Feuille d'exercices n°6

Applications linéaires et matrices : changements de base

Exercice 1 - *Différentes matrices d'une même application linéaire.*

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z).$$

1. f est-elle une application linéaire ?

2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leur base canonique $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.

3. Montrer qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\overrightarrow{v_1}) = (0, 0)$, $f(\overrightarrow{v_2}) = (1, 0)$ et $f(\overrightarrow{v_3}) = (0, 1)$.

4. Vérifier que $\mathcal{B}_3' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3', \mathcal{B}_2}(f)$.

5. Vérifier que $\mathcal{B}_2' = \big((1, 1), (1, -1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2'}(f)$.

Exercice 2 - *Application linéaire déterminée par l'image d'une base.*

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, 1)$.

1. Vérifiez que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit p l'unique application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $p(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et $p(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0}$.

2. Quelle est la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$? Que représente géométriquement p ? Déterminer $p \circ p$ et M^2 ?

3. Calculer $p(\overrightarrow{e_1})$ et $p(\overrightarrow{e_2})$ à l'aide de la question **1**. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Que vaut N^2 ?

4. Retrouver directement N à l'aide d'une formule du cours.

Exercice 3 - *Isomorphismes de $\mathbb{R}^n$.*

Soient $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}' = (\overrightarrow{v_1}', \overrightarrow{v_2}', \dots, \overrightarrow{v_n}')$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{v_i}'$ pour tout i entre 1 et n.

1. Montrer que f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

2. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}'}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}'$.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ où l'on considère la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et la famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ où $\overrightarrow{v_1} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

3. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

4. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes (i.e. ses coordonnées dans la base canonique) sont (x, y). Calculer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 - *Matrice de passage et équations cartésiennes.*

On note $\mathcal{B}_3 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \big(\overrightarrow{u_1} = (-1, 2, 3),\ \overrightarrow{u_2} = (1, -1, 1),\ \overrightarrow{u_3} = (-1, 1, -2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}'$.

2. Soit $\overrightarrow{u} = x'\overrightarrow{u_1} + y'\overrightarrow{u_2} + z'\overrightarrow{u_3} = (x', y', z')_{\mathcal{B}'}$. Quel calcul matriciel permet de déterminer les composantes x, y, z de $\overrightarrow{u}$ dans la base canonique ?

3. Inversement, si $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

4. À quelle condition sur x', y', z' le vecteur $\overrightarrow{u} = (x', y', z')_{\mathcal{B}'}$ appartient-il à $P = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$? En déduire une équation cartésienne de P dans la base canonique.

5. Donner une équation cartésienne de $E = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 5 - *Suite : Changement de base et applications linéaires.*

On travaille toujours dans $\mathbb{R}^3$ avec les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}'$ de l'**Exercice 4**. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice dans $\mathcal{B}_3$ d'une application linéaire f.

1. Exprimer $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ en fonction de A et $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'}$.

2. Déterminer A' et expliquer la signification géométrique de f.
Indication. On pourra utiliser la question **1.** ou déterminer A' directement grâce à sa définition.

3. Calculer $(A')^2$ et en déduire A^2. Quelle relation satisfaite par f cela traduit-il ?

Exercice 6 - *Généralisation : Une caractérisation des projections.*

On suppose que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ et on considère la projection $p = p_{E/F}$ sur E parallèlement à F.

1. Rappeler la définition de p et montrer que

$$\text{(a) } E = \operatorname{im} p = \ker(p - \operatorname{Id}), \qquad \text{(b) } F = \ker p, \qquad \text{(c) } p \circ p = p.$$

2. Soient $\mathcal{B}$ une base *quelconque* de $\mathbb{R}^n$ et $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ la matrice de p dans $\mathcal{B}$. Montrer que $P^2 = P$.

Inversement, on suppose qu'un endomorphisme $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfait $p^2 = p$. On veut montrer que p est la projection sur $E = \ker(p - \operatorname{Id})$ parallèlement à $F = \ker p$.

3. Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, montrer que $p(\overrightarrow{v}) \in E$ et $\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}) \in F$.

4. En déduire que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ en remarquant que $\overrightarrow{v} = p(\overrightarrow{v}) + \big(\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})\big)$ et conclure quant à la nature de p.

5. *Exemple* : montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projection.

6. Déterminer $\operatorname{im} P$ et $\ker P$.

Finalement on veut calculer la trace d'une projection. (On rappelle que la *trace* d'une matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{R})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.) On suppose que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$.

7. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F. Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

8. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection p sur E parallèlement à F.

9. En déduire la trace de p.

10. En déduire les dimensions de l'image et du noyau de Q.

Exercice 7 - *Propriété d'application linéaire.*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$ associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de f et une base de $\operatorname{im} f$. En déduire $\dim(\ker f)$.

2. Donner une base de $\ker f$. Les espaces $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3. Calculer $f(1, -2, -1)$.

4. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. En déduire que $A^n = 2^{n-1} A$.

Exercice 8 - *Les symétries.*

On suppose que E et F sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition de la symétrie par rapport à E dans la direction de F.

2. Montrer que $s \circ s = \mathrm{Id}$.

3. Soit $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ la matrice de s dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$: calculer S^2.

4. Montrer que S est inversible et déterminer son inverse.

On rappelle que la trace d'une matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{R})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.

5. Soient A et B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Montrer que $\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda \,\mathrm{Tr}(B)$.

6. Déduire de ceci et de la question **9** de l'**Exercice 6** la trace de S.

7. Retrouver (sans détail) ce résultat en vous inspirant des questions **7–9** de l'**Exercice 6**.

Exercice 9 - *Diagonalisation et puissances d'une matrice* 2×2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $f_\lambda = f - \lambda \mathrm{Id}$, et on note A_λ sa matrice dans la base canonique.

1. Exprimer A_λ et son déterminant, $P(\lambda) = \det(A_\lambda)$, en fonction de λ.
Remarque. Le déterminant des matrices 2×2 est bien au programme.

2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application f_λ est-elle un isomorphisme ?

3. *Sans les calculer explicitement,* déduire de la question **2** qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ non nuls tels que $f(\overrightarrow{v_2}) = 2\overrightarrow{v_2}$ et $f(\overrightarrow{v_3}) = 3\overrightarrow{v_3}$.

4. Montrer que la famille $(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est libre.
Indication. Montrer que si $a_2\overrightarrow{v_2} + a_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ alors $2a_2\overrightarrow{v_2} + 3a_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ et donc que $a_2 = a_3 = 0$.

5. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, et qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}A'P$.

6. Montrer que $A^n = P^{-1}(A')^nP$ pour tout entier n et en déduire un calcul (efficace) de A^{2021}.