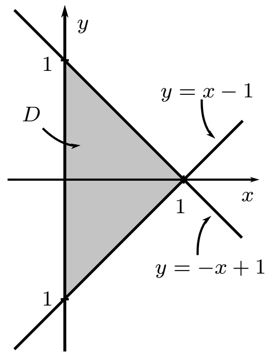
Correction contrôle 2

DURÉE : 1H30 – DATE : 11/03/2021

Exercice 1.

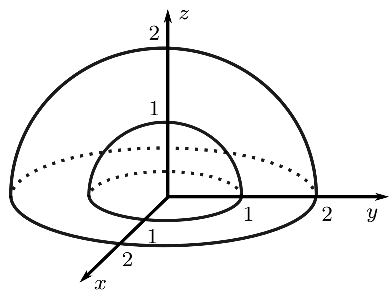
1. On trace les droites d'équations $x = 0$, $y = x - 1$ et $y = -x + 1$. Elles délimitent un triangle qui est le domaine D cherché.
   Son aire, $\mathcal{A}(D) = \iint_D dxdy$ se calcule en utilisant Fubini, par exemple en tranches verticales :
   $$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} dy \right) dx = \int_0^1 2(1-x)\, dx = \left[-(1-x)^2 \right]_0^1 = \boxed{1}.$$



2. Comme D est supposé homogène, de densité 1, les coordonnées de son centre de gravité sont $(x_D, y_D) = \dfrac{1}{\mathcal{A}(D)} \left(\iint_D x\, dxdy, \iint_D y\, dxdy \right)$.
   On peut utiliser comme précédemment Fubini en tranches verticales pour calculer
   $$\iint_D x\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} dy \right) \cdot x\, dx = \int_0^1 2x(1-x)\, dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$
   Pour son ordonnée, on peut remarquer que D est symétrique par rapport à la symétrie d'axe (Ox), i.e. par la transformation $(x, y) \mapsto (x, -y)$ dont le jacobien est constant égal à 1. Comme la fonction y est « impaire » par rapport à y, on en déduit par changement de variables que
   $$\iint_D y\, dxdy = \iint_D -y\, dxdy = -\iint_D y\, dxdy \quad \text{et donc que} \quad \iint_D y\, dxdy = 0.$$
   Comme l'aire de D vaut 1, on en conclut que $\boxed{(x_D\,, y_D) = \left(\frac{1}{3}\,, 0\right)}$.

Exercice 2.

1. L'encadrement $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ correspond à l'espace entre deux sphères de rayons respectifs 1 et 2. L'inégalité $z \geq 0$ indique que l'on n'en considère que la moitié supérieure.



2. Ce domaine est en bijection avec le domaine « sphérique » $\boxed{\Delta = [1\,, 2] \times]-\pi\,, \pi] \times [0\,, \frac{\pi}{2}]}$ puisque le rayon r est compris entre 1 et 2, qu'il n'y a aucune contrainte sur θ, et que l'on ne considère que le demi-espace supérieur.

3. On calcule l'intégrale demandée via changement de coordonnées phériques, avec z qui devient $r \cos \varphi$:
   $$\iiint_D z\, dxdydz = \iiint_\Delta r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi\, drd\theta d\varphi = \left(\int_1^2 r^3\, dr \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi\, d\varphi \right)$$
   où la dernière égalité est une conséquence du théorème de Fubini dans le cas particulier des fonctions à variables séparables (sur un pavé droit). On conclut en calculant chacune de ces intégrales simples.

   Tout d'abord, $\displaystyle\int_1^2 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{4}$, alors que la seconde vaut évidemment 2π.

   Pour la troisième, on peut par exemple utiliser la formule $\sin(2\varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi$ qui donne
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(2\varphi)\, d\varphi = \left[-\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$
   On en déduit finalement le résultat : $\displaystyle\iiint_D z\, dxdydz = \frac{15}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{15\pi}{4}}$.

Exercice 3.

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ doivent vérifier l'équation de $\mathcal{P}$. On en tire donc un système dont les inconnues sont a, b et c : $\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ \quad\;\; b + 2c = 0 \end{cases}$
   En choisissant par exemple $c = -1$, on trouve $b = 2$ et $a = 1$, ce qui montre que l'équation $\boxed{x + 2y - z = 0}$ est une équation de $\mathcal{P}$.

2. Il suffit de trouver deux vecteurs *non colinéaires* vérifiant l'équation de $\mathcal{P}$. On choisit $x = 1$ et $z = 0$ et l'on obtient le vecteur de coordonnées $(1\,,\lambda\,,0)$. De même $x = 0$ et $z = 1$ conduisent au vecteur $(0\,,\lambda\,,-1)$.
   Ces deux vecteurs sont évidemment non colinéaires du fait des coordonnées nulles choisies.

3. Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}_\lambda$ vérifient le système

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y - z = 0 \\ \lambda x + y - \lambda z = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z = 0 \\ (1-2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

   après remplacement de L_2 par $L_2 - \lambda L_1$.

   - Quand $\lambda = \frac{1}{2}$, la seconde équation s'écrit $0 = 0$ (équation de compatibilité satisfaite) et le système est équivalent à l'équation de $\mathcal{P}$. Les équations définissant $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{P}$ sont proportionnelles et définissent donc le même plan.

   - Quand $\boxed{\lambda \neq \frac{1}{2}}$, le système a deux inconnues principales x et y et ses solutions s'expriment en fonction de son inconnue secondaire z. La seconde équation donne $y = 0$ et la première donne donc $x = z$: $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_\lambda$ est la droite engendrée par le vecteur $\boxed{(1, 0, 1)}$, par exemple.

Exercice 4.

1. On procède via l'algorithme de Gauss–Jordan pour obtenir un système échelonné équivalent :

$$\begin{cases} \boxed{x} - y - 3z = 2 \\ x - z = 3 \\ 2x - y - 3z = 6 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y - 3z = 2 \\ \boxed{y} + 2z = 1 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ y + 3z = 2 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} \boxed{x} - y - 3z = 2 \\ \boxed{y} + 2z = 1 \\ \boxed{z} = 1 \end{cases}} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

2. Le système obtenu est *triangulaire* (il y a autant d'équations que d'inconnues et les coefficients sous la diagonale sont nuls) dont les coefficients diagonaux sont non nuls, il s'agit d'un système de Cramer. Il admet donc $\boxed{\text{une unique solution}}$. Il en va de même pour $(\mathcal{S})$ qui lui est équivalent.

Exercice 5.

Comme indiqué dans l'énoncé, on procède via l'algorithme de Gauss–Jordan :

$$(\mathcal{S}') : \begin{cases} \boxed{x} - y + z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y - 2z = -1 \\ 4x - 3y + z = 4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y + z = 4 \\ 3y - 3z = -6 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 4y - 5z = -13 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ y - 3z = -12 & (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1) \end{cases}$$

Pour se simplifier la vie, on multiplie la seconde ligne par $\frac{1}{3}$, et on poursuit

$$(\mathcal{S}') \longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y + z = 4 \\ \boxed{y} - z = -2 & (L_2' \leftarrow \frac{1}{3}L_2) \\ - z = -5 & (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2') \\ - 2z = -10 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_2') \end{cases}$$

Après multiplication de la troisième ligne par -1, puis l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$, on en déduit

$$(\mathcal{S}') \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{x} & - & y & + & z & = & 4 \\ & & \boxed{y} & - & z & = & -2 \\ & & & & \boxed{z} & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système échelonné équivalent obtenu admet une unique équation de compatibilité qui est satisfaite et ses trois inconnues sont principales. Il admet donc une unique solution. On la détermine aisément en remontant le système : $z = 5$, donc $y = -2 + 5 = 3$ et finalement $x = 4 + 3 - 5 = 2$.
$\boxed{\text{L'unique solution de } (\mathcal{S}') \text{ est } (2\,,3\,,5).}$

Exercice 6.

1. Via l'algorithme de Gauss–Jordan, on obtient un système linéaire échelonné équivalent :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & m \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & m-3 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

   on intervertit les lignes 2 et 3 pour se faciliter la vie :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & \boxed{2x_2} & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & m-3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & \boxed{2x_2} & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & m-1 \end{array}\right.}$$

2. On a donc un système linéaire échelonné équivalent dont les inconnues principales sont x_1 et x_2, et dont l'inconnue secondaire est x_3. Son rang est donc 2 (et il admet soit aucune, soit une infinité de solutions).

3. L'équation de compatibilité $0 = m - 1$ est satisfaite si et seulement si $m = 1$. On a donc :
   - pour $m \neq 1$, $(\mathcal{S}_m)$ est incompatible et n'a $\boxed{\text{aucune solution}}$,
   - pour $m = 1$, $(\mathcal{S}_1)$ admet une infinité de solutions paramétrées par x_3. On détermine immédiatement $x_2 = \frac{1-x_3}{2}$ puis $x_1 = 1 - x_3 - \frac{1-x_3}{2} = \frac{1-x_3}{2}$.

     Les solutions de $(\mathcal{S}_1)$ sont donc $\boxed{\left\{\left(\frac{1-x_3}{2}\,,\,\frac{1-x_3}{2}\,,\,x_3\right) \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R}\right\}}$.