PeiP1/C | Polytech Paris-Sud
Mathématiques 2 | 2019–2020

Contrôle 1

DURÉE : 1H30 – DATE : 11/02/2020

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 5 exercices indépendants.

Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*.
Le soin apporté à la rédaction et aux dessins sera pris en compte.

Exercice 1. (3 points) Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_{[0,2]\times[0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)}\, dxdy\,.$$

Exercice 2. (6 points)

Soit $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ 2x + y \leq 6\}$.

1. Représenter D_1 et calculer son aire.

2. Calculer $\displaystyle\iint_{D_1} xy\, dxdy$ (indication : il pourra être utile de factoriser par 27 à la dernière étape).

On considère le domaine $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ 9x + y \leq 9\}$.

3. Déterminer une dilatation φ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(D_1) = D_2$ et en donner le jacobien.

4. En déduire l'aire de D_2.

Exercice 3. (7 points)

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x + y \geq 0\,,\ x - y \leq 0\}$.

1. Représenter D.

2. Montrer que $\displaystyle\iint_D x\, dxdy = 0$ en considérant une symétrie bien choisie.

3. Déterminer un domaine $\Delta \subset \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\}$ tel que l'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ réalise une bijection de $\Delta \setminus \{r = 0\}$ sur $D \setminus \{(0,0)\}$.

4. Calculer $\displaystyle\iint_D y\, dxdy$ en coordonnées polaires.

5. On suppose D homogène, donner les coordonnées de son centre de gravité.

Exercice 4. (5 points)

1. Montrer que pour tout $u \geq 0\,,\ e^{-u} \geq 1 - u$ (en étudiant les variations d'une fonction bien choisie).

2. En déduire que :

$$\frac{10}{9} \leq \iint_{[0,1]\times[0,2]} e^{-x^2y^2}\, dxdy \leq 2\,.$$

Exercice 5. (2 points)

Représenter le domaine $D' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2\,,\ x + y \leq 2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ et calculer son volume.