Correction du Devoir Maison (14–15 mai 2020)

Exercice 1 (7 points).

1. Pour que l'image de f soit le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$, on peut par exemple imposer que ces vecteurs soient respectivement les images par f des deux premiers vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_3$. La matrice de f serait alors de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f)=A=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&b\\1&0&c\end{pmatrix}\text{ et donc } A\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}3+3a\\2+3b\\1+3c\end{pmatrix}$$

où a, b et c sont des réels à déterminer de sorte que $A\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{0}$. Cela donne $a=-1$, $b=-\frac{2}{3}$ et $c=-\frac{1}{3}$. La matrice suivante convient donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{2}{3}\\1&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Remarque. Comme $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont linéairement indépendants et dans l'image de f, celle-ci est de dimension au moins 2. Comme le noyau de f est de dimension au moins 1, le théorème du rang donne que la dimension de l'image de f est exactement 2 et celle de son noyau exactement 1.

2. On procède de la même façon et on forme la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(g)=B=\begin{pmatrix}1&a&d\\2&b&e\\3&c&f\end{pmatrix}\text{ pour laquelle } A\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}1+d\\2+e\\3+f\end{pmatrix}\text{ et } A\overrightarrow{u_3}=\begin{pmatrix}1+a\\2+b\\3+c\end{pmatrix}.$$

Pour que $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ soient dans le noyau de h, on choisit $a=d=-1$, $b=e=-2$ et $c=f=-3$ et la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(g)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\3&-3&-3\end{pmatrix}$ qui est bien de rang 1 convient.

3. Soit $\mathcal{B}$ la famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$.

(a) Comme $\left(\overrightarrow{u_1}\,\middle|\,\overrightarrow{u_2}\,\middle|\,\overrightarrow{u_3}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ de rang 3, $\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal 3 et donc une base de $\mathbb{R}^3$. Or l'image des vecteurs d'une base déterminent une application linéaire.

(b) Par définition de h, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ convient car $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.
En effet, la i-ème colonne de cette matrice correspond aux coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de l'image du i-ème vecteur de $\mathcal{B}$ par h. Par exemple la deuxième colonne est $h(\overrightarrow{u_2})=\overrightarrow{u_3}=(0,0,1)_{\mathcal{B}}$ puisque $\overrightarrow{u_3}$ est le 3-ème vecteur de $\mathcal{B}$.

(c) On peut utiliser la définition de la matrice de h dans la base canonique $\mathcal{B}_3=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ comme précédemment. Il faut donc calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}_3$. Or $\overrightarrow{e_1}=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{u_1}-3\overrightarrow{u_2}-2\overrightarrow{u_3})$. Par linéarité de h on obtient donc

$$h(\overrightarrow{e_1})=-\tfrac{1}{4}\big(h(\overrightarrow{u_1})-3h(\overrightarrow{u_2})-2h(\overrightarrow{u_3})\big)=-\tfrac{1}{4}\big(\overrightarrow{u_2}-3\overrightarrow{u_3}-2\overrightarrow{u_1}\big)=\tfrac{1}{4}(4,7,5)=(1,\tfrac{7}{4},\tfrac{5}{4}).$$

De la même façon, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{u_3}-\overrightarrow{e_1}$, donc $h(\overrightarrow{e_2})=h(\overrightarrow{u_3})-h(\overrightarrow{e_1})=(0,\frac{1}{4},\frac{7}{4})$. Finalement, $\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{e_1}$, donc $h(\overrightarrow{e_3})=h(\overrightarrow{u_2})-h(\overrightarrow{e_1})=(0,-\frac{3}{4},-\frac{5}{4})$. On en déduit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(h)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0\\7&1&-3\\5&7&-5\end{pmatrix}$.

Remarque. On pouvait aussi utiliser la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_3$ donnée en **3.**(a) : $\left(\overrightarrow{u_1}\,\middle|\,\overrightarrow{u_2}\,\middle|\,\overrightarrow{u_3}\right)=P^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_3}$. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(h)=P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)P$ où $P=P^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}}=(P^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_3})^{-1}$.

Exercice 2 (4 points).

1. On échelonne la matrice dont les colonnes sont les vecteurs générateurs via l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan par exemple (les pivots utilisés sont encadrés) :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes pivot de la matrice échelonnée obtenue sont les deux premières donc : la famille considérée engendre un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est donnée par les 2 premiers vecteurs, $(1,2,1,2)$ et $(2,1,1,3)$.

2. On peut par exemple : conserver les deux vecteurs de la base que nous venons de déterminer, leur ajouter les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et en extraire une famille libre de cardinal 4 :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$

Les 4 premières colonnes sont pivot donc ajouter $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ à une base de E permet de former une base de $\mathbb{R}^4$; $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est donc un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

3. E est de dimension 2 et il est facile de voir que F aussi (les composantes nulles des vecteurs qui l'engendrent montrent qu'ils ne sont pas colinéaires). E et F sont donc « de la bonne dimension » pour être supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. Il faut donc vérifier que leur somme est *directe*. On procède comme ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les 4 vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, et la somme $E+F$ n'est donc pas directe : F n'est pas un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 (4,5 points).

1. La famille $\mathcal{B}'$ est de cardinal 3, c'est donc une base si et seulement si elle est libre. On forme donc

$$P = \left(\overrightarrow{u_1} \,|\, \overrightarrow{u_2} \,|\, \overrightarrow{u_3} \right) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien de rang 3. La famille $\mathcal{B}'$ est libre, c'est donc une base et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}'$.

2. On utilise la définition : la i-ème colonne de la matrice d'une application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par f du i-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$. On calcule donc $f(\overrightarrow{u_1})$, $f(\overrightarrow{u_2})$ et $f(\overrightarrow{u_3})$:

$$AU_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; AU_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = U_2 \text{ et } AU_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = U_3\,.$$

On obtient donc $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{0}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_2}$ et $f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{u_3}$ et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

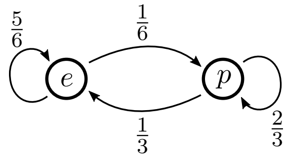
3. f est donc la projection sur le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}_{\overrightarrow{u_1}}$. En particulier, $f \circ f = f$ et donc $A^2 = A$. On montre alors par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = A$:

- c'est évident pour $n = 1$ et prouvé pour $n = 2$ (initialisation)
- si c'est c'est vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $A^{k+1} = A \cdot A^k = A \cdot A = A$ par hypothèse de récurrence puis par le cas $n = 2$. La propriété se transmet donc bien de k à $k+1$ (hérédité).

Exercice 4 (7,5 points).

1. $e(n)$ et $p(n)$ sont des probabilités (être « endetté » et « pas endetté » à l'année n), elles sont donc comprises entre 0 et 1. De plus, un individu donné est soit « endetté », soit « pas endetté » : ce sont les deux seules possibilités et elles sont mutuellement exclusives. Donc $e(n) + p(n) = 1$.

2. Un individu endetté a une chance sur 6 de ne plus être endetté l'année suivante, sa probabilité de rester endetté l'année suivante est donc de $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.



De même, un individu non endetté a deux chances sur trois de le rester l'année suivante. La probabilité qu'il devienne endetté est donc de $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. On obtient le graphe ci-contre.

3. Avec les conventions du cours, l'élément $a_{i,j}$ de la matrice de transition donne la probabilité de passer de l'état j à l'état i l'année suivante.

En choisissant « endetté » comme état 1 et « pas endetté » comme état 2, on obtient $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

4. A est évidemment irréductible puisque tous ses coefficients sont strictement positifs.
Le théorème de Perron–Frobenius assure qu'il existe un unique état stationnaire.

5. $A - I_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et on a clairement $\big(A - I_2\big) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $(A - I_2)$ est de rang 1 et son noyau est la droite vectorielle $\mathcal{D}_{\overrightarrow{u}}$ avec $\overrightarrow{u} = (2, 1)$. Le seul élément de cette droite qui est un « état » du système doit vérifier les conditions expliquées en **1.**. On le divise donc par la somme de ses composantes : $\overline{X} = \frac{1}{2+1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6. Ceci assure que tout individu, *indépendamment des conditions initiales* (par le théorème de Perron–Frobenius, voir **4.** ci-dessus), a 2 chances sur 3 de finir « endetté » quand n tend vers l'infini. (Et en fait, 7 ans suffisent pour une probabilité *très* proche de $\frac{2}{3}$ – Whaaaaat !?! :-/ ...)

7. $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires : $\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal 2 et donc une base de $\mathbb{R}^2$. On calcule $f(\overrightarrow{u_2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{u_2}$ et donc $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

8. On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $(A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$:

- C'est vrai pour $n = 1$ (initialisation).
- Si $(A')^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$ alors $(A')^{k+1} = A' \cdot (A')^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^{k+1} \end{pmatrix}$ (hérédité).

$\boxed{\text{Question bonus.}}$

9. La notion de convergence pour les matrices est à comprendre termes à termes. Ici, le seul terme qui dépend de n est le terme $a_{2,2} = \frac{1}{2^{n+1}} \to 0$ quand $n \to 0$. Donc la matrice A' converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ quand n tend vers 0. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$:

$$A^n = (PA'P^{-1})^n = P(A')^n P^{-1} \longrightarrow P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Donc quel que soit $X_0 = \begin{pmatrix} e_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$, $A^n X_0$ converge vers $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\, e_0 + \frac{2}{3}\, p_0 \\ \frac{1}{3}\, e_0 + \frac{1}{3}\, p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \overline{X}$.

$\boxed{\text{On a prouvé le théorème de Perron–Frobenius dans le cas des chaînes de Markov à 2 états}^*.}$

(* à un petit effort supplémentaire près.)

On a bien mérité des vacances...