PeiP 1A/2C — Polytech Paris-Saclay
Mathématiques 2 — 2020–2021

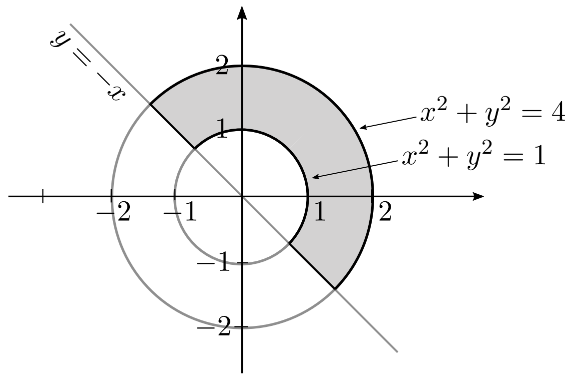
Correction du contrôle de rattrapage

DURÉE : 1H30 – DATE : 16/06/2021

Exercice 1.

1. (a) L'encadrement $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ correspond à deux inégalités : être à l'extérieur (resp. intérieur) du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 (resp. 2).

   D se trouve donc dans l'anneau délimité par ces deux cercles. Il ne reste qu'à tracer la droite d'équation $y = -x$ pour déterminer le demi anneau qui nous intéresse.



   (b) On ne demande pas de justifier. On remarque que D correspond à un rayon r compris entre 1 et 2 et un angle θ compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On en déduit $\Delta = [1\,,2] \times [-\frac{\pi}{4}\,,\frac{3\pi}{4}]$.

   (c) On utilise la formule de changement de variables vers les coordonnées polaires :
$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dxdy = \iint_\Delta r\,drd\theta = \left(\int_1^2 r\,dr\right)\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\right)$$
   où la dernière égalité vient du théorème de Fubini dans le cas séparé.

   On obtient donc $\mathcal{A}(D) = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \cdot \left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

2. (a) Pour déterminer x_G, il reste à calculer $X_G = \iint_D x\,dxdy$. On procède comme pour $\mathcal{A}(D)$ ci-dessus :
$$X_G = \iint_D x\,dxdy = \iint_\Delta r\cos\theta\cdot r\,drd\theta = \left(\int_1^2 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta\right)$$
   et donc $X_G = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \cdot \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{3}$.

   Comme D est supposé homogène de densité 1, $x_G = \frac{X_G}{\mathcal{A}(D)} = \frac{7\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{3\pi} = \frac{14\sqrt{2}}{9\pi}$.

   (b) Le point de coordonnées (x,y) appartient à D si et seulement si (y,x) appartient à D : le domaine considéré est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

   Par changement de variable selon cette symétrie, on obtient immédiatement que $Y_G = \iint_D y\,dxdy = \iint_D x\,dxdy = X_G$ ce qui conclut.

Exercice 2.

1. Grâce à l'algorithme de Gauss–Jordan, on obtient une matrice équivalente :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & a-3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$
   qui a 2 pivots si $a = -1$ et 3 pivots pour toute autre valeur de a.

   On en déduit que l'image de f est de dimension 2 quand $a = -1$ et dans ce cas les deux premières colonnes en donnent une base : $\big((1,-1,1),(1,1,-1)\big)$. Pour toute autre valeur de a, l'image de f est $\mathbb{R}^3$ tout entier (de dimension 3 et dont la base canonique est une base).

2. L'application linéaire f étant définie sur $\mathbb{R}^3$ dont la dimension est 3, le théorème du rang nous donne que $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = 3$. On en déduit que quand $a = -1$, $\dim(\ker(f)) = 1$, alors que $\dim(\ker(f)) = 0$ pour toute autre valeur de a.

3. Il est maintenant clair que f est injective et surjective si $a \neq -1$, alors qu'elle n'est ni injective ni surjective quand $a = -1$. (*Rappel.* Pour un endomorphisme, être injectif est équivalent à être surjectif – par le théorème du rang – et donc à être bijectif.)

4. On cherche les vecteurs X de coordonnées (x, y, z) tels que $AX = 0$. Les calculs sont les mêmes que ci-dessus, avec $a + 1 = 0$ et donc
$$AX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 3z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = 0 \end{array} \right.$$
(*Remarque.* Le système échelonné équivalent obtenu a bien une unique variable secondaire, l'espace des solutions est donc bien de dimension 1.) On choisit par exemple $z = -1$ et on trouve $x = 1$ et $y = 2$ ou encore que le vecteur de coordonnées $(1, 2, -1)$ est une base de $\ker(f)$.

Exercice 3.

1. Comme $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}\big((\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) + (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})\big)$, par linéarité de f, $f(\overrightarrow{e_1}) = \frac{1}{2}\big(f(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) + f(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})\big)$, ce qui donne le vecteur de coordonnées $(1, 2, 3)$. De même $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}\big((\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) - (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})\big)$, et donc $f(\overrightarrow{e_2})$ est le vecteur de coordonnées $(3, 2, 1)$.
   La matrice de f dans les bases canoniques est donc la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Comme f est une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et g une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on peut les composer (dans n'importe quel ordre). En particulier, on obtient une application linéaire $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
3. La matrice associée à $g \circ f$ dans les bases canoniques est le produit de celle de g par celle de f, ou encore $C = B \cdot A$.
   Le calcul direct donne $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.
4. La matrice B correspond déjà à un système échelonné avec 2 pivots, son rang est donc 2. La matrice A est elle aussi de rang 2 (on l'échelonne ou on remarque que les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ ne sont pas colinéaires). La matrice C quant à elle est de rang 1 puisque ses 2 lignes sont identiques et non nulle.

Exercice 4.

1. E est donné comme l'ensemble des solutions du système
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & & & = 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & & & = 0 \\ & & y & & & - & t & = 0 \end{array} \right.$$
   Ce dernier système est échelonné et admet deux variables secondaires, z et t, la dimension de E est donc 2. On en détermine une base en posant successivement $z = 1$, $t = 0$ puis $z = 0$, $t = 1$. On obtient que $\big((-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\big)$ est une base de E.
2. Les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, ils engendrent donc un espace vectoriel de dimension 2 dont ils sont une base.
3. On peut par exemple appliquer l'algorithme de Gauss–Jordan à la matrice obtenue en juxtaposant des bases de E et F :
$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Son rang est donc 3, strictement inférieur à la dimension de $\mathbb{R}^4$: E et F ne sont donc pas supplémentaires.
4. On procède comme au-dessus, mais en juxtaposant la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base de E :
$$\left(\begin{array}{cc|cccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Les 4 premières colonnes contiennent des pivots. Ceci indique que les 4 vecteurs de gauche de la matrice initiale sont libres. Or 4 vecteurs libres de $\mathbb{R}^4$ en forment nécessairement une base. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ (les 2 premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$) est donc un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.