Contrôle de rattrapage

durée : 1h30 – date : 21/06/2022

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 4 exercices indépendants.

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Toute réponse doit être justifiée. Le barème donné est *indicatif*.

Exercice 1. (6 points)
On considère le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ -x \leq y \leq x\}$.

1. (a) Représenter D.
   (b) Donner un domaine $\Delta \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que l'application $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ réalise une bijection de Δ sur D. On ne demande pas de prouver la bijectivité de φ.
   (c) Calculer l'aire de D grâce à un changement de variables vers les coordonnées polaires.
2. On suppose D homogène de densité 1.
   (a) Calculer l'abscisse x_G de son centre de gravité G.
   (b) Grâce à une symétrie bien choisie, montrer que son ordonnée y_G est nulle.

Exercice 2. (6 points)
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & m \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques, où m est un paramètre réel.

1. Déterminer la dimension et une base de l'image de f en fonction de la valeur de m.
2. En utilisant le théorème du rang (à énoncer proprement), déterminer la dimension du noyau de f en fonction de m.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'application f est-elle surjective ? injective ?
4. On suppose $m = -\frac{5}{2}$, déterminer une base du noyau de f.
5. On suppose $m = -3$, déterminer la matrice de f^{-1}.

Exercice 3. (4 points)
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $f(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) = (1, 2)$, $f(\overrightarrow{e_2}) = (1, -1)$ et $f(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = (-1, 2)$.

1. Déterminer la matrice A de f associée aux bases canoniques.

Soit g l'application linéaire dont la matrice associée dans les bases canoniques est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Justifier l'existence de la composition $g \circ f$.
3. Déterminer la matrice C associée à $g \circ f$ dans les bases canoniques.
4. Calculer le rang des matrices A, B et C.

Exercice 4. (4 points)
On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

- $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + 2t = 0 \text{ et } x + y - z + t = 0\}$,
- $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ avec $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 2, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 3, 2)$.

1. Déterminer la dimension et une base de E.
2. Déterminer la dimension et une base de F.
3. Montrer que E et F ne sont pas supplémentaires.
4. Déterminer un espace vectoriel supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.