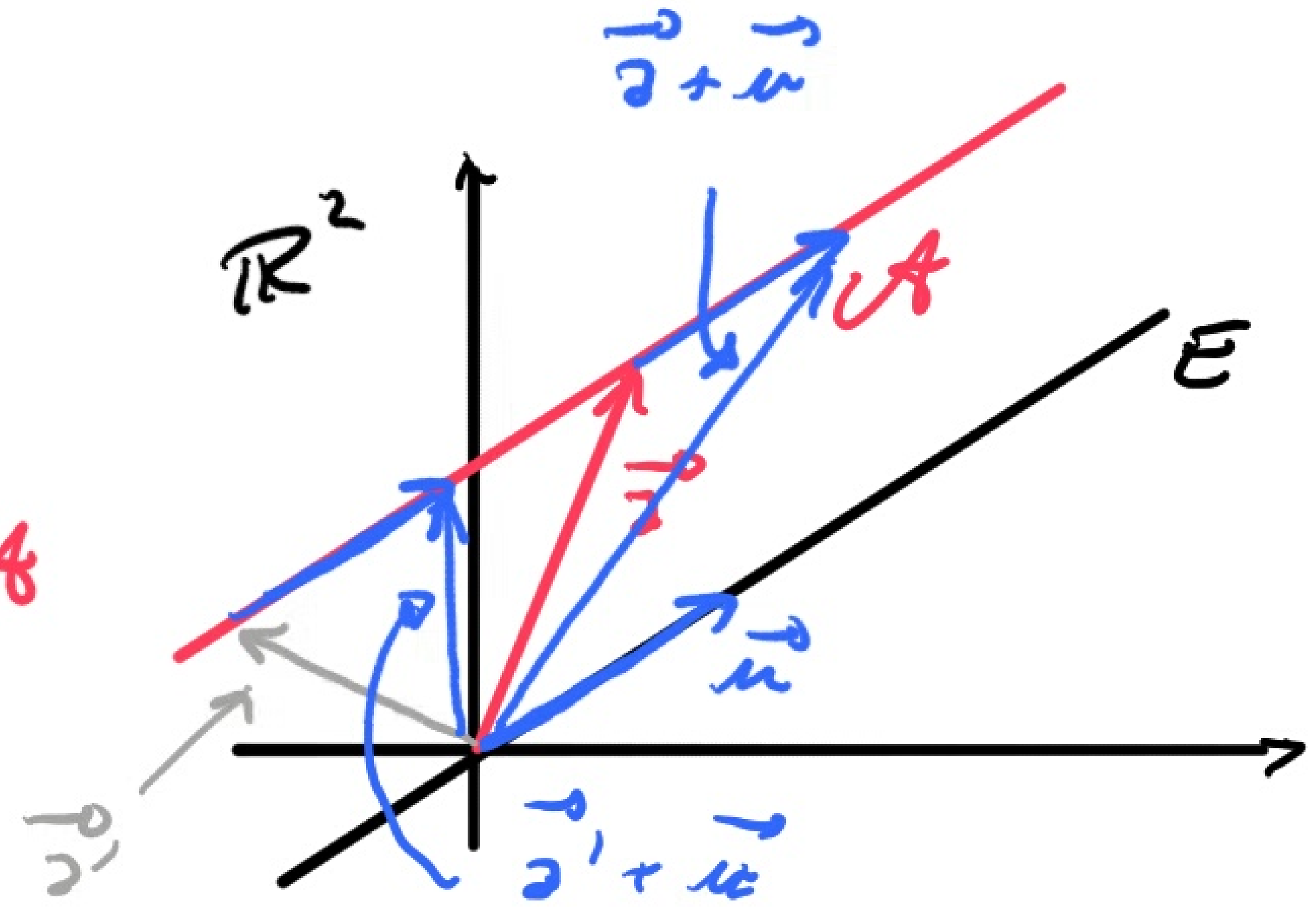
Déf. $\mathcal{A}$: espace affine de $\mathbb{R}^n$ si

$$\mathcal{A} = \vec{a} + E = \{\vec{a} + \vec{u} \mid \vec{u} \in E\}$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, E sev de $\mathbb{R}^n$, "direction vectorielle" de $\mathcal{A}$.

Rmq. Pour $\mathcal{A}$ donné, $\vec{a}$ n'est pas unique.

$$\vec{a} + E = \vec{a}' + E = \mathcal{A}$$



$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire.

Prop. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

1. $f(\vec{x}) = \vec{y}$ admet une solution ssi $\vec{y} \in \mathrm{im}(f)$.
2. $y \in \mathrm{im}(f)$, alors l'ensemble des solutions de $f(\vec{x}) = \vec{y}$ est l'espace affine :

$$Sol = \vec{x}_0 + \ker f = \{\vec{x}_0 + \vec{u} \mid \vec{u} \in \ker f\}.$$

où $\ker f$: direction vectorielle de Sol. et
$\vec{x}_0$: une solution particulière de $f(\vec{x}) = \vec{y}$.

Rmq. Pensez aux solutions d'une équation différentielle.

$$Sol(E) = v + Sol(E_0).$$

éqtn homogène associée.

$$Sol(AX = Y) = X_0 + Sol(AX = 0)$$

$f(\vec{x}) = \vec{y}$

Solution particulière.

dém (Prop). $\forall \vec{x} \in Sol$, $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + \underbrace{(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\vec{u}}$ avec $f(\vec{u}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. — $\vec{u} \in \ker(f)$.

inversement, $f(\vec{x}_0 + \vec{u}) = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{\vec{y}} + \underbrace{f(\vec{u})}_{\vec{0}} = \vec{y}$. $\square$

Thm (Théorème du rang)

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire :

$$\mathrm{rang}(f) + \dim(\ker f) = p = \dim(\mathbb{R}^p)$$

$\mathrm{rang}(\mathrm{Mat}(f)) = \dim(\mathrm{im}(f))$.

déf. $\operatorname{im}(f) = \operatorname{vect}(f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_p}))$ où $(\vec{e_1}, \dots \vec{e_p})$ base canonique de $\mathbb{R}^p$.

- Les inconnues principales de $AX=0$ forment une base de $\operatorname{im}(f)$ (Thm d'extraction).

  Donc $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(A)$
  $= $ nb d'inconnues principales de $AX=0$.

- $\ker f \longleftrightarrow$ solutions $AX=0 \longleftrightarrow$ solutions de $(\mathcal{S})$

  Donc $\dim(\ker f) = $ nb d'inconnues secondaires de $AX=0$.

D'où $\operatorname{rang}(f) + \dim(\ker f) = $ nb d'inconnues de $AX=0$
$= p$ ✓ □

Exple

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}\!\!\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \longleftrightarrow f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ ; \ X \mapsto AX$$

$$AX = Y \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & y_1 \\ 0 & 3 & 6 & 2y_1 - y_2 \\ 0 & -6 & -12 & y_3 - 3y_1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3(2y_1 - y_2) \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - 3y_1 + 2(2y_1 - y_2) \end{array}\right)$$

$\operatorname{Vect}(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2})) = \operatorname{im} f \leftarrow$ inconnues princ. $\rightarrow$ col. 1 et 2

équation cartésienne $\operatorname{im}(f) \rightarrow y_1 - 2y_2 + y_3$.

(i) $y \in \operatorname{im}(f) \iff AX = Y$ compatible
$\iff y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$ Eqtn de $\operatorname{im}(f)$

Donc f n'est pas surjective, $\operatorname{rang}(f) = 2$

car $\begin{cases} \{\text{sol. } y_1 - 2y_2 + y_3\} \text{ de dim } 2, \\ \operatorname{im}(f) = \operatorname{vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}_{\text{base}}\Big) \text{ de dim } 2. \end{cases}$

(ii) Si $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$ est satisfaite,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3(2y_1 - y_2) \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y_1 - \frac{4}{3}y_3 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3}(2y_1 - y_2) \end{array}\right)$$

et donc $X = \begin{pmatrix} y_1 - \frac{4}{3}y_3 + x_3 \\ \frac{1}{3}(2y_1 - y_2) - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

X_0 sol. particulière.

$$X = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3y_1 - 4y_3 \\ 2y_1 - y_2 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\ker f}$$

✓

Conséquences.

Prop. soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

(i) $\operatorname{rang}(f) \leq p$ et n — rang $f = p \iff f$ injective, rang $f = n \iff f$ surjective.

(ii) f injective, alors $p \leq n$,
f surjective, alors $p \geq n$,
f bijective, alors $p = n$.

(iii) Inversement, si $p = n$, ← $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$

f bijective ssi f injective ssi f surjective.

utilisé Chap 3, 7. Analyse entrée/sortie.
On Mq $(I - A)$ qui est inversible
car matrice carrée ($\leftrightarrow f$ endomorphisme)
et $\ker(I - A) = \{0\}$ ($\leftrightarrow f$ injective).

8. Espaces supplémentaires, somme directe, projections et symétries.

Déf. E, F sev de $\mathbb{R}^n$ sont **supplémentaires** si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, peut se décomposer de manière unique $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in E$ et $\vec{w} \in F$.

On dit aussi que $\mathbb{R}^n$ est la **somme directe** de E et F, notée $\mathbb{R}^n = E \oplus F$.

Prop. $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ si et seulement si :
(i) $\dim(E) + \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$,
(ii) $E \cap F = \{\vec{0}\}$.

Rmq. "tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in E$ et $\vec{w} \in F$" $\longleftrightarrow \mathbb{R}^n = E + F$.
+ décomposition unique $\longleftrightarrow \mathbb{R}^n = E \oplus F$.

Dans ce cas, E, F supplémentaires.