PeiP 1A/2C — Polytech Paris-Saclay
Mathématiques 2 — 2021–2022

Contrôle 1

durée : 1h30 – date : 25/02/2022

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 4 exercices indépendants.

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*. Le soin apporté à la rédaction et aux dessins sera pris en compte.

Exercice 1. (3 points)
Calculer l'intégrale double suivante : $I = \displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{y}{(1+x^2)(2-y^2)}\,dxdy$.

Exercice 2. (7,5 points)
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\,,\ x+y \geq 0\}$.

1. Représenter le domaine D.

2. Montrer qu'il est symétrique par rapport à un axe que l'on déterminera.

3. En déduire que $\displaystyle\iint_D x\,dxdy = \iint_D y\,dxdy$.

4. Déterminer la pré-image Δ du domaine D par la bijection $\varphi :]0,+\infty[\times[-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $\varphi(r,\theta) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$.

5. Calculer $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ grâce à un passage en coordonnées polaires.

6. On suppose D de densité constante égale à 1, calculer les coordonnées de son centre de gravité.

↑ Rédigez sur des copies différentes ↓

Exercice 3. (3,5 points)

1. Représenter le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ et calculer son aire.

2. Montrer que les courbes représentatives (graphes) des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ partagent le carré $[0,1]\times[0,1]$ en trois parties d'aires égales.

Exercice 4. (7 points)
Soit $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\,,\ y \geq 0\,,\ y-x \leq 0\}$.

1. Représenter T_1.

2. Calculer $I_1 = \displaystyle\iint_{T_1} xy\,dxdy$.

On considère le domaine $T_2 = \varphi(T_1)$ où φ est la dilatation de $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (\sqrt{3}\cdot x, \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot y)$.

3. Déterminer $\displaystyle\iint_{T_2} xy\,dxdy$ en fonction de I_1.

4. Sans calculer les intégrales, déterminer une constante C telle que $\displaystyle\iint_{T_1} x^2\,dxdy = C\cdot\iint_{T_2} x^2\,dxdy$.

On considère maintenant le prisme $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in T_1\,,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

5. Représenter P.

6. Calculer l'intégrale triple : $\displaystyle\iiint_P xyz\,dxdydz$.