Contrôle 3

DURÉE : 1H30 – DATE : 19/05/2022

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 4 exercices indépendants.

> Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
> Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*.

Exercice 1. (5 points)

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

1. Déterminer le rang de A, puis la dimension et une base de l'image de f.
2. Grâce au théorème du rang (à énoncer proprement), déterminer la dimension du noyau de f.
3. Montrer que le noyau de f est défini par le système d'équations $\begin{cases} x + 2y \quad + t = 0 \\ \qquad\quad z + t = 0 \end{cases}$
4. Déduire de la question précédente une base du noyau de f.

Exercice 2. (5 points)

On considère le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 2, 1)$, $\overrightarrow{u_3} = (1, 3, 3, 1)$, $\overrightarrow{u_4} = (2, 3, 0, -1)$.

1. Déterminer la dimension et une base de E.
2. Pour chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants, déterminer si E et F sont supplémentaires :
   (a) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 3z + 2t = 0\}$.
   (b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 3z + 2t = 0 \text{ et } x + y - 2z - 3t = 0\}$.
   (c) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 3z + 2t = 0 \text{ et } x + y - 2z - 3t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$.

↑ Rédigez sur des copies différentes ↓

Exercice 3. (3 points)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont l'image est engendrée par le vecteur $(-2, 1, -2)$ et dont le noyau est engendré par les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(2, 0, 1)$.

1. Donner un exemple de matrice A correspondant à une telle application linéaire.
2. Montrer que l'image de f est incluse dans le noyau de f.
   (<u>Indication.</u> Cette question est indépendante de la question précédente.)
3. Montrer que ceci implique que $f \circ f = 0$; en déduire A^2 *sans la calculer.* (Justifier !)

Exercice 4. (7 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, 0, 1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (-2, 1, -2)$. On dénote par $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ et par $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}$, puis la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_3$.
3. Déterminer les coordonnées $(x', y', z')_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}_3$.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Déduire des questions 3. et 4. une équation cartésienne de P dans la base $\mathcal{B}_3$.

Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
7. Déterminer la nature géométrique de f ; en déduire A^2 *sans la calculer.* (Justifier !)